

**ГЕНЕРАЦИЯ МНОГОМЕРНОГО СЛУЧАЙНОГО
ПРОЦЕССА ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ
ПОДВИЖНОГО СОСТАВА ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ**

A.A. Akishin, A.N. Savoskin

**GENERATING A MULTIDIMENSIONAL PERTURBED
STOCHASTIC PROCESS IN RAILWAYS ROLLING
STOCK DYNAMICS**

Во время движения поезда по железнодорожному пути на него воздействует возмущение в виде вертикальной и горизонтальной неровностей правой и левой рельсовых нитей, вызывающих колебания механической части подвижного состава. В связи с этим возникает проблема генерации многомерного процесса возмущения по заданной матрице автокорреляционной и взаимокорреляционной функции или спектральной плотности. Для этого создан формирующий механизм во временной области. С помощью данного механизма можно выполнить генерацию многомерных случайных процессов возмущения при различных скоростях движения с любой длиной реализации и шагом дискретизации во временной области.

ГЕНЕРАЦИЯ МНОГОМЕРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА; ВОЗМУЩЕНИЯ, ВЫЗЫВАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА; ФОРМИРУЮЩИЙ МЕХАНИЗМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ.

When a train is moving along the tracks, it is exposed to perturbations in the form of vertical and horizontal irregularities of the right and left rails causing oscillations in the mechanical parts of the rolling stock. This raises the problem of generating a multidimensional stochastic process of disturbances in accordance with a given matrix of auto-correlation and cross-correlation functions or spectral densities. For this purpose, the forming mechanism in the temporary realm was designed. This mechanism allows generating multidimensional stochastic processes of irregularity at different speeds for any length of implementation or discretization step in the temporary realm.

GENERATING MULTIDIMENSIONAL STOCHASTIC PROCESS; PERTURBING FACTOR CAUSING OSCILLATIONS OF RAILWAY VEHICLES; FORMING MECHANISM IN THE TEMPORARY REALM.

Для решения задач динамики подвижного состава железных дорог необходимо выполнять генерацию многомерного гауссовского стационарного случайного процесса возмущения $\|y(t)\|$ по известным его характеристикам – матрице авто- и взаимокорреляционных функций $\|R_{yiu}(\tau)\|$ или матрице спектральных и взаимных спектральных плотностей $\|G_{yiu}(j\omega)\|$.

С этой целью обычно используют фор-

мирующий механизм [1], структурная схема которого приведена на рис. 1. Этот механизм состоит из m некоррелированных генераторов белого шума ($\text{ГШ}_1 \div \text{ГШ}_m$) и из $0,5m(m+1)$ линейных устойчивых минимальнофазовых фильтров с передаточными функциями $\|W_{iu}(j\omega)\|$. Однако эта схема применима к аналоговым системам, в которых ГШ_i и фильтры представляют собой реальные физические устройства.

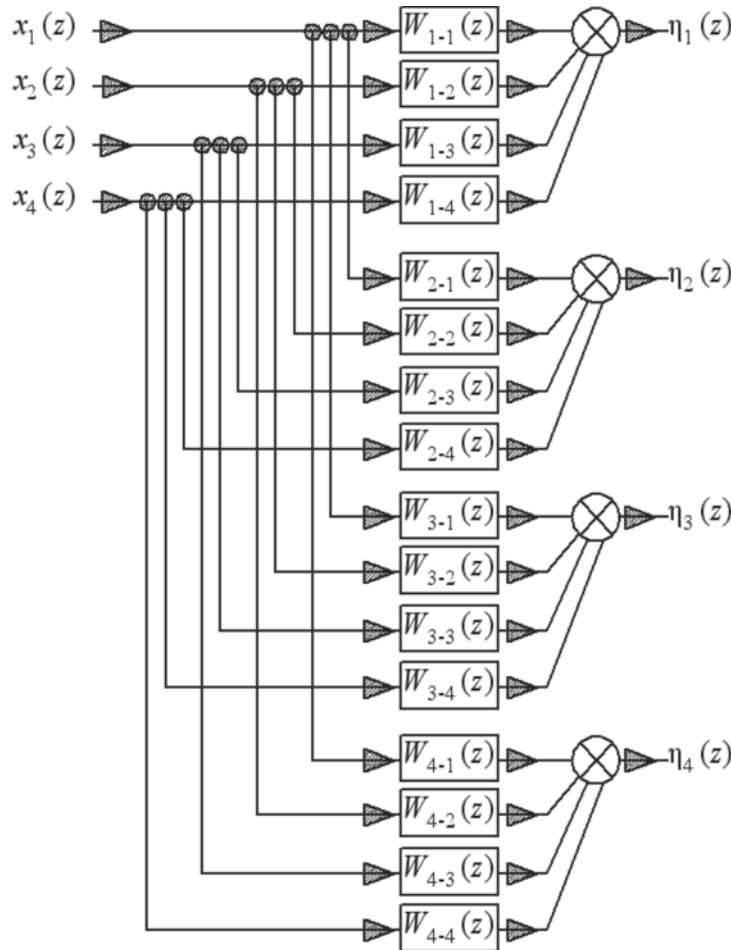


Рис. 1. Структурная схема формирующего механизма в операторной области

При программной реализации каждый ГШ_i генерирует дискретную последовательность чисел $x_i[nT]$, $n = 1, 2, \dots, N$ (T – шаг временной дискретизации), распределенных по гауссовскому закону со спектральной плотностью, равной единице. При этом последовательности $x_i[nT]$ не коррелированы между собой. Этот процесс необходимо преобразовать в многомерный гауссовский стационарный случайный процесс с заданной матрицей спектральных плотностей $\|G_{yiu}(j\omega)\|$ размером $i \times u = m \times m$, где $i = 1, 2, 3, \dots, m$ и $u = 1, 2, 3, \dots, m$. В качестве алгоритма решения такой задачи предлагается следующая процедура.

1. Поскольку процессы на выходе ГШ_i являются дискретными, то вначале необходимо получить матрицу дискретных спектральных плотностей $\|G_{yiu}(z)\|$ выходного

процесса $y(nT)$, выполнив дискретное преобразование Лапласа:

$$X(z) = Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad (1)$$

где $z = e^q = e^{pT}$; матрицы корреляционных функций $\|R_{yiu}(nT)\|$:

$$\|G_{yiu}(z)\| = Z\{\|R_{yiu}(nT)\|\}. \quad (2)$$

2. Представить матрицу $\|G_{yiu}(z)\|$ в следующем виде:

$$\|G_{yiu}(z)\| = \|W_{iu}^*(z)\| \cdot \|W_{iu}(z)\| \cdot \|G_{xiu}(z)\|, \quad (3)$$

где $\|W_{iu}^*(z)\|$ – матрица дискретных частотных характеристик, эрмитовски сопряженная с матрицей $\|W_{iu}(z)\|$; $\|G_{xiu}(z)\|$ – матрица единичных спектральных плотностей некоррелированных сигналов на выходе генераторов белого шума размером $m \times m$:

$$\|G_{x_{iu}}(z)\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Поскольку задача решается во временной области, то, в отличие от [1] и [2], матрицу $\|W_{iu}(z)\|$ необходимо преобразовать в матрицу импульсных характеристик с помощью обратного дискретного преобразования Лапласа:

$$\|k_{iu}(nT)\| = Z^{-1}\{\|W_{iu}(z)\|\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} \|W_{iu}(z)\| e^{qn} dq. \quad (4)$$

4. Вычислить выходной процесс $\eta_{iu}(nT)$ с помощью интеграла свертки:

$$y_{iu}(nT) = \int_0^{\infty} k_{iu}(nT - \zeta)x_{iu}(\zeta)d\zeta. \quad (5)$$

Реализация этого алгоритма может быть выполнена по новой схеме формирующего механизма (рис. 2), содержащего импульсные характеристики $k_{iu}(nT)$ и интеграторы, выполняющие вычисление интеграла свертки (5).

В качестве примера рассмотрим генерацию четырехмерного гауссовского стационарного случайного процесса возмущений в виде вертикальных и горизонтальных неровностей $\eta_{iuss}(x = vt)$ левого и правого рельсов, вызывающего колебания рельсовых экипажей. Здесь $i = s = 1$ соответствует

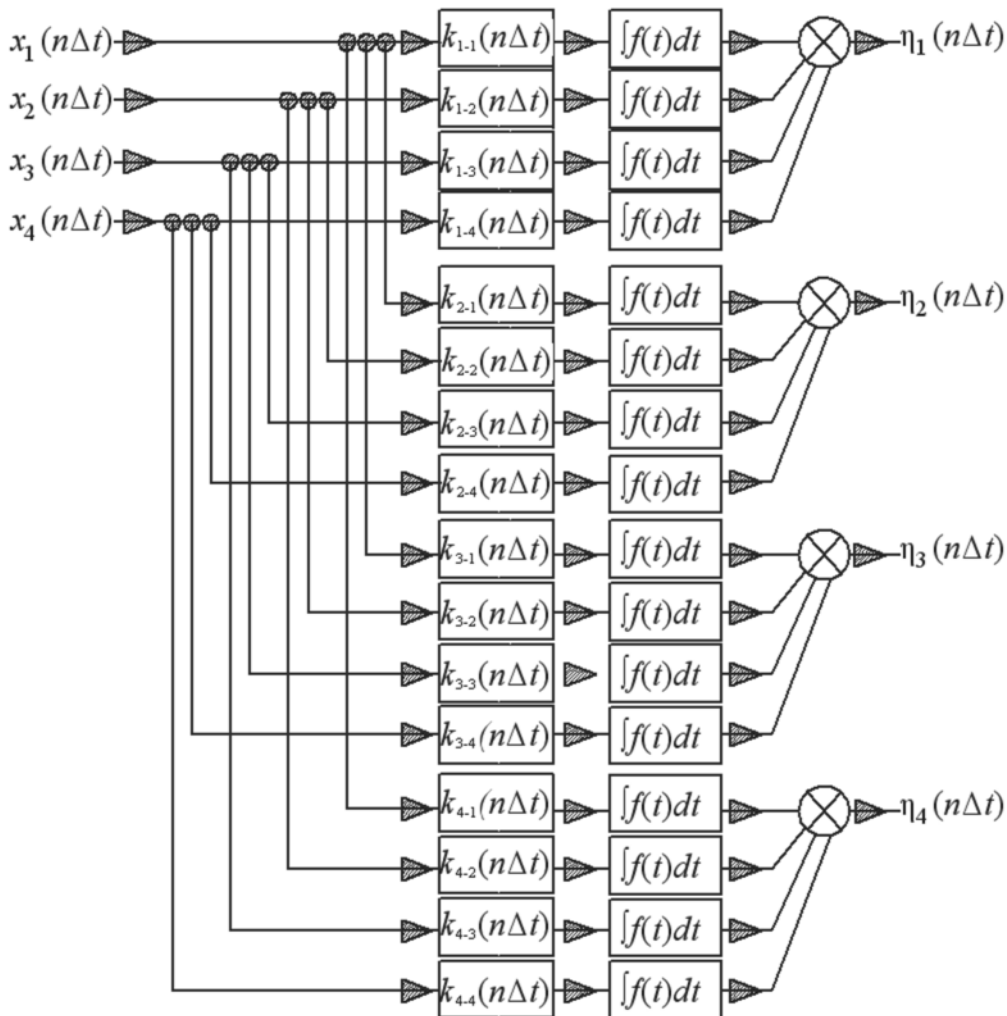


Рис. 2. Структурная схема формирующего механизма во временной области

вертикальной неровности; $i = s = 2$ – горизонтальной; $u = l = 1$ соответствует левому, а $u = l = 2$ – правому колесам. В результате такой нумерации матрица $\|\eta_{iust}(x = vt)\|$ будет иметь размерность 4×4 .

В [3] была выполнена аппроксимация аналитическими выражениями авто- и взаимокорреляционных функций и спектральных и взаимных спектральных плотностей такого многомерного случайного процесса. Приведем выражение для корреляционных функций к виду, соответствующему дифференцируемому случайному процессу $\eta_{iust}(x = vt)$:

$$R_{iust}(\tau) = S_{iust}^2 \sum_k a_{kiust}^2 \exp[-(\alpha_{kiust})^2 (n_{iust}^* \Delta x)^2] \times \cos(\beta_{kiust} n_{iust}^* \Delta x), \quad (6)$$

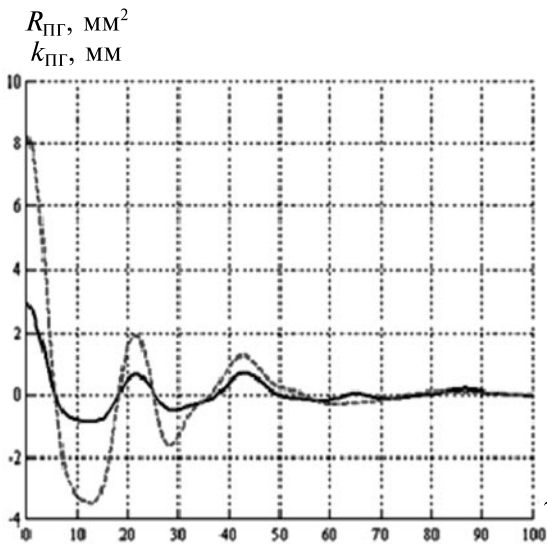
где $n_{iust}^* = n - n_{ciust}$ [м]; a_{kiust}^2 – доля дисперсии S_{iust}^2 случайного процесса, приходящаяся на

$$G_{iust}(z) = S_{iust}^2 \sum_k a_{kiust}^2 \frac{\{\exp[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2]\} \cdot \{\cos \beta_{kiust} \Delta x\} z^2 + \{\exp[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2]\} z}{\{\exp[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2]\} z^2 + 2\{\exp[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2]\} \cdot \{\cos \beta_{kiust} \Delta x\} z + 1}. \quad (7)$$

Факторизовав (7) в программном пакете MatLAB с помощью оператора factor, найдем аналитическое выражение для элементов матрицы передаточных функций:

$$W_{iust}(z) = S_{iust} \sum_k a_{kiust} \sqrt{\frac{\{\exp[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2]\} \cdot (\cos \beta_{kiust} \Delta x) z + \{\exp[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2]\}}{\{\exp[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2]\} z^2 + 2\{\exp[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2]\} \cdot (\cos \beta_{kiust} \Delta x) z + 1}}. \quad (8)$$

а)



б)

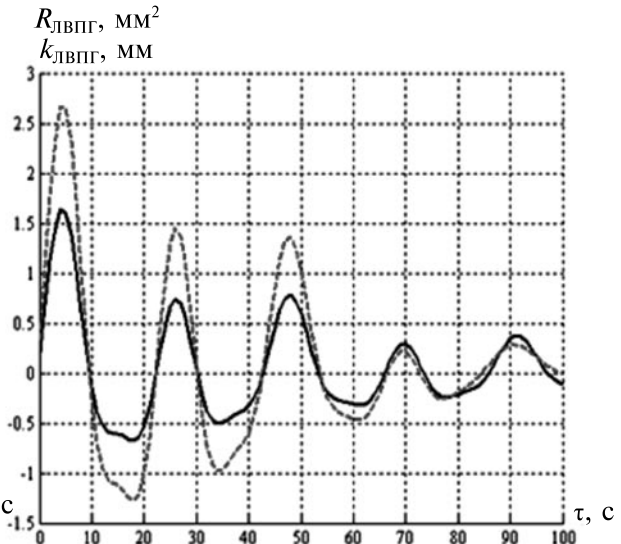


Рис. 3. Графики импульсной характеристики (—) и корреляционной функции (---): а – горизонтальной неровности правого рельса; б – взаимной корреляционной функции и импульсной характеристики вертикальной неровности левого рельса и горизонтальной неровности правого рельса

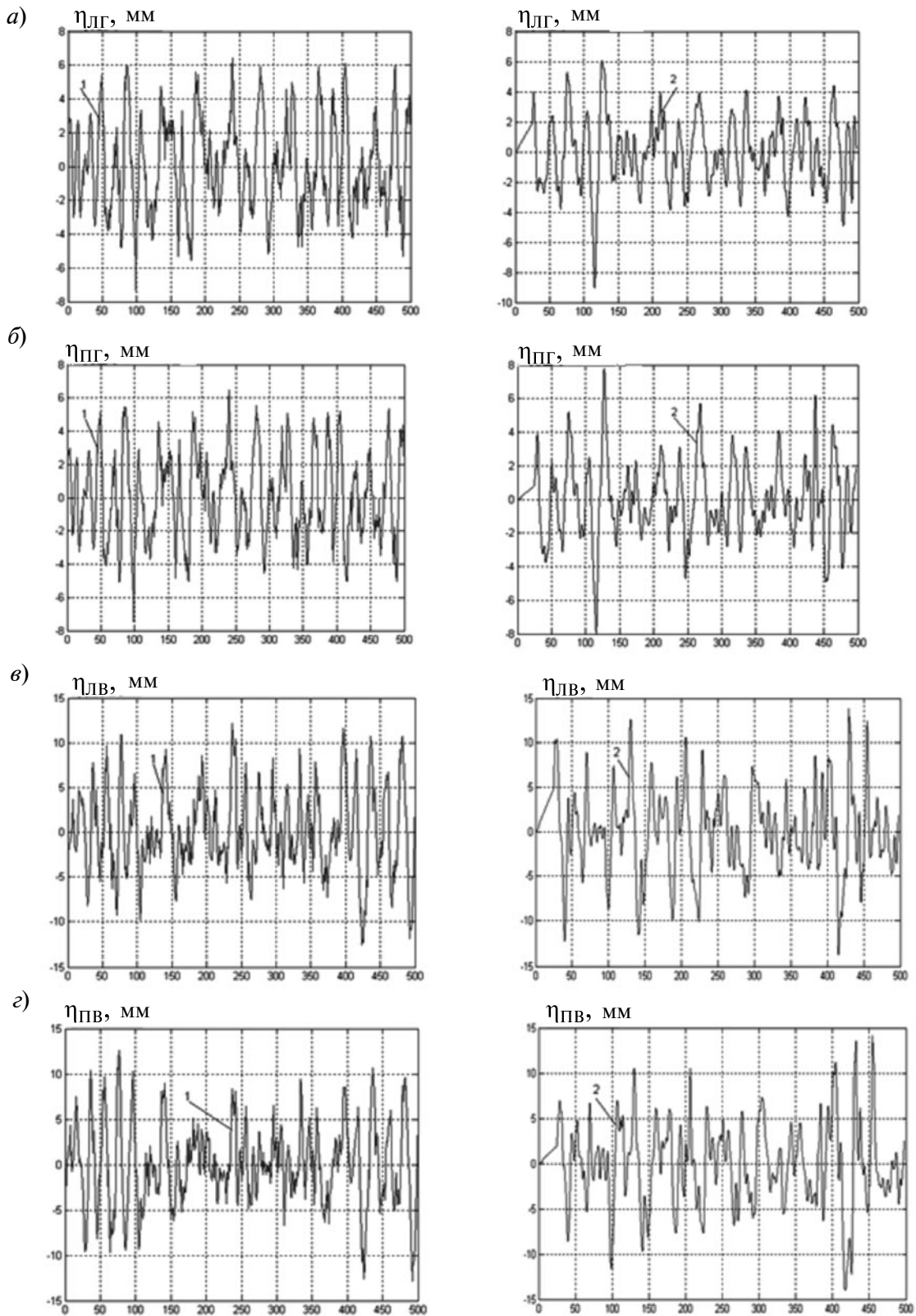


Рис. 4. Реализации четырехмерного случайного процесса геометрической неровности рельсов: 1 – сгенерированные; 2 – исходные; горизонтальные левого (а) и правого (б) рельсов; вертикальные левого (в) и правого (г) рельсов

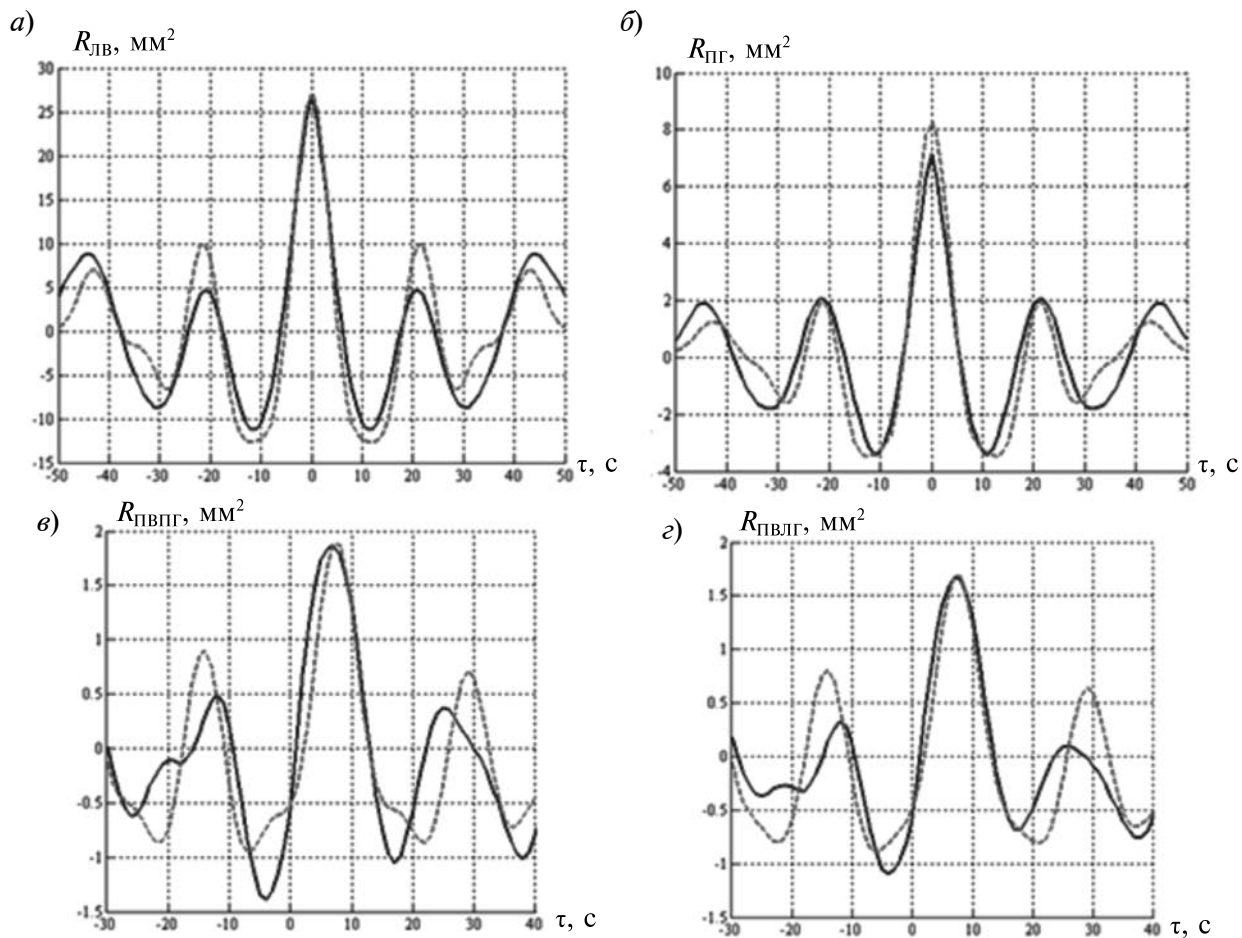


Рис. 5. Автокорреляционные функции неровностей пути: левого рельса вертикальная (а) и правого рельса горизонтальная (б); взаимокорреляционные функции между правой вертикальной и горизонтальной неровностью рельсов (е); правой вертикальной и левой горизонтальной неровностью рельсов (е): сгенерированные (—); по аналитическому выражению (---)

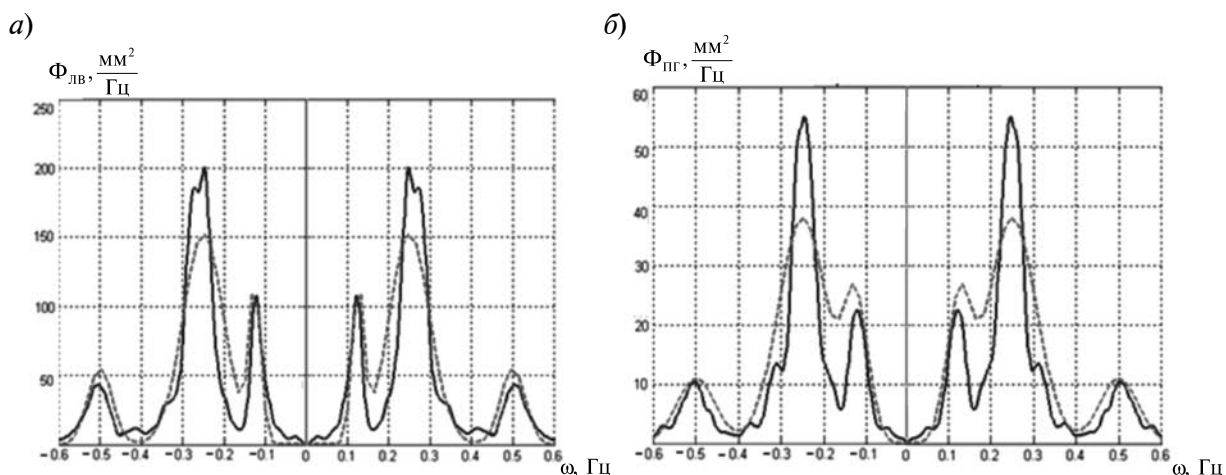


Рис. 6. Спектральные плотности неровностей пути левого рельса вертикальных (а) и правого рельса горизонтальных (б): сгенерированные (—); по аналитическому выражению (---)

Выполнив обратное z -преобразование для $W_{iu}(z)$ с помощью команды `iztrans`, перейдем к матрице импульсных характеристик:

$$\begin{aligned}
 k_{iust}\{n\Delta x\} &= S_{iust} \sum_k a_{kiust} \times \\
 &\times \left\{ \frac{\exp(\alpha_{kiust}^2 \Delta x^2) \cos[\beta_{kiust}(n\Delta x - x_{ciust})]}{\exp(\alpha_{kiust}^2 \Delta x^2)^{[(n+1)\Delta x - x_{ciust}]}} \right\} = \\
 &= S_{iust} \sum_k a_{kiust} \exp(\alpha_{kiust}^2 \Delta x^2)^{-[(n+1)\Delta x - x_{ciust}]} \times \\
 &\times \cos[\beta_{kiust}(n\Delta x - x_{ciust})]; \\
 &(n = 1, 2, \dots, N; \Delta x = vT).
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Сравнение графиков импульсных характеристик, построенных по этому выражению, и корреляционных функций по (6) со значениями параметров, приведенными в [3], свидетельствует о том, что эти про-

цессы достаточно близки. Отличие между ними состоит в том, что вначале затухание импульсных характеристик происходит быстрее, чем корреляционных функций. Затем при $n \geq 50$ это затухание замедляется. Здесь $\Delta t = 0,185$ с, как и в работе [3]. Для примера на рис. 3 приведено такое сравнение для автокорреляционной функции и импульсной характеристики горизонтальной неровности правого рельса и взаимной корреляционной функции и импульсной характеристики вертикальной неровности левого и горизонтальной неровности правого рельсов.

По найденным импульсным характеристикам с использованием интеграла свертки была выполнена генерация многомерного случайного процесса во временной области по схеме 2. Результаты генерации одной из

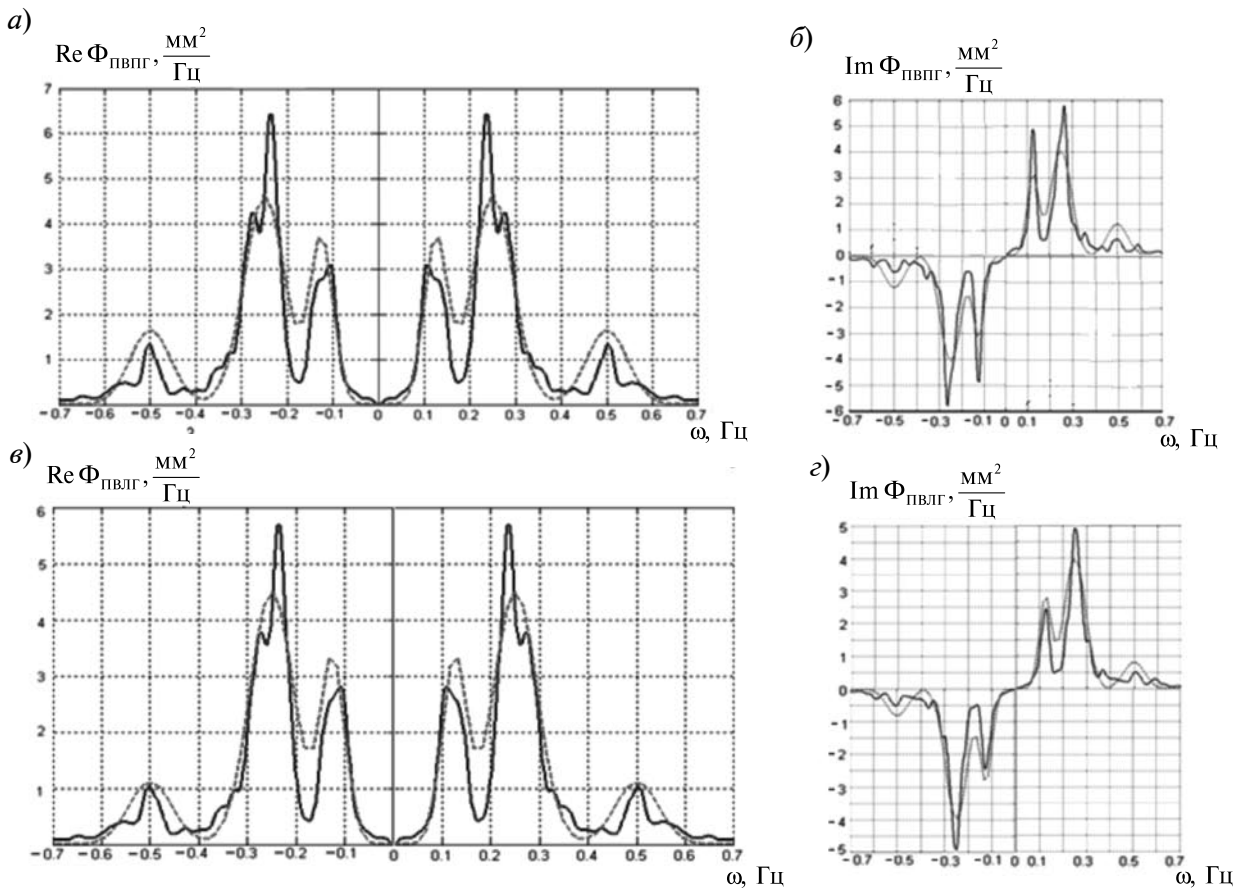


Рис. 7. Составляющие взаимной спектральной плотности между правой вертикальной и правой горизонтальной неровностями рельсов: a – вещественная; $б$ – мнимая и составляющие взаимной спектральной плотности между правой вертикальной и левой горизонтальной неровностями рельсов: $в$ – вещественная; $г$ – мнимая; сгенерированные (—); по аналитическому выражению (---)

совокупностей реализаций четырехмерного случайного процесса геометрических неровностей пути (рис. 4), выполненные по рассмотренному алгоритму, показывают, что сгенерированные случайные процессы «в среднем» близки к исходным.

Для более подробного сравнения выполним корреляционный и спектральный анализ сгенерированных случайных процессов по методике, изложенной в [3], и сравним их с графиками заданных корреляционных функций и спектральных плотностей реального рельсового пути, приведенных в [3].

Для примера на рис. 5 приведены некоторые графики для авто- и взаимокорреляционных функций, а на рис. 6 и 7 соответствующие им авто- и взаимоспектральные плотности. Эти графики, построенные по

сгенерированным реализациям, имеют удовлетворительную сходимость с заданными. Некоторое расхождение между ними объясняется особенностями функционирования генераторов белого шума, а также погрешностями спектрального анализа.

Таким образом, в работе предложен алгоритм генерирования многомерной геометрической неровности рельсового пути. Используя этот алгоритм можно генерировать такую неровность при различных скоростях движения с любой длиной реализации и шагом дискретизации. Это позволяет численно решать во временной области многомерные задачи динамики подвижного состава с нелинейными характеристиками рессорного подвешивания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матыаш И., Шильханек Я. Генератор случайных процессов с заданной матрицей спектральных плотностей // Автоматика и телемеханика. 1960. № 1.

2. Савоськин А.Н., Поляков А.И. Моделирование эквивалентных неровностей пути для

исследования колебаний подвижного состава // Соискатель. 2005. № 1.

3. Савоськин А.Н., Ромен Ю.С., Акишин А.А. Характеристики возмущений, вызывающих колебания рельсовых экипажей // Вестник ВНИИЖТа. 2013. № 12.

REFERENCES

1. Matyash I., Shilkhanek Ya. Generator sluchaynykh protsessov s zadannoy matritsey spektralnykh plotnostey [The random process with a predetermined matrix of spectral densities]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1960, No. 1. (rus)

2. Savoskin A.N., Polyakov A.I. Modelirovaniye ekvivalentnykh nerovnostey puti dlya issledovaniya

kolebaniy podvizhnogo sostava [Modeling the rough equivalent to the study of oscillations of the rolling stock]. *Soiskatel* [Applicant], 2005, No. 1. (rus)

3. Savoskin A.N., Roman Yu.S., Akishin A.A. Kharakteristiki vozmushcheniy, vyzyvayushchikh kolebaniya relsovykh ekipazhey [Features disturbances causing vibrations of railway vehicles], *Vestnik VNIIZhTa*, 2013, No. 12.

АКИШИН Александр Александрович – аспирант кафедры «Электропоезда и локомотивы» Московского государственного университета путей сообщения.

127994, Москва, ул Образцова, д. 9, стр. 9.

E-mail: elmechtrans@mail.ru

AKISHIN Alexandr A. *Moscow State University of Railway Engineering.*

127994, Obraztsova Str. 9 b.9, Moscow, Russia.

E-mail: elmechtrans@mail.ru

САВОСЬКИН Анатолий Николаевич – профессор кафедры «Электропоезда и локомотивы» Московского государственного университета путей сообщения, доктор технических наук.

127994, Москва, ул Образцова, д. 9, стр. 9.

E-mail: elmechtrans@mail.ru

SAVOSKIN Anatoly N. *Moscow State University of Railway Engineering.*

127994, Obraztsova Str. 9 b.9, Moscow, Russia.

E-mail: elmechtrans@mail.ru