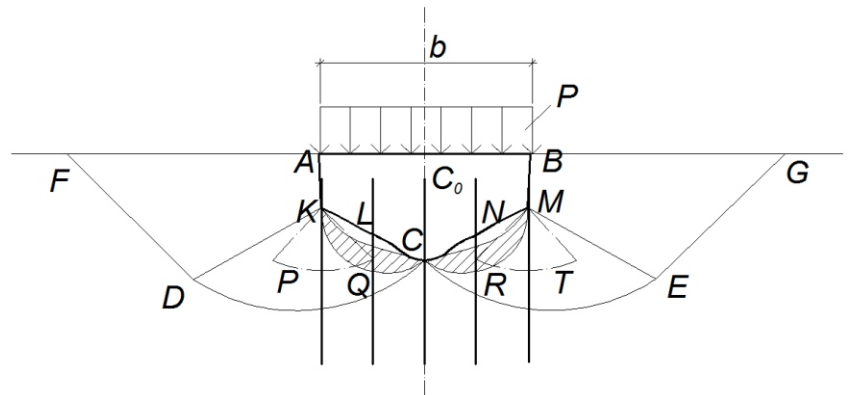
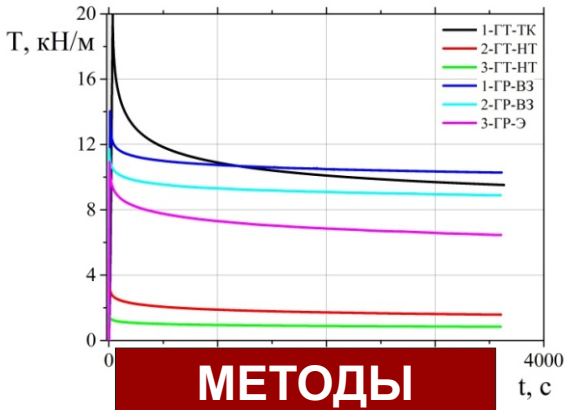




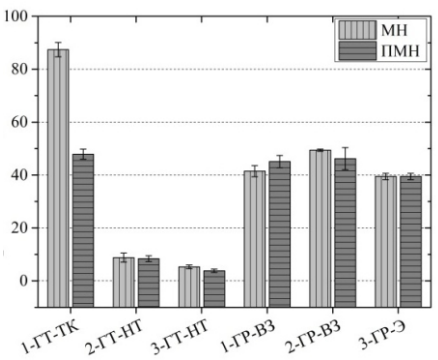
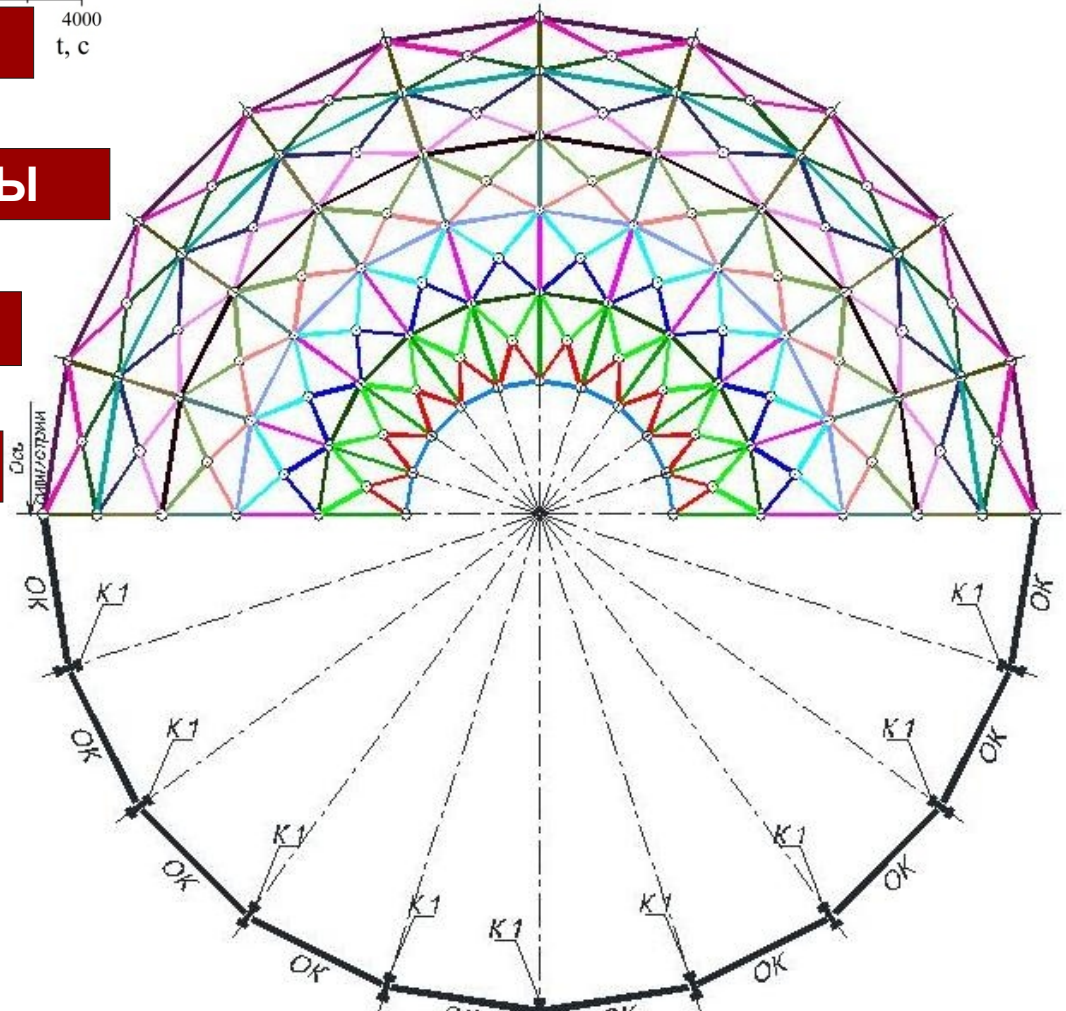
№4(56) май-июнь 2015



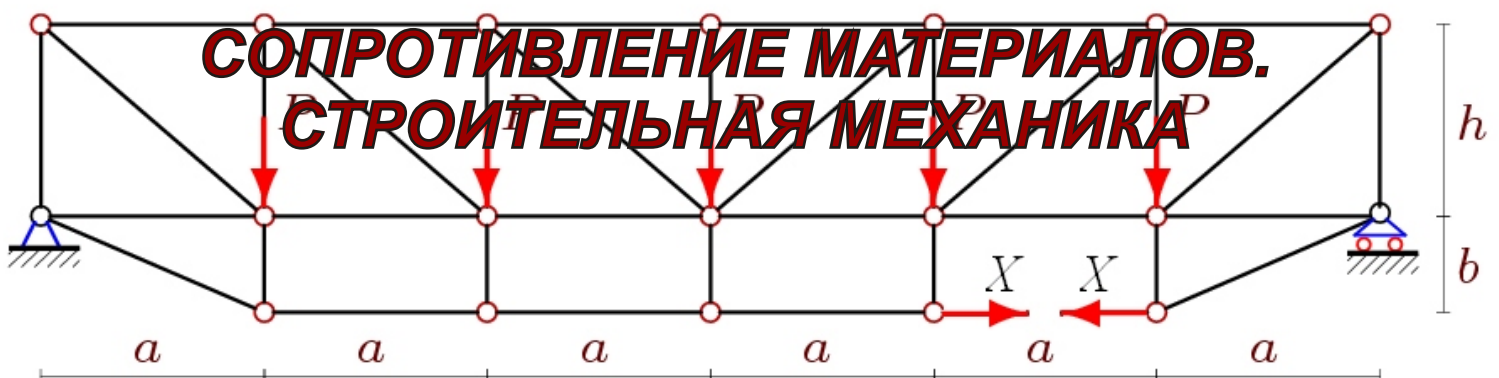
**МАТЕРИАЛЫ**

**РАСЧЕТЫ**

**АНАЛИЗ**



## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА





**Инженерно-строительный институт**  
**Центр дополнительных профессиональных программ**  
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,  
тел/факс: 552-94-60, [www.stroikursi.spbstu.ru](http://www.stroikursi.spbstu.ru),  
[stroikursi@mail.ru](mailto:stroikursi@mail.ru)

**Приглашает специалистов организаций, вступающих в СРО,  
на курсы повышения квалификации (72 часа)**

Код	Наименование программы	Виды работ*
<b>Курсы по строительству</b>		
<b>БС-01-04</b>	«Безопасность и качество выполнения общестроительных работ»	п.1,2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14
<b>БС-01</b>	«Безопасность и качество выполнения геодезических, подготовительных и земляных работ, устройства оснований и фундаментов»	1,2,3,5
<b>БС-02</b>	«Безопасность и качество возведения бетонных и железобетонных конструкций»	6,7
<b>БС-03</b>	«Безопасность и качество возведения металлических, каменных и деревянных конструкций»	9,10,11
<b>БС-04</b>	«Безопасность и качество выполнения фасадных работ, устройства кровель, защиты строительных конструкций, трубопроводов и оборудования»	12,13,14
<b>БС-05</b>	«Безопасность и качество устройства инженерных сетей и систем»	15,16,17,18,19
<b>БС-06</b>	«Безопасность и качество устройства электрических сетей и линий связи»	20,21
<b>БС-08</b>	«Безопасность и качество выполнения монтажных и пусконаладочных работ»	23,24
<b>БС-12</b>	«Безопасность и качество устройства мостов, эстакад и путепроводов»	29
<b>БС-13</b>	«Безопасность и качество выполнения гидротехнических, водолазных работ»	30
<b>БС-14</b>	«Безопасность и качество устройства промышленных печей и дымовых труб»	31
<b>БС-15</b>	«Осуществление строительного контроля»	32
<b>БС-16</b>	«Организация строительства, реконструкции и капитального ремонта. Выполнение функций технического заказчика и генерального подрядчика»	33
<b>Курсы по проектированию</b>		
<b>БП-01</b>	«Разработка схемы планировочной организации земельного участка, архитектурных решений, мероприятий по обеспечению доступа маломобильных групп населения»	1,2,11
<b>БП-02</b>	«Разработка конструктивных и объемно-планировочных решений зданий и сооружений»	3
<b>БП-03</b>	«Проектирование внутренних сетей инженерно-технического обеспечения»	4
<b>БП-04</b>	«Проектирование наружных сетей инженерно-технического обеспечения»	5
<b>БП-05</b>	«Разработка технологических решений при проектировании зданий и сооружений»	6
<b>БП-06</b>	«Разработка специальных разделов проектной документации»	7
<b>БП-07</b>	«Разработка проектов организации строительства»	8
<b>БП-08</b>	«Проектные решения по охране окружающей среды»	9
<b>БП-09</b>	«Проектные решения по обеспечению пожарной безопасности»	10
<b>БП-10</b>	«Обследование строительных конструкций и грунтов основания зданий и сооружений»	12
<b>БП-11</b>	«Организация проектных работ. Выполнение функций генерального проектировщика»	13
<b>Э-01</b>	«Проведение энергетических обследований с целью повышения энергетической эффективности и энергосбережения»	
<b>Курсы по инженерным изысканиям</b>		
<b>И-01</b>	«Инженерно-геодезические изыскания в строительстве»	1
<b>И-02</b>	«Инженерно-геологические изыскания в строительстве»	2,5
<b>И-03</b>	«Инженерно-гидрометеорологические изыскания в строительстве»	3
<b>И-04</b>	«Инженерно-экологические изыскания в строительстве»	4
<b>И-05</b>	«Организация работ по инженерным изысканиям»	7

\*(согласно приказам Минрегионразвития РФ N 624 от 30 декабря 2009 г.)

**По окончании курса слушателю выдается удостоверение о краткосрочном повышении  
квалификации установленного образца (72 ак. часа)**

Для регистрации на курс необходимо выслать заявку на участие, и копию диплома об образовании по телефону/факсу: 8(812) 552-94-60, 535-79-92, , e-mail: [stroikursi@mail.ru](mailto:stroikursi@mail.ru).

[Http://www.engstroy.spb.ru](http://www.engstroy.spb.ru) – полнотекстовая версия журнала в сети Интернет. Бесплатный доступ, обновление с каждым новым выпуском

**Инженерно-строительный журнал**

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

ISSN 2071-4726

Свидетельство о государственной регистрации: ПИ №ФС77-38070, выдано Роскомнадзором

Специализированный научный журнал. Выходит с 09.2008.

Включен в Перечень ведущих периодических изданий ВАК РФ

Периодичность: 8 раз в год

**Учредитель и издатель:**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

**Адрес редакции:**

195251, СПб, ул. Политехническая, д. 29, Гидрокорпус-2, ауд. 227А

**Главный редактор:**

Вера Михайловна Якубсон

**Научный редактор:**

Николай Иванович Ватин

**Редакционная коллегия:**

д.т.н., проф. В.В. Бабков;  
д.т.н., проф. М.И. Бальзанников;  
к.т.н., проф. А.И. Боровков;  
д.т.н., проф. Н.И. Ватин;  
PhD, professor M. Вельжкович;  
д.т.н., проф. А.Д. Гиргидов;  
д.т.н., проф. Э.К. Завадскас;  
д.т.н., проф. В.В. Лалин;  
д.т.н., проф. Б.Е. Мельников;  
д.т.н., проф. Р.Б. Орлович;  
Dr. Sc. Ing., professor Л. Пакрастиньш;  
Dr.-Ing. Habil., professor X. Пастернак;  
д.т.н., проф. А.В. Перельмутер;  
к.т.н. А.Н. Пономарев;  
д.ф.-м.н., проф. М.Х. Стрелец;  
д.т.н., проф. О.В. Тараканов;  
Dr.-Ing., professor Д. Унгерман.

Установочный тираж 1000 экз.

Подписано в печать 08.07.15.

Формат 60x84/8, усл. печ. л. 8.

Заказ №1544.

Отпечатано в типографии СПбПУ. СПб, ул. Политехническая, д. 29

**Содержание****МАТЕРИАЛЫ**

- Ватин Н.И., Барабанщиков Ю.Г., Комаринский М.В., Смирнов С.И. Модификация литой бетонной смеси воздухововлекающей добавкой 3
- Логинова И.И., Артамонова Д.А., Столяров О.Н., Мельников Б.Е. Влияние структуры на вязкоупругие свойства геосинтетических материалов 11

**РАСЧЕТЫ**

- Попов А.О. Расчет конечной осадки глинистых оснований, армированных вертикальными элементами 19
- Бондарев А.Б., Югов А.М. Оценка монтажных усилий в металлическом покрытии с учетом сборки 28
- Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения 38

**МЕТОДЫ**

- Уткин В.С., Соловьев С.А. Определение остаточной несущей способности железобетонных балок по критерию жесткости (прогиба) 45

**АНАЛИЗ**

- Лалин В.В., Зданчук Е.В., Кушова Д.А., Розин Л.А. Вариационные постановки нелинейных задач с независимыми вращательными степенями свободы 54

© ФГАОУ ВО СПбПУ, 2015

На обложке: иллюстрации авторов к статьям номера

**Контакты:**

Тел. +7(812)535-52-47 E-mail: [mce@ice.spbstu.ru](mailto:mce@ice.spbstu.ru)

Web: <http://www.engstroy.spb.ru>

doi: 10.5862/MCE.56.1

## Модификация литой бетонной смеси воздухововлекающей добавкой

*Д-р техн. наук, директор Инженерно-строительного института Н.И. Ватин;  
д-р техн. наук, профессор Ю.Г. Барабанщиков;  
канд. техн. наук, зам. заведующего кафедрой по учебной работе М.В. Комаринский;  
студент С.И. Смирнов,  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

**Аннотация.** Исследовалось совместное действие суперпластификатора на основе лигносульфоната нафталина (марки С-3) и воздухововлекающей поверхностно-активной добавки (марки ЛХД) на подвижность, связность и воздухововлечение бетонной смеси.

Воздухововлекающая поверхностно-активная добавка способствует воздухововлечению и снижению водо- и раствороотделения бетонной смеси. Установлено, что при введении такой добавки в бетонную смесь, содержащую суперпластификатор, подвижность бетонной смеси снижается, несмотря на то, что воздухововлекающая поверхностно-активная добавка сама по себе является пластификатором. Снижение подвижности от введения 0,1 % воздухововлекающей поверхностно-активной добавки составляет: по осадке конуса Абрамса – 5...6 %, по диаметру расплыва конуса – 18...22 %. В то же время эффект повышения связности бетонной смеси связан с воздухововлечением. Независимо от воздухововлекающей поверхностно-активной добавки суперпластификатор снижает водоотделение и не оказывает воздухововлекающего действия, а также практически не влияет на воздухововлечение, вызванное воздухововлекающей поверхностно-активной добавкой. С повышением содержания в бетонной смеси воздухововлекающей поверхностно-активной добавки независимо от дозировки суперпластификатора количество вовлеченного воздуха возрастает с 3 до 7 %, а водоотделение уменьшается почти до 0.

Таким образом, синергия (совместное действие) суперпластификатора и воздухововлекающей поверхностно-активной добавки, в частности из-за воздействия ее компонента в отношении пластификации бетонной смеси оказалась отрицательной, но положительный эффект этого компонента наблюдается в отношении связности бетонной смеси.

**Ключевые слова:** комплексная химическая добавка; бетонная смесь; суперпластификатор; воздухововлекающая добавка; удобоукладываемость; водоотделение; раствороотделение; воздухововлечение; добавки для бетона

### Введение

При применении комплексных химических добавок, включающих суперпластификатор, могут быть получены без увеличения расхода цемента нерасслаивающиеся литые бетонные смеси, приближающиеся по пластическим свойствам к самоуплотняющимся, но менее дорогие. Такие смеси (взамен стандартных виброуплотняемых малоподвижных смесей), укладываемые с применением средств бетононасосной технологии, в стесненных условиях, а также при бетонировании тонкостенных и густоармированных конструкций, в том числе с применением напорной технологии, позволяют значительно уменьшить затраты труда, повысить производительность и на этой основе получить экономический эффект при одновременном повышении качества строительства и улучшении условий труда [1].

Для регулирования свойств бетонной смеси и бетона наибольшее применение нашли химические добавки, как по отдельности, так и в различных сочетаниях, позволяющие получать высокоэффективные бетоны (high-performance concrete) [2] и достигать экономии средств [3]. Применение комплекса добавок позволяет регулировать сразу несколько параметров материала [4–5] либо подавлять побочные нежелательные эффекты, возникающие в некоторых случаях. Так, при использовании пластификаторов возможно повышенное воздухововлечение, что требует применения антивспенивателей [6–7]. Наоборот, при недостаточном содержании воздуха применяются воздухововлекающие добавки. Эти добавки повышают осадку конуса в результате снижения пластической вязкости, однако в ряде случаев наблюдается увеличение предела текучести [8–9]. Вовлечение воздуха в бетонную смесь приводит к некоторому снижению прочности. По данным работы [10] снижение прочности на сжатие происходит в среднем на 4 % на каждый 1 % содержания вовлеченного воздуха. В то же время из-за изменения характера

Ватин Н.И., Барабанщиков Ю.Г., Комаринский М.В., Смирнов С.И. Модификация литой бетонной смеси воздухововлекающей добавкой

пористости может возрасти морозостойкость бетона [11–12]. Воздухововлекающие добавки позволяют бороться с водоотделением в бетонной смеси, часто возникающим при ее разжижении суперпластификаторами [13–16].

Применение воздухововлекающих добавок совместно с суперпластификаторами является перспективным способом улучшения технологических свойств бетонной смеси, в частности ее удобоперекачиваемости бетононасосными установками, что особенно важно в случае бетонирования густоармированных и тонкостенных конструкций [17].

В исследованиях применялись следующие химические добавки.

Суперпластификатор на основе лигносульфоната нафталина (марки С-3) – смесь нейтрализованных едким натром полимерных соединений разной относительной молекулярной массы, получаемых при конденсации сульфокислот нафталина с формальдегидом и технических лигносульфонатов. Разработка российских специалистов. Является аналогом зарубежных суперпластификаторов типа «Майти 100» (Япония), сикамент, мельмент (Германия), не уступая им по качеству. Данная добавка в количестве 0,2...0,7 % от массы цемента позволяет получать литые самоуплотняющиеся, практически не требующие вибрации бетонные смеси, а при снижении расхода воды затворения – бетоны повышенной прочности при неизменной подвижности смеси. Можно использовать оба эти эффекта частично, т. е. получать смеси повышенной подвижности по сравнению с исходной и одновременно несколько увеличивать прочность бетона за счет снижения расхода воды.

Воздухововлекающая поверхностно-активная добавка (марки ЛХД) – нейтрализованная растворимая смола на основе побочного продукта лесохимической промышленности, разработанная в России [18–19]. Растворимую смолу, упаренную до плотности 1230...1270 кг/м<sup>3</sup>, нейтрализуют в реакторе 40 % водным раствором едкого натра до pH 10...12. В результате экзотермической реакции нейтрализации реакционная смесь разогревается. Ее температуру поддерживают в пределах 80...90 °С, изменяя скорость подачи щелочи. Затем добавляют свежеприготовленное известковое молоко (из расчета 2 % окиси кальция от смолы) и выдерживают горячую реакционную смесь при перемешивании в течение 1 ч. Готовый продукт содержит до 50 % воды.

Известны проблемы совместимости добавок с цементом и между собой при их комплексном использовании [20–22]. В работах [23–24] было показано, что добавка суперпластификатора марки С-3, в отличие от поликарбоксилатов, не обладает избирательным действием по отношению к различным цементам и обеспечивает стабильность характеристик бетонной смеси на цементе разных партий. Однако нельзя исключать отрицательное влияние на нее других добавок.

### *Цель работы*

Целью данной работы является исследование влияния воздухововлекающей поверхностно-активной добавки марки ЛХД на свойства литой бетонной смеси в присутствии суперпластификатора на основе лигносульфоната нафталина (марки С-3) (рис. 1).

### *Результаты испытаний*

Влияние воздухововлекающей поверхностно-активной добавки на характеристики бетонной смеси (подвижность, связность, воздухововлечение) исследовалось нами при трех расходах цемента ЦЕМ I 42,5Н производства ЗАО «Пикалевский цемент» (280, 340 и 400 кг/м<sup>3</sup>) и трех дозировках добавки суперпластификатора марки С-3: 0,4; 0,6 и 0,8 %. Добавки вводились в бетонную смесь совместно одновременно с водой затворения. Содержание добавок указано в процентах от массы цемента в расчете на сухое вещество добавки. Подвижность бетонной смеси характеризовалась осадкой нормального конуса и диаметром его расплыва. Водоотделение и раствороотделение определяли по стандартной методике [25], а воздухововлечение замерялось прибором С196 производства Matest и проверялось расчетным способом.

Результаты испытаний бетонной смеси представлены в таблице 1 и на рисунках 1–3.

а) С-3 = 0,4 %;  
ОК = 20 см; D = 45 см



б) С-3 = 0,8%;  
ОК = 24 см; D = 60 см



Рисунок 1. Влияние добавки суперпластификатора на основе лигносульфоната нафталина (марки С-3) на характер удобоукладываемости бетонной смеси с расходом цемента 400 кг/м<sup>3</sup>

Таблица 1. Свойства бетонных смесей, модифицированных комплексной добавкой марок С-3+ЛХД

N п/п	Марка и дозировка, %		Параметры смеси			Свойства смесей				
	С-3	ЛХД	Ц, кг/м <sup>3</sup>	В/Ц	$r = \frac{\Pi}{\Pi + \Gamma}$	ОК, см	D, см	Воздухововлечение, %	Водоотделение, л/м <sup>3</sup>	Растворотделение, %
1	0,4	-	400	0,47		20	45	2	5,8	-
2	0,4	0,05				19,5	41	4,2	-	-
3	0,4	0,1				19	35	6,5	-	-
4	0,6	-				22,5	56	2,3	4	5,8
5	0,6	0,05				-	-	-	2,4	2,8
6	0,6	0,1				-	-	-	0,6	1,2
7	0,8	-				24	60	2,6	3,5	-
8	0,8	0,05				23	57	4,2	2	2,8
9	0,8	0,1				22,5	50	6	0,2	1
10	0,4	-	340	0,56	0,4	18	39	2,4	-	-
11	0,4	0,05				18	35	-	-	-
12	0,4	0,1				17,5	32	6,5	-	-
13	0,8	-				22	53	3	-	-
14	0,8	0,05				21	47	-	-	-
15	0,8	0,1				20,5	42	7	-	-
16	0,4	-	280	0,68		16,5	35	2,6	7,6	-
17	0,4	0,05				16	29	-	-	-
18	0,4	0,1				15,5	26	6,7	-	-
19	0,6	-				18	40	2,9	7	-
20	0,6	0,05				-	-	-	4,5	-
21	0,6	0,1				-	-	7	2,4	-
22	0,8	-				19	44	3,2	6	-
23	0,8	0,05				18,5	39	5,4	4,2	-
24	0,8	0,1				18	37	7	2	-

а) С-3 = 0,8 %, ЛХД = 0,05 %;  
ОК = 23 см; D = 57 см



б) С-3 = 0,8 %, ЛХД = 0,1 %;  
ОК = 18,5 см; D = 39 см



в) С-3 = 0,8 %, ЛХД = 0,05 %;  
ОК = 22,5 см; D = 50 см



г) С-3 = 0,8 %, ЛХД = 0,1 %;  
ОК = 18 см; D = 37 см



**Рисунок 2. Влияние воздухововлекающей поверхностно-активной добавки (марки ЛХД) в комплексе с суперпластификатором на основе лигносульфоната нафталина (марки С-3) 0,8 % на характер пластификации бетонной смеси с расходом цемента 400 (а и б) и 280 (в и г) кг/м<sup>3</sup>**

На номограмме (рис. 3) в левой верхней четверти «а» показано влияние добавки суперпластификатора на основе лигносульфоната нафталина (марки С-3) в различной дозировке от 0 до 0,8 % на осадку конуса, а в четверти «в» – на расплыв конуса. В верхней правой четверти «б» номограммы в нижней части приведены кривые (1, 2 и 3) изменения ОК под действием воздухововлекающей поверхностно-активной добавки (марки ЛХД). Наклонные линии в верхней части четверти «б» показывают, как изменяется ОК при добавлении добавки марки ЛХД к добавке марки С-3 при дозировке последней 0,4 (кривые 1а, 2а и 3а) и 0,8 % (кривые 1б, 2б и 3б). Аналогичные графики в четверти «г» относятся к расплыву конуса (*D*).

Из номограммы (рис. 3) видно, что при испытании добавок по отдельности обе они оказали пластифицирующее действие на бетонную смесь с ОК = 4 см, но в разной степени. При этом эффективность обеих добавок возрастала с увеличением расхода цемента.

При расходе цемента 340 кг/м<sup>3</sup> и содержании добавки марки С-3 0,8 % ОК увеличилась с 4 до 22 см. Добавка марки ЛХД, введенная к той же исходной смеси в количестве 0,1 %, повысила ОК до 8,5 см. При введении добавки марки ЛХД совместно с добавкой марки С-3 подвижность бетонной смеси снижается. При этом способ оценки подвижности по осадке конуса оказался менее чувствительным к влиянию добавки марки ЛХД: осадка конуса снизилась незначительно – на 0,5...1,5 см, что составляет 5...6 %. Более чувствительным способом является измерение расплыва конуса. При введении 0,1 % добавки марки ЛХД диаметр расплыва конуса уменьшается в среднем на 18...22 %. Независимо от содержания синергия добавок марок С-3 и ЛХД в отношении пластификации бетонной смеси оказалась отрицательной.

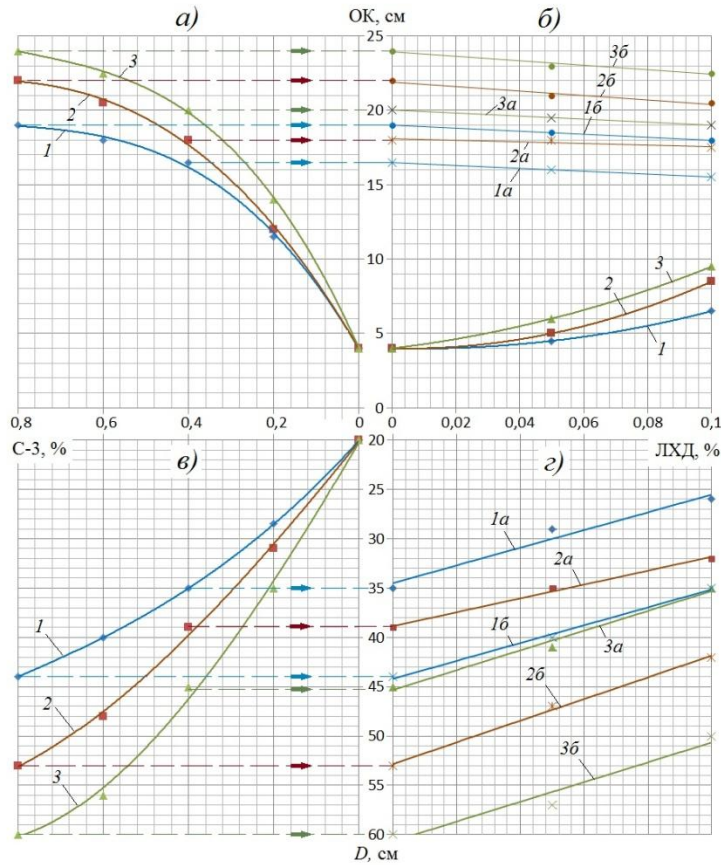


Рисунок 3. Влияние содержания воздухововлекающей поверхностно-активной добавки (марки ЛХД) в комплексе с суперпластификатором на основе лигносульфоната нафталина (марки С-3) на изменение осадки конуса (ОК) и диаметра расплыва конуса (D): 1,2,3 – бетонная смесь с расходами цемента, соответственно, 280, 340 и 400 кг/м<sup>3</sup>; а – 0,4 % С-3+ЛХД; б – 0,8 % С-3+ЛХД

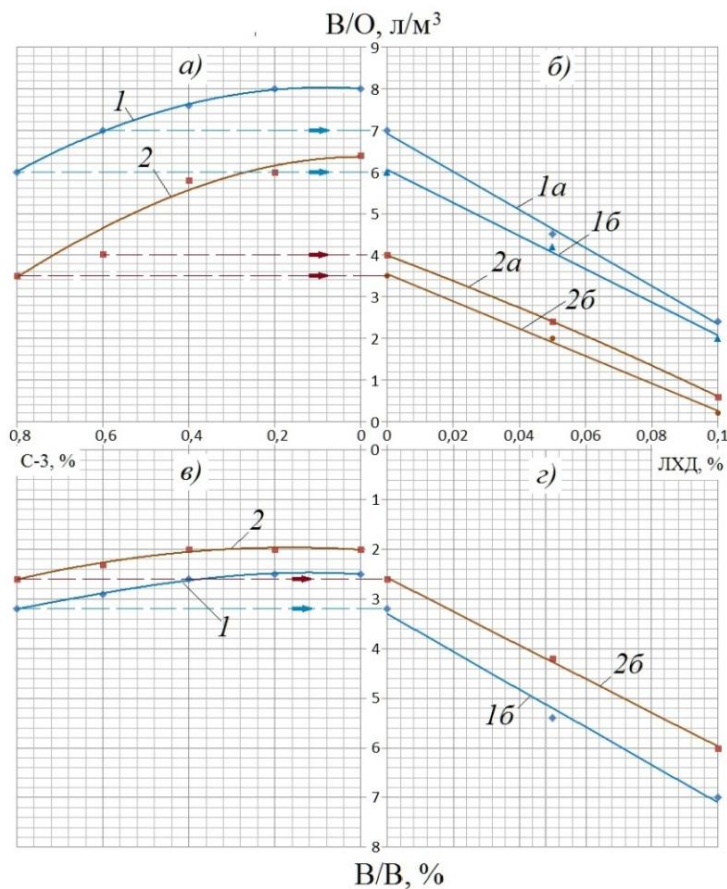


Рисунок 4. Влияние содержания воздухововлекающей поверхностно-активной добавки (марки ЛХД) в комплексе с суперпластификатором на основе лигносульфоната нафталина (марки С-3) на водоотделение и воздухововлечение в бетонных смесях: 1,2 – бетонная смесь с расходами цемента, соответственно, 280 и 400 кг/м<sup>3</sup>; а – 0,6 % С-3+ЛХД; б – 0,8 % С-3+ЛХД



В то же время добавка марки ЛХД способствовала значительному воздухововлечению и снижению водоотделения и раствоороотделения бетонной смеси (рис. 4).

При раздельном использовании добавка суперпластификатора на основе лигносульфоната нафталина (марки С-3) заметно снижает водоотделение, но очень незначительно влияет на воздухововлечение. Эти эффекты заметно усиливаются при добавлении воздухововлекающей поверхностно-активной добавки (марки ЛХД). Как видно из рисунков 4 и 5, с повышением содержания в бетонной смеси добавки марки ЛХД независимо от дозировки добавки марки С-3 количество вовлеченного воздуха возрастает с 3 до 7 %, а водоотделение уменьшается почти до 0. Суперпластификатор на основе лигносульфоната нафталина (марки С-3) практически не влияет на воздухововлечение, вызванное воздухововлекающей поверхностно-активной добавки (марки ЛХД), но способствует снижению водоотделения. Таким образом, синергетический эффект наблюдается в отношении повышения связности бетонной смеси.

Результаты испытаний на раствоороотделение высокоподвижных бетонных смесей, склонных к расслоению, подтвердили положительное влияние воздухововлекающей поверхностно-активной добавки (марки ЛХД) на их связность. При введении в бетонную смесь, содержащую 0,6 % добавки марки С-3, добавки марки ЛХД в количестве 0,1 % раствоороотделение снизилось с 5,8 до 1,2 %. Эффект повышения связности бетонной смеси связан с воздухововлечением.

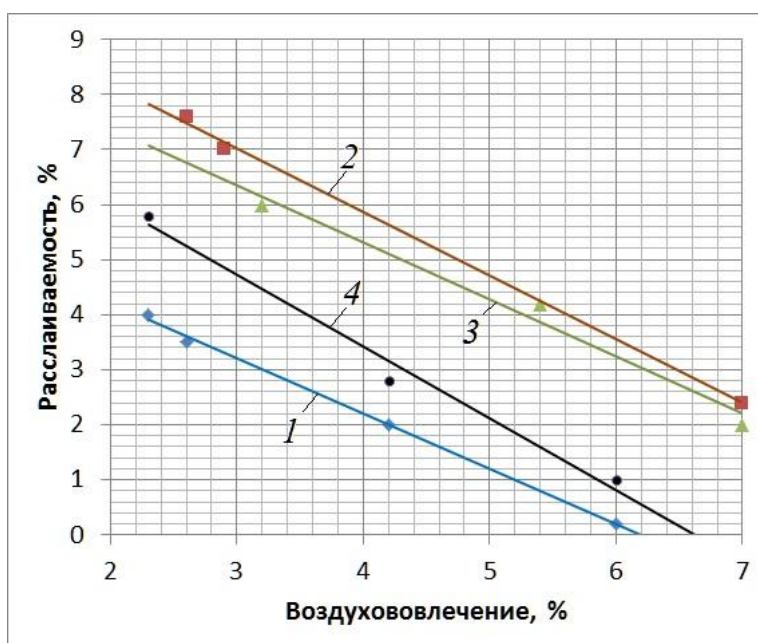


Рисунок 5. Зависимость водоотделения (1–3) и раствоороотделения (4) бетонной смеси (марка С-3 – 0,6...0,8 %; марка ЛХД – 0...0,1 %) от количества вовлеченного воздуха: 1 и 4 – Ц = 400; 2 и 3 – Ц = 280 кг/м<sup>3</sup>

### Заключение

Исследовано совместное действие пластифицирующих добавок – суперпластификатора на основе лигносульфоната нафталина (марки С-3) и воздухововлекающей поверхностно-активной добавки (марки ЛХД) – на подвижность, связность и воздухововлечение бетонной смеси. Установлено, что при введении добавки марки ЛХД совместно с суперпластификатором марки С-3 подвижность бетонной смеси снижается, в то время как добавка марки ЛХД сама по себе является пластификатором. Снижение подвижности от введения 0,1 % добавки марки ЛХД составляет: по осадке конуса Абрамса – 5...6 %, по расплыву конуса – 18...22 %.

При этом добавка марки ЛХД способствовала значительному воздухововлечению и снижению водоотделения и растворотделения бетонной смеси. Эффект повышения связности бетонной смеси связан с воздухововлечением. При раздельном использовании добавка марки С-3 снижает водоотделение, но не оказывает воздухововлекающего действия. Она также практически не влияет на воздухововлечение, вызванное добавкой марки ЛХД, но способствует снижению водоотделения. С повышением содержания в бетонной смеси добавки марки ЛХД независимо от дозировки добавки марки С-3 количество вовлеченного воздуха возрастает с 3 до 7 %, а водоотделение уменьшается почти до 0. Таким образом, синергия добавок марок С-3 и ЛХД в отношении пластификации бетонной смеси оказалась отрицательной, но положительный эффект наблюдается в отношении связности бетонной смеси.

### Литература

1. Комаринский М.В. Производительность поршневого бетононасоса // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2013. № 6 (11). С. 43–49.
2. Meng F. Study on effects of admixture and shrinkage models on high-performance concrete // *Advanced Materials Research*. 2011. Vol. 168-170. Pp. 1073–1076.
3. Beresford D. Cost savings achieved using designer admixtures // *Concrete (London)*. 2011. No. 45(8). Pp. 33–34.
4. Wang X.-Y. Properties prediction of ultra high performance concrete using blended cement hydration model // *Construction and Building Materials*. 2014. No. 64. Pp. 1–10.
5. Łażniewska-Piekarczyk B., Szwabowski J. The influence of the type of anti-foaming admixture and superplasticizer on the properties of self-compacting mortar and concrete // *Journal of Civil Engineering and Management*. 2012. Vol. 18, Issue 3. Pp. 408–415.
6. Golaszewski J., Szwabowski J., Soltysik P. Influence of air entraining agents on workability of fresh high performance concrete // *Proceedings of the International Conference on Admixtures - Enhancing Concrete Performance*. 2005. Pp. 171–182.
7. Chia K.-S., Zhang M.-H. Workability of air-entrained lightweight concrete from rheology perspective // *Magazine of Concrete Research*. 2007., No. 59(5). Pp. 367–375.
8. Struble L.J., Jiang Q. Effects of air entrainment on rheology // *ACI Materials Journal*. 2004. No. 101(6). Pp. 448–456.
9. Rajamane N.P., Annie Peter J., Neelamegam M., Dattatreya J.K., Gopalakrishnan S. Effect of air-entraining agent on cement composites containing mineral admixtures // *Indian Concrete Journal*. 2002. No. 76(9). Pp. 581–585.
10. Lomboy G., Wang K. Effects of strength, permeability, and air void parameters on freezing-thawing resistance of concrete with and without air entrainment // *ASTM Special Technical Publication*. 2010, 1511 STP. Pp. 135–154.
11. Zhang Y., Cai J.-D., Xu S.-L., Yue C.-X. Experimental investigation of effect of admixture on concrete strength and frost-resistance // *International Conference on Electric Technology and Civil Engineering, ICETCE 2011 – Proceedings*. 2011. Article 5774370. Pp. 2180–2183.
12. Hogberg E. Air entraining admixtures (Luftporbildande betongtillsatsmedel) // *Cem Betong*. 1971. 46(4). Pp. 485–497.
13. Barabanshchikov Yu.G., Komarinskiy M.V. Effect of Air-Entraining Agent LHD on the Technological Properties of Concrete Mix Containing Superplasticizer S-3 // *Innovative Technologies in Development of Construction Industry*. 2015. Vols. 725-726. Pp. 419–424. doi:10.4028/www.scientific.net/AMR.725-726.419
14. Korsun V., Korsun A. The Influence of Precompression on Strength and Strain Properties of Concrete under the Effect of Elevated Temperatures // *Applied Mechanics and Materials*. 2015. Vol. 725–726. Pp. 469–474.
15. Korsun V., Vatin N., Korsun A., Nemova D. Heterogeneous shrinkage of high-strength concrete by the volume of large-size structural elements // *Applied Mechanics and Materials*. 2015. Vol. 723. Pp. 445–450.
16. Корсун В.И., Корсун А.В. Влияние масштабного фактора и повышенных температур на прочность и деформации высокопрочного модифицированного бетона // *Вестник МГСУ*. 2014. № 3. С. 179–188.

17. Комаринский М.В., Червова Н.А. Транспорт бетонной смеси при строительстве уникальных зданий и сооружений // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 1 (28). С. 6–31.
18. ГОСТ 24211-2008. Добавки для бетонов. Технические требования. М.: Изд-во стандартов, 2008. 34 с.
19. ТУ13-4000177-128. Поверхностно-активная добавка ЛХД, 1984.
20. Bahurudeen A., Marckson A.V., Kishore A., Santhanam M. Development of sugarcane bagasse ash based Portland pozzolana cement and evaluation of compatibility with superplasticizers // Construction and Building Materials. 2014. Vol. 68. Pp. 465–475.
21. Sosa M.E., Villagrán-Zaccardi Y.A., Zega C.J., Peralta J.P. Fresh properties of mortar made with pozzolanic cement and water reducers // Materials Research Society Symposium Proceedings. 2012. 1488. Pp. 34–40.
22. Ватин Н.И., Петросов Д.В., Калачев А.И., Лахтинен П. Применение зол и золошлаковых отходов в строительстве // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 4. С. 16–21.
23. Varabanshchikov Yu.G., Komarinskiy M.V. Influence of superplasticizer S-3 on the technological properties of concrete mixtures // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 941–944. Pp. 780–785. doi:10.4028/www.scientific.net/AMR.941-944.780.
24. Барабанщиков Ю.Г., Комаринский М.В. Суперпластификатор С-3 и его влияние на технологические свойства бетонных смесей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2014. №6(21). С. 58–69.
25. ГОСТ 10181-2014 Смеси бетонные. Методы испытаний. М.: Изд-во стандартов, 2015. 40 с.

*Николай Иванович Ватин, Санкт-Петербург, Россия  
Тел. моб.: +7(921)9643762; эл. почта: vatin@mail.ru*

*Юрий Германович Барабанщиков, Санкт-Петербург, Россия  
Тел. раб.: +7(812)5341286; эл. почта: ugb@mail.ru*

*Михаил Викторович Комаринский, Санкт-Петербург, Россия  
Тел. раб.: +7(812)297-59-49; эл. почта: komarin@cef.spbstu.ru*

*Станислав Игоревич Смирнов, Санкт-Петербург, Россия  
Тел. моб.: +7(981)7317162; эл. почта: smirnovsta@mail.ru*

© Ватин Н.И., Барабанщиков Ю.Г., Комаринский М.В., Смирнов С.И., 2015

doi: 10.5862/MCE.56.2

## Влияние структуры на вязкоупругие свойства геосинтетических материалов

*Студент И.И. Логинова;  
студент Д.А. Артамонова;  
канд. техн. наук, доцент О.Н. Столяров;  
д-р техн. наук, заведующий кафедрой Б.Е. Мельников,  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

**Аннотация.** В данной работе исследованы вязкоупругие свойства геосинтетических материалов. Проведены исследования на шести образцах геотекстильных полотен и георешеток различной структуры, включающих тканое геополотно, нетканое геополотно, основовязаную георешетку и экструдированную георешетку.

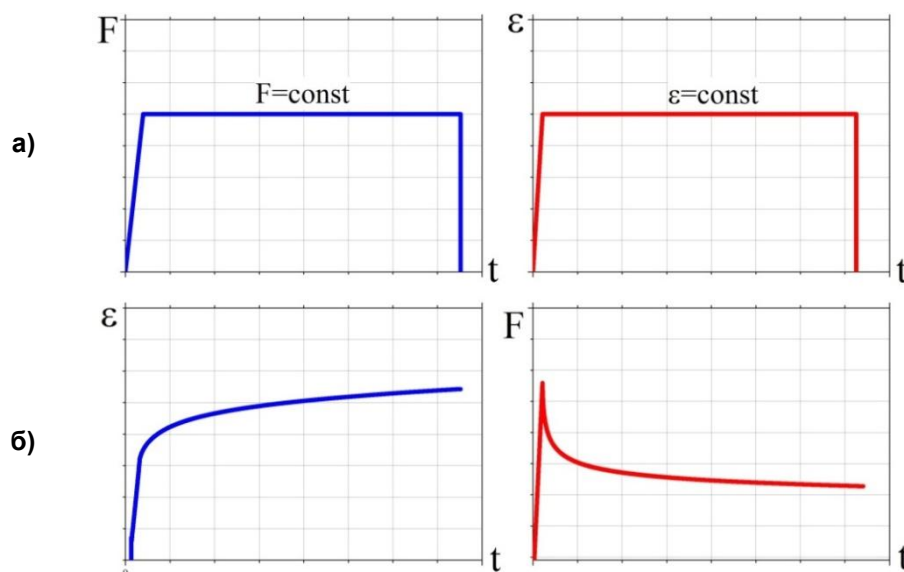
Определены основные показатели механических свойств геосинтетических материалов, такие как прочность при растяжении, удлинение при максимальной нагрузке и нагрузка при растяжении при определенном удлинении. Проведены испытания в режимах ползучести и релаксации напряжения (усилия).

Показано, что геосинтетические материалы обладают существенным различием в вязкоупругих свойствах в зависимости от их структуры. Полученные зависимости могут использоваться при выборе геосинтетического материала.

**Ключевые слова:** геотекстиль; георешетки; тканые полотна; нетканые полотна; механические свойства; ползучесть; релаксация усилия

### Введение

В настоящее время геосинтетические материалы, такие как геотекстиль, георешетки, геосетки и др., находят новые применения, и не только в дорожной отрасли [1–8]. Подавляющее большинство геосинтетических материалов изготавливается из синтетических полимеров, таких как полиэфир, полиамид и полипропилен, обладающих ярко выраженными вязкоупругими свойствами. Наряду с традиционными конструкционными материалами, такими как сталь, бетон и другие, они обладают высокими прочностными характеристиками. Однако, помимо положительных конструкционных свойств, геосинтетические материалы проявляют и вязкоупругие свойства. Последние создают проблему при оценке долговременной прочности конструкции из-за непостоянства усилия и деформации в материале с течением времени. Вязкоупругие свойства проявляются в зоне неразрушающих механических воздействий и влияют на эксплуатационные свойства геосинтетических материалов.



**Рисунок 1. Режимы испытаний: а) ползучесть; б) релаксация напряжения (усилия)**

По механическому воздействию вязкоупругие свойства можно условно разделить на два вида: с постоянно заданным усилием (ползучесть) и с постоянно заданной деформацией (релаксация напряжения). Ползучесть может быть определена как деформация во времени под действием приложенной нагрузки. Обычно для измерения ползучести используют исследование при постоянной нагрузке: на протяжении всего эксперимента поддерживается постоянная нагрузка, при этом определяют происходящие в образце изменения деформации [9, 10]. Схематично данный процесс проиллюстрирован на рисунке 1а. На начальной стадии после приложения нагрузки развивается упругая деформация. Далее с течением времени развивается вязкоупругая деформация. Испытания на релаксацию напряжения (усилия) проиллюстрированы на рисунке 1б. В данном испытании имитируется поведение нагруженного материала при определенной заданной деформации. С течением времени внутренние усилия в образце уменьшаются.

### Обзор литературы

Геосинтетические материалы характеризуются одновременным проявлением упругих и вязкоупругих свойств, что вносит определенные трудности при проектировании и эксплуатации конструкций с их применением [11]. Исследование свойств геосинтетических материалов, которые проявляются с течением времени, является не менее важной задачей, чем кратковременные испытания. Вязкоупругие свойства также являются одним из важных критериев оценки долговременной прочности геосинтетических материалов, особенно используемых в функции армирования [12, 13]. Наибольший интерес при оценке долговременной конструкционной прочности геосинтетических материалов представляют собой процессы ползучести, так как в реальных эксплуатационных условиях геосинтетический материал, как правило, подвергается действию постоянной нагрузки [14, 15]. Хотя в определенных случаях геосинтетические материалы могут испытывать процессы падения внутренних напряжений из-за фиксации их размеров, например, при анкеровании. Для определения релаксации напряжения (усилия) на протяжении всего эксперимента поддерживается постоянная деформация, при которой и определяют происходящие в образце изменения [16].

Исследование ползучести основывается на измерении удлинения образца как функции от внешней растягивающей силы [17–20]. Испытания могут проводиться при различных уровнях задаваемой нагрузки. Как правило, уровни нагрузки выбираются кратными максимальной прочности при растяжении геосинтетического материала из определенного диапазона, например, в 5, 10, 20, 30, 40, 50 и 60 % от максимальной прочности при растяжении [21].

На практике существует большое разнообразие методов определения ползучести геосинтетических материалов.

Наиболее простым методом являются прямые измерения деформации образца в течение длительного времени. При этом продолжительность измерений, как правило, составляет тысячи и десятки тысяч часов [1, 2]. Например, в работе [14] эксперимент на ползучесть длился на протяжении 6 лет. Данные, полученные из таких экспериментов, могут быть использованы для оценки долговременной накапливаемой деформации геосинтетического материала, которая не должна превышать величину предельно допустимой деформации [13, 14]. Основным недостатком таких измерений является их продолжительность во времени, что требует наличия специального оборудования, позволяющего проводить испытания на большом количестве образцов. Применение подобных систем существенно увеличивает стоимость проведения испытаний и не всегда гарантирует достижение требуемого результата.

Наряду с прямыми измерениями деформации ползучести в последнее время приобретают популярность ускоренные методы испытаний, которые позволяют активировать деформационные процессы во времени за счет испытания при повышенных температурах [22–27]. Измерения ползучести, проводимые с применением таких методов, позволяют сократить время испытаний на несколько порядков и получить весьма удовлетворительно спрогнозированные кривые за счет различных методологий обработки. Применение таких методов дает существенный выигрыш в экспериментальных исследованиях, однако требует использования дорогостоящего специализированного оборудования – термокамер, что может быть не всегда экономически оправдано. Кроме того, методики обработки получаемых кривых сильно привязаны к условиям испытаний и типу исследуемого геосинтетического материала. Так, например, варьирование температурного шага на 1...2 °С приводит к существенным различиям в форме получаемых кривых ползучести [28].

Рассмотренные методы определения ползучести являются достаточно противоречивыми. С одной стороны, прямое измерение ползучести обладает неоспоримым преимуществом при определении долговременной прочности, поскольку исключает влияние различных факторов, например, температуры. С другой стороны, подобные испытания являются продолжительными и не всегда могут укладываться в период проектных работ. Кроме того, порой большая часть предполагаемых к использованию в проекте материалов может отбраковываться на основе экспериментальных данных. В то же самое время применение ускоренных испытаний не всегда гарантирует адекватный результат. На наш взгляд, одним из существенных недостатков при определении вязкоупругих свойств геосинтетических материалов является отсутствие экспресс-метода, который позволил бы за короткий промежуток времени выявить тенденции в характере ползучести или релаксации усилия геосинтетического материала. Подобная информация может быть использована для предварительного выбора геосинтетического материала и составления оптимального плана экспериментальных работ по определению вязкоупругих свойств. Последнее может позволить существенно сократить затраты на испытания.

### *Постановка задачи и описание исследования*

Задача данной работы состояла в исследовании вязкоупругих свойств геосинтетических материалов различной структуры при кратковременных измерениях в режимах ползучести и релаксации усилия. Основные факторы, влияющие на вязкоупругие свойства геосинтетических материалов, это структура материала, тип переплетения нитей в полотне, используемое сырье и др. Были рассмотрены два основных вида геосинтетических материалов: геополотна и георешетки. Характеристики исследуемых образцов приведены в таблице 1. Образцы геополотен включали тканые и нетканые полотна. Тканое полотно (1-ГТ-ТК) представляет собой армирующую структуру, состоящую из двух взаимно перпендикулярных систем ориентированных полипропиленовых нитей. Исследуемые образцы нетканых полотен включали два основных вида: иглопробивной (2-ГТ-НТ) и термоскрепленный (3-ГТ-НТ). В отличие от иглопробивного геотекстиля термоскрепленный обладает меньшей поверхностной плотностью, толщиной и более высокими механическими характеристиками. Образцы георешеток включали в себя основовязанные решетки (1-ГР-ВЗ) и (2-ГР-ВЗ), изготовленные из полиэфирных и стеклянных нитей с подложкой из нетканого материала и битумным покрытием соответственно. Первый тип георешетки используется при армировании дорожных одежд, а второй – исключительно для армирования слоев асфальтобетона. В дополнение была исследована экструдированная двухосно ориентированная георешетка из полипропилена (3-ГР-Э). Выбранные для исследований образцы геосинтетических материалов охватывают достаточно широкий диапазон механических свойств, а также характеристик структуры и исходного сырья материалов.

**Таблица 1. Исследуемые образцы**

№	Образец	Структура	Сырье	Поверхностная плотность, г/м <sup>2</sup>
1	1-ГТ-ТК	Геополотно тканое	ПП	400
2	2-ГТ-НТ	Геополотно нетканое иглопробивное	ПП	160
3	3-ГТ-НТ	Геополотно нетканое термоскрепленное	ПП	90
4	1-ГР-ВЗ	Георешетка вязаная с подложкой из нетканого материала, размер ячейки 35×35	ПЭТФ	285
5	2-ГР-ВЗ	Георешетка вязаная с битумным покрытием, размер ячейки 40×40	Стекло-волокно	300
6	3-ГР-Э	Георешетка экструдированная, размер ячейки 40×40	ПП	530

Для всех исследуемых образцов геосинтетических материалов были определены основные механические характеристики при растяжении, такие как прочность при растяжении, относительное удлинение при максимальной нагрузке и прочность при удлинении в 2 %. Испытания проводились на универсальном измерительном комплексе Instron 5965 при зажимной длине образца 100 мм и скорости деформирования 100 мм/мин. Образцы исследовались в двух направлениях растяжения: продольном, или машинном, направлении выработки и перпендикулярном направлении. Поскольку геосинтетические материалы представляют собой достаточно сложные структуры, не являющиеся сплошными средами, то за характеристику прочности принимается не напряжение, а удельная нагрузка на единицу ширины материала, определяемая по следующей формуле:

$$T_{\max} = F_{\max} \cdot c, \quad (1)$$

где  $F_{\max}$  – максимальная нагрузка на образец (кН);  $c$  – коэффициент ширины образца.

Для тканых и нетканых полотен  $c$  определяется по выражению (2), а для георешеток – по (3):

$$c = \frac{1}{B}, \quad (2)$$

где  $B$  – погонная ширина образца (м);

$$c = \frac{N_m}{N_s}, \quad (3)$$

где  $N_m$  – минимальное количество элементов в 1 м ширины георешетки;  $N_s$  – количество элементов структуры в испытываемом образце.

Как было показано выше, испытания на ползучесть и релаксацию напряжения обычно проводят при нескольких уровнях задаваемой нагрузки, рассчитываемой в процентах от максимальной прочности при растяжении образца [25]. В данной работе проведены испытания образцов на ползучесть и релаксацию напряжения при одном уровне нагрузки в 30 % от  $T_{\max}$ , что обеспечивает сопоставимые результаты для материалов различной структуры. При данном уровне нагрузки вязкоупругие свойства материалов проявляются достаточно отчетливо. За расчетное время испытаний было выбрано время  $t = 3600$  с.

### Результаты исследований

Результаты испытаний образцов геосинтетических материалов на растяжение до разрыва представлены на рисунке 2. На рисунках 2а и 2б приведены данные по прочности при растяжении и относительному удлинению при максимальной нагрузке соответственно. Для оценки жесткости образцов на начальной стадии деформирования была использована характеристика – нагрузка при определенном удлинении, которая наряду с секущей жесткостью традиционно применяется для геосинтетических материалов [1]. За уровень деформации было принято значение в 2 %.

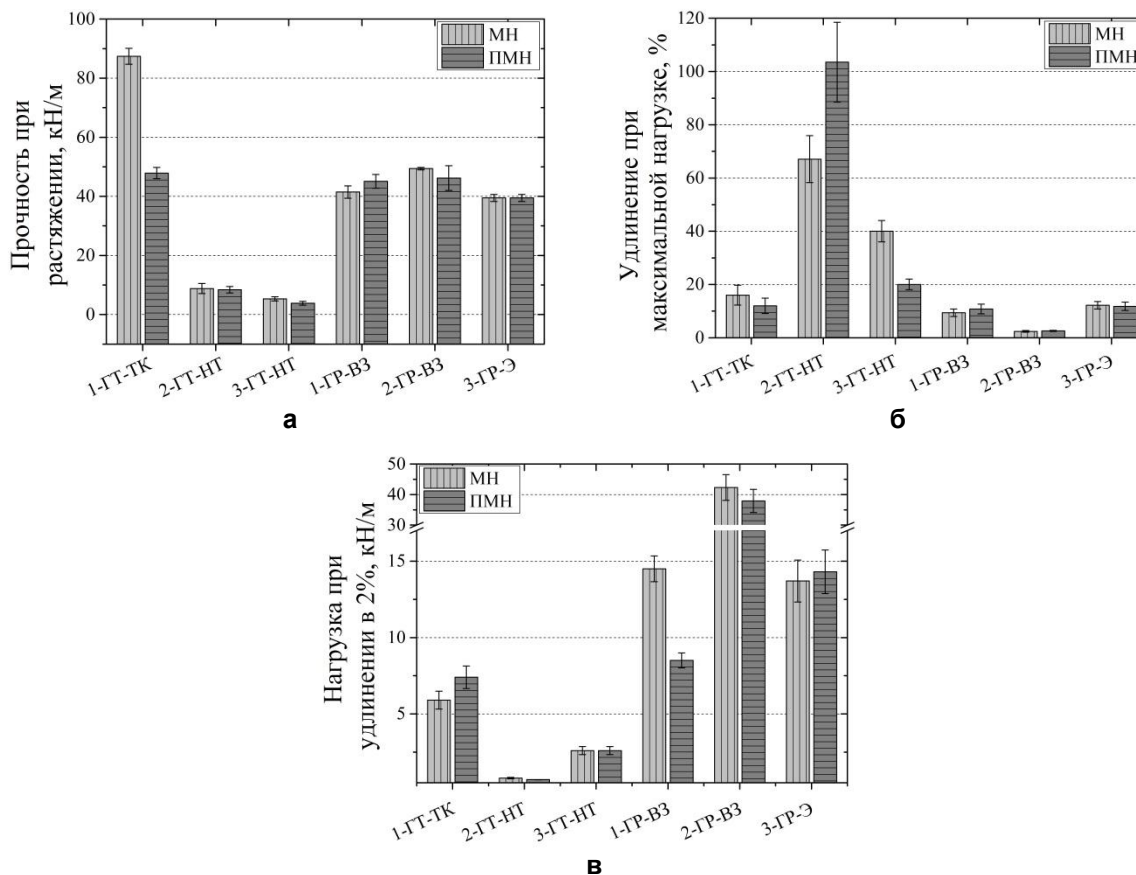


Рисунок 2. Результаты механических испытаний образцов на растяжение

Из представленных данных видно, что почти все исследуемые структуры геосинтетических материалов являются практически изотропными по прочности, за исключением образца 1-ГТ-ТК. Последний образец обладает наибольшей прочностью в продольном направлении. Образцы нетканых полотен обладают наиболее высокими удлинениями. При этом образец термоскрепленного полотна (3-ГТ-НТ) обладает схожей прочностью при растяжении с иглопробивным полотном (2-ГТ-НТ) при меньшей поверхностной плотности. Также следует отметить, что наименьшим удлинением и наибольшей жесткостью обладает образец стекловолоконной решетки (2-ГР-ВЗ). Как видно из полученных результатов, исследуемые геосинтетические материалы обладают широким диапазоном механических характеристик от податливых до весьма жестких.

Кривые ползучести и релаксации напряжения при уровне нагружения в 30 % от  $T_{max}$  для всех исследуемых образцов представлены на рисунках 3а и 3б соответственно. Из полученных кривых видно, что все без исключения материалы в той или иной мере проявляют вязкоупругие свойства. Наибольшую ползучесть демонстрируют образцы нетканых полотен (2-ГТ-НТ и 3-ГТ-НТ), что обусловлено их достаточно высокой податливостью. В то же самое время наиболее жесткий образец георешетки из стекловолокна (2-ГР-ВЗ) практически не проявлял изменения деформации во времени. Ее незначительное увеличение может быть вызвано лишь адгезией битумного покрытия и стекловолокна. Поведение образцов при испытаниях на релаксацию напряжения демонстрирует схожую картину.

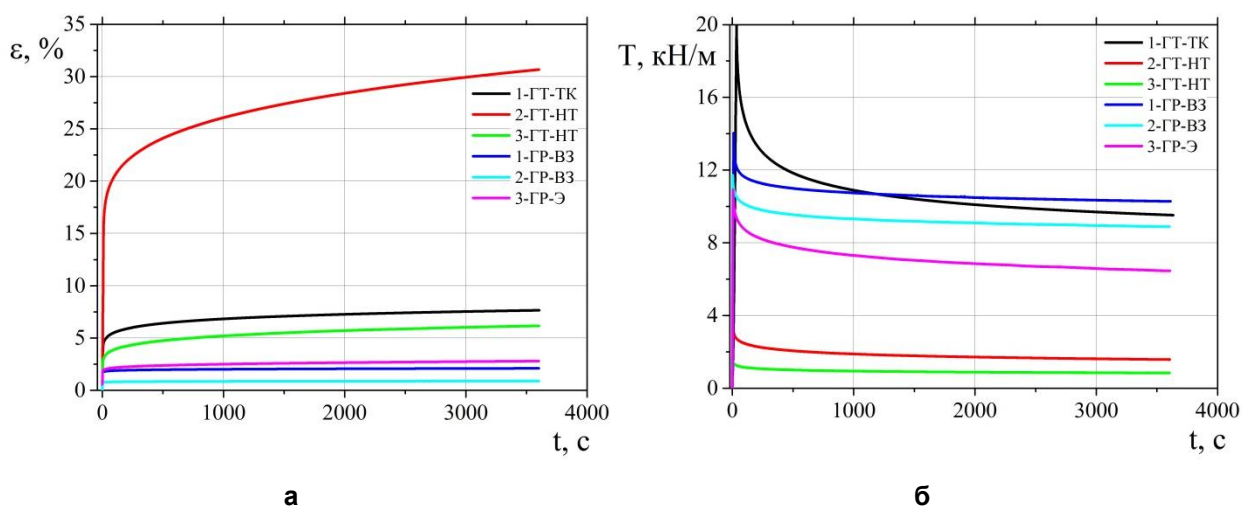


Рисунок 3. Испытания на ползучесть (а) и релаксацию напряжения (б)

Для того чтобы оценить влияние структуры на вязкоупругие свойства геосинтетических материалов, были проанализированы две характеристики для процессов ползучести и релаксации напряжения. Процесс ползучести характеризовался скоростью ползучести ( $c^{-1}$ ), т. е. инкрементом деформации по времени, и определялся по формуле:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}, \quad (4)$$

где  $\Delta\varepsilon$  – изменение деформации;  $\Delta t$  – изменение времени (с).

Чтобы охарактеризовать поведение образцов при релаксации, была рассчитана доля остаточной нагрузки в образце по формуле:

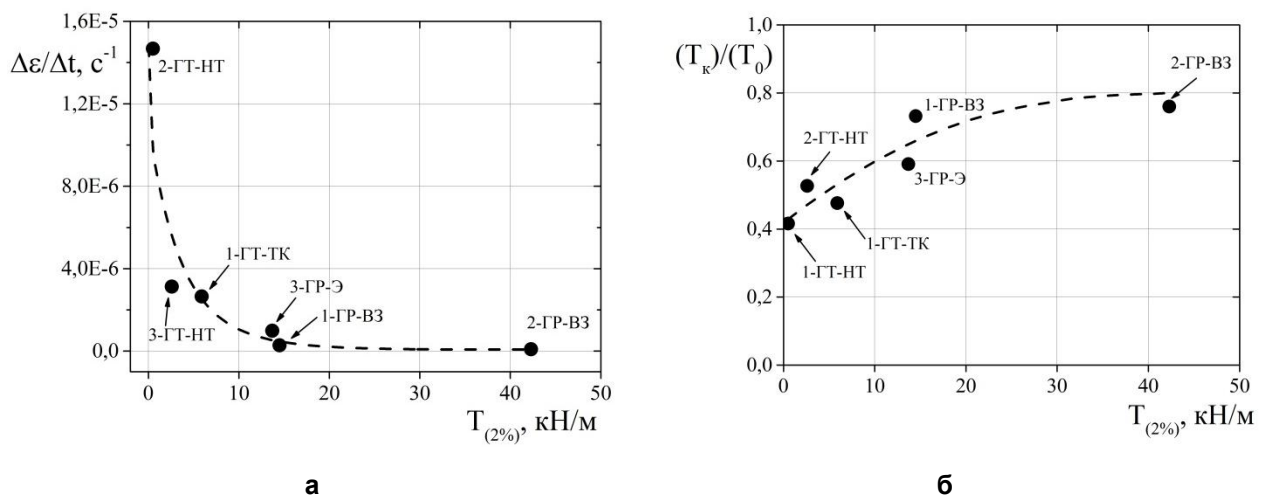
$$T_{ост} = \frac{T_k}{T_0}, \quad (5)$$

где  $T_k$  – конечное усилие в образце при  $t = 3600$  с (кН/м);  $T_0$  – начальная нагрузка в образце (кН/м).



Результаты расчетов были проанализированы в зависимости от нагрузки при относительном удлинении в 2%. На рисунке 4а представлено изменение скорости ползучести в зависимости от  $T_{2\%}$ . Из полученных данных видно, что с увеличением жесткости материала скорость ползучести резко уменьшается. Также если приложить касательную к кривым ползучести, представленным на рисунке 3а, то скорость ползучести будет наглядно иллюстрироваться углом наклона касательных. Чем более податливым является материал, тем более активно в нем протекают вязкоупругие процессы, – примером являются образцы нетканых полотен (2-ГТ-НТ и 3-ГТ-НТ). Минимальной скоростью ползучести, и, как следствие, максимальной жесткостью обладает образец стекловолокнуистой решетки (2-ГР-В3). Также хорошим сопротивлением ползучести обладают образцы георешеток 1-ГР-В3 и 3-ГР-Э, что и определяет их армирующую функцию. Полученная зависимость может быть описана экспоненциальной кривой, выходящей на плато при бесконечно большой жесткости материала.

На рисунке 4б представлены результаты расчетов остаточного усилия из эксперимента на релаксацию в зависимости от  $T_{2\%}$ . Видно, что с увеличением жесткости материала наблюдается уменьшение потери усилия во времени. Наибольшую потерю напряжений демонстрируют образцы геотекстильных полотен. Далее с увеличением жесткости образца наблюдаем снижение релаксации усилия во времени. Результаты испытаний на релаксацию усилия хорошо взаимосвязаны с испытаниями на ползучесть. Образцы с высокой податливостью имеют высокую скорость ползучести и значительное снижение внутренних напряжений при постоянно заданной деформации, и наоборот, наиболее жесткие образцы георешеток хорошо противостоят прилагаемым механическим воздействиям. Также следует отметить, что образцы нетканых полотен используются в функции разделения и/или фильтрации, а не армирования. Однако чрезмерно высокая деформация может приводить к разрушениям в их структуре.



**Рисунок 4. Зависимость скорости ползучести (а) и доли остаточного усилия (б) от нагрузки при относительном удлинении в 2 %**

Следует отметить, что полученные зависимости являются весьма универсальными, так как они отражают взаимосвязь текущей жесткости геосинтетического материала и его способности сопротивляться деформациям во времени. Как видно из рисунков 4а и 4б, полученные вязкоупругие характеристики являются взаимно обратимыми. То есть материалы, обладающие наименьшей скоростью ползучести, имеют максимальное сохранение остаточного усилия. Последнее достаточно хорошо согласуется с аналогичными исследованиями других авторов. Кроме того, с большой долей уверенности можно полагать, что другие образцы геосинтетических материалов, имеющие значения нагрузки при относительном удлинении в 2% в исследуемом диапазоне, будут укладываться в полученные зависимости.

## Выводы

1. Исследованы вязкоупругие свойства при кратковременных измерениях образцов геотекстильных полотен и георешеток различной структуры, включающих тканое геополотно, нетканое геополотно, основовязанные георешетки с нетканой подложкой и битумным покрытием и экструдированные георешетки.

2. Проведены испытания в режимах ползучести и релаксации усилия при нагрузке и деформации, соответствующей 30 % максимальной прочности при растяжении материала. Определены основные показатели свойств геосинтетических материалов при растяжении, удлинение при максимальной нагрузке, нагрузка при растяжении при определенном удлинении. Показано, что геосинтетические материалы в зависимости от своей структуры существенно отличаются друг от друга в вязкоупругих свойствах.

3. Определены зависимости скорости ползучести и остаточного усилия от нагрузки при относительном удлинении в 2 %. Показано, что структура геосинтетического материала сильно влияет на его вязкоупругие свойства. Представленные зависимости могут быть использованы в качестве экспресс-метода определения вязкоупругих характеристик для предварительного выбора геосинтетического материала.

## Литература

1. Koerner R. Designing with Geosynthetics: Sixth Edition. Xlibris Corp., 2012. 818 p.
2. Shukla S.K. Handbook of Geosynthetic Engineering: Second edition. ICE Publishing, 2011. 424 p.
3. Koerner R. [et al] Geosynthetics: A key toward sustainability // Geosynthetics, 2009. 27(1). Pp. 49–50.
4. Mounes S.M., Karim M.R., Mahrez A., Khodai, A. An overview on the use of geosynthetics in pavement structures // Scientific Research and Essays. 2011. 6(11). Pp. 2251–2258.
5. Bygness R. Geosynthetics included in 'innovative materials: Government report cites geosynthetics for roadway stability and strength // Geosynthetics. 2013. 31(1). Pp. 53–54.
6. Столяров О.Н., Горшков А.С. Применение высокопрочных текстильных материалов в строительстве // Инженерно-строительный журнал. 2009. №4. С. 21–25.
7. Устьян Н. А. Геоконтейнеры в дорожном и гидротехническом строительстве // Инженерно-строительный журнал. 2011. №4. С. 22–25.
8. Баданин А.Н., Колосов Е.С. Определение несущей способности армированного георешеткой грунтового основания // Инженерно-строительный журнал. 2012. №4(30). С. 25–32.
9. Kaliakin V.N., Dechasakulsom M. Time-Dependent Behavior of Geosynthetic Reinforcement. A Review of Experimental Work / Department of Civil and Environmental Engineering, University of Delaware Newark, 2001. 29 p.
10. Сталевич А.М. Деформирование ориентированных полимеров. СПб: Изд-во СПбГУТД, 2002. 250 с.
11. Koerner R.M., Richardson G.N., Wrigley N.E., Bush D.I., den Hoedt G. Creep and relaxation of geotextile fabrics // Geotextiles and Geomembranes. 1987. 5(4). Pp. 304–306.
12. Wu J.T.H., Helwany S.M.B. A performance test for assessment of long-term creep behavior of soil-geosynthetic composites // Geosynthetics International. 1996. 3(1). Pp. 107–124.
13. Koerner R.M., Koerner G.R. On the creep reduction factors for geotextile puncture protection of geomembranes // Geosynthetics Research and Development in Progress. American Society of Civil Engineers, 2005. Pp. 4259–4264.
14. Wu J.T.H., Helwany S.M.B. A performance test for assessment of long-term creep behavior of soil-geosynthetic composites // Geosynthetics International. 1996. 3(1). Pp. 107–124.
15. Paula A.M.V., Pinho-Lopes M., Lopes M.L. Effect of damage during installation of woven geotextile on their creep and creep rupture behavior – Laboratory tests // Proceedings of the 9th International Conference on Geosynthetics – Geosynthetics: Advanced Solutions for a Challenging World. Delaware: ICG, 2010. Pp. 781–784.
16. Xu S., Zhang Y., Wang Z. Evaluation on stress relaxation properties of geomembrane // Advanced Materials Research (2011 International Conference on Structures and Building Materials). 2011. Pp. 1572–1576.

17. Yoo H., Jeon H.-Y., Chang Y.-C. Evaluation of engineering properties of geogrids for soil retaining walls // Textile Research Journal. 2010. 80(2). Pp. 184–192.
18. Jeon H.-Y. Evaluation of long-term behaviours of geogrids: A review // Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Ground Improvement. 2010. 163(4). Pp. 189–195.
19. Yeo S.-S., Hsuan Y.G. Evaluation of creep behavior of high density polyethylene and polyethylene-terephthalate geogrids // Geotextiles and Geomembranes. 2010. 28(5). Pp. 409–421.
20. Scarborough S.E., Fredrickson T., Cadogan D.P., Baird G. Creep testing of high performance materials for inflatable structures // International SAMPE Symposium and Exhibition (Proceedings). 2008. №52. Pp. 18–19.
21. ГОСТ Р 56339-2015. Дороги автомобильные общего пользования. Материалы геосинтетические для дорожного строительства. Метод определения ползучести при растяжении и разрыва при ползучести: Введ. 01.06.2012. М.: Стандартинформ, 2015. 8 с.
22. França F.A.N., Bueno B.S. Creep behavior of geosynthetics using confined-accelerated tests // Proceedings of the 9th International Conference on Geosynthetics – Geosynthetics: Advanced Solutions for a Challenging World. Delaware: ICG, 2010. Pp. 789–792.
23. Giannopoulos I.P., Burgoyne C.J. Accelerated and Real-Time Creep and Creep-Rupture Results for Aramid Fibers // Journal of Applied Polymer Science. 2012. 123(6). Pp. 3856–3869.
24. Bueno B.S., Costanzi M.A., Zornberg J.G. Conventional and accelerated creep tests on nonwoven needle-punched geotextiles // Geosynthetics International. 2005. 12(6). Pp. 276–287.
25. Zornberg J.G., Byler B.R., Knudsen J.W. Creep of geotextiles using time-temperature superposition methods // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. 2004. 130(11). Pp. 1158–1168.
26. Baker T.L., Thornton J.S. Comparison of results using the stepped isothermal and conventional creep tests on a woven polypropylene geotextile // Geosynthetics Conference 2001. Portland, 2001. Pp. 729–740.
27. Hsieh C.W., Lee K., Yoo H.K., Jeon H. Tensile Creep Behavior of Polyester Geogrids by Conventional and Accelerated Test Methods // Fibers and Polymers. The Korean Fiber Society. 2008. 9(4). Pp. 476–480.
28. Grebneva V., Utkina K., Sabri M., Stolyarov O. Application of stepped isothermal method for prediction the creep behavior of extruded polypropylene geogrid // Applied Mechanics and Materials. 2015. Vol. 725–726. Pp. 611–616.

*Ирина Игоревна Логинова, Санкт-Петербург, Россия  
Тел. моб.: +7(911)8344136; эл. почта: lraloginova8@gmail.com*

*Дарья Александровна Артамонова, Санкт-Петербург, Россия  
Тел. моб.: +7(951)6513527; эл. почта: dusia2006@rambler.ru*

*Олег Николаевич Столяров, Санкт-Петербург, Россия  
Тел. раб.: +7(812)5526303; эл. почта: oleg.stolyarov@rambler.ru*

*Борис Евгеньевич Мельников, Санкт-Петербург, Россия  
Тел. раб.: +7(812)5526303; эл. почта: kafedra@ksm.spbstu.ru*

© Логинова И.И., Артамонова Д.А., Столяров О.Н., Мельников Б.Е., 2015

doi: 10.5862/MCE.56.3

## Расчет конечной осадки глинистых оснований, армированных вертикальными элементами

*Канд. техн. наук, заведующий кафедрой А.О. Попов,  
Казанский государственный архитектурно-строительный университет*

**Аннотация.** Армирование оснований широко используется при строительстве зданий и сооружений на сложных грунтах, где использование свайных фундаментов нецелесообразно.

Важным отличием армированного основания от свайного является то, что отсутствует прямой контакт между фундаментом (ростверком) и сваей, а нагрузка на армированное основание передается через грунт. Именно это кардинально влияет на напряженно-деформированное состояние, а следовательно, и на несущую способность и осадки.

В настоящей статье автором на основании ранее проведенных экспериментальных и теоретических исследований представлен новый методологический подход к расчету конечной осадки глинистых грунтовых оснований, армированных вертикальными элементами, с учетом влияния областей предельного состояния.

**Ключевые слова:** несущая способность; осадка; армирование грунта; вертикальный армирующий элемент

### *Введение*

Увеличивающаяся из года в год стоимость зданий и земельных участков в городах России диктует увеличение этажности проектируемых зданий и, как следствие, нагрузок, а также формирует тенденцию к освоению участков, считавшихся ранее непригодными для строительства. При этом передаваемые суммарные нагрузки (с учетом собственного веса грунта) на основание в отдельных случаях могут достигать 1,0 МПа. При высоких нагрузках или неблагоприятных инженерно-геологических условиях площадок строительства одним из способов увеличения несущей способности и уменьшения осадок оснований является вертикальное армирование грунтов в основании зданий и сооружений. Армирование грунтов широко используется при строительстве зданий и сооружений на лессовых просадочных, слабых и сильносжимаемых водонасыщенных, рыхлых песчаных и насыпных грунтах, когда использование традиционных конструкций фундаментов, в том числе и свайных, экономически не целесообразно.

Армированное вертикальными элементами грунтовое основание представляет собой комбинацию грунта и армирующих элементов. За счет введения армирующих элементов, взаимодействующих с грунтовым основанием по боковым поверхностям и торцам, изменяются условия деформирования. Передача нагрузки на армированное основание через грунт позволяет использовать несущую способность грунтового основания в полном объеме. Армированное основание может быть устроено как сваями заводского изготовления, в том числе из стальных труб и прокатных элементов, так и выполнением армирующих элементов в предварительно устроенных скважинах. Независимо от метода создания армирующих элементов процесс возведения зданий и сооружений оказывается непрерывным, а строительство может быть продолжено сразу же после окончания работ по изготовлению армирующих элементов – нет необходимости ждать момента набора ими марочной прочности.

Отличительная особенность армированных оснований в том, что нагрузка на них передается через грунт. Именно это, казалось бы, незначительное отличие от свайных фундаментов (того или иного вида) приводит к тому, что при нагружении несущая способность грунта используется в полном объеме, а армирующие элементы включаются в полную работу на стадии сдвига.

На момент проведения исследования отсутствуют опытные данные по испытаниям свайных и армированных оснований в идентичных грунтовых условиях, однако аналитическими расчетами установлено, что несущая способность армированных оснований в некоторых случаях больше в 1,28 раз, а расчетные значения осадок ниже в 1,7 раз.

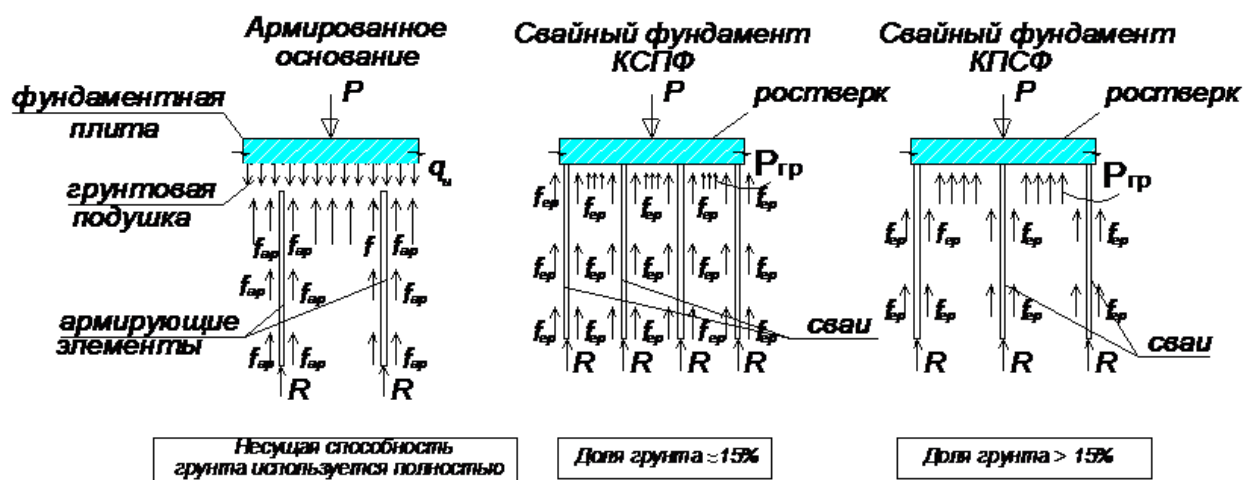


Рисунок 1. Схемы передачи нагрузки на армированное вертикальными элементами грунтовое основание, свайное основание типа КСПФ (комбинированный свайно-плитный фундамент) и КПСФ (комбинированный плитно-свайный фундамент)

### Обзор литературы

Инженерные методы расчета, учитывающие взаимодействие армирующих элементов с окружающим их слабым грунтом, в настоящее время еще не разработаны, поэтому используются приближенные методы, основанные на учете различной сжимаемости материала армирующих элементов и окружающего грунта. Инженерные расчеты армированных оснований можно разделить на две основные группы: методом приведенного модуля [1–5] и методом условного фундамента [5–12]. Оба метода связаны с целым рядом допущений, которые в целом достаточно серьезно влияют на точность расчета. Так, например, допускают, что армирующие элементы по отношению к окружающему грунту являются несжимаемыми (абсолютно жесткими) и неизгибаемыми, пренебрегают собственным весом грунта и армирующих элементов, не учитывают обжатие буферного слоя (грунтовой подушки). Принимается, что армирующие элементы и грунтовой массив между армирующими элементами являются единым монолитом, а армирующие элементы включаются в работу непосредственно при приложении нагрузки.

В современной геотехнической практике, помимо инженерных расчетов, особое место занимают численные методы расчета армированных вертикальными элементами грунтовых оснований [1, 9, 12–19], однако эти решения не всегда корректны, связано последнее с методологическими особенностями того или иного метода решения. Так, решения с использованием метода конечных элементов связаны с тем, что грунтовой массив и армирующие элементы являются единым целым, а следовательно, и деформируются совместно, так как связаны между собой в узлах конечноэлементной сетки, при этом никакого проскальзывания армирующих элементов методологически произойти не может, что противоречит экспериментальным данным. Решения с использованием методов сил и конечных разностей позволяют учитывать проскальзывание армирующих элементов, однако, несмотря на серьезный математический аппарат, все равно приводят к решениям относительно приведенного модуля деформаций с описанными выше недостатками и условностями.

### Постановка задачи

В ранних работах [20–22], выполненных автором, осадка армированного основания определялась с использованием приведенного модуля деформаций, полученного исходя из предположения об осреднении податливостей (гипотеза Райса) и среднегармоническом осреднении деформаций (гипотеза Фойгта), а для учета вышеуказанных недостатков в расчетной методике использовались эмпирические коэффициенты и диаграммы, полученные по результатам испытаний [23, 24]. В настоящей работе автором предлагается метод учета влияния областей предельного состояния армированного вертикальными элементами грунтового основания, лишенный недостатков ранних работ в виде диаграммного метода и эмпирических коэффициентов.

Проведенные экспериментальные исследования несущей способности и осадок оснований, армированных вертикальными элементами, показали, что несущая способность грунтового

основания увеличивается в 1,42...2,37 раза, при этом осадка основания снижается в 1,25...3,15 раза в зависимости от длины элементов и характера армирования.

### *Назначение основных параметров армирующих элементов и область применения метода*

Экспериментальные и теоретические исследования [20–24] показали, что армированные основания эффективны при преобразовании прочностных и деформационных грунтов в основании плитных и столбчатых фундаментов каркасных зданий с регулярной и нерегулярной схемой расположения элементов в плане и по длине. Диаметр армирующих элементов зависит от методики создания армированного грунтового массива и имеющегося парка машин и механизмов.

Анализ лабораторных и полевых исследований позволил выявить границы эффективного применения армированных оснований, которые для модуля деформации находятся в интервале от 5 до 25 МПа. Последние границы распространяются на сильно сжимаемые и мало сжимаемые грунты. При этом предварительный шаг армирующих элементов назначается от 7 до 11d в зависимости от модуля деформации грунта, окружающего армирующий элемент.

При проектировании длину армирующих элементов предлагается назначать исходя из инженерно-геологических условий площадки строительства согласно положениям СП 24.13330.2011. В случае если толща слабых грунтов имеет значительную мощность по глубине, допускается применять армирующие элементы, прорезающие массив слабого грунта не на всю глубину, при этом длина армирующих элементов должна быть не менее полуширины фундамента.

Грунтовая подушка (буферный слой) устраивается послойным уплотнением песчаного или щебенистого грунта, а толщина ее назначается исходя из равномерного распределения нагрузки на армированное грунтовое основание, при этом она не должна превышать толщины плитной части фундамента.

Назначенные шаг, диаметр и длина армирующих элементов проверяются согласно расчетным положениям настоящей статьи, которые приведены ниже. В случае невыполнения последних требований принимается решение по изменению длины, шага или диаметра армирующих элементов.

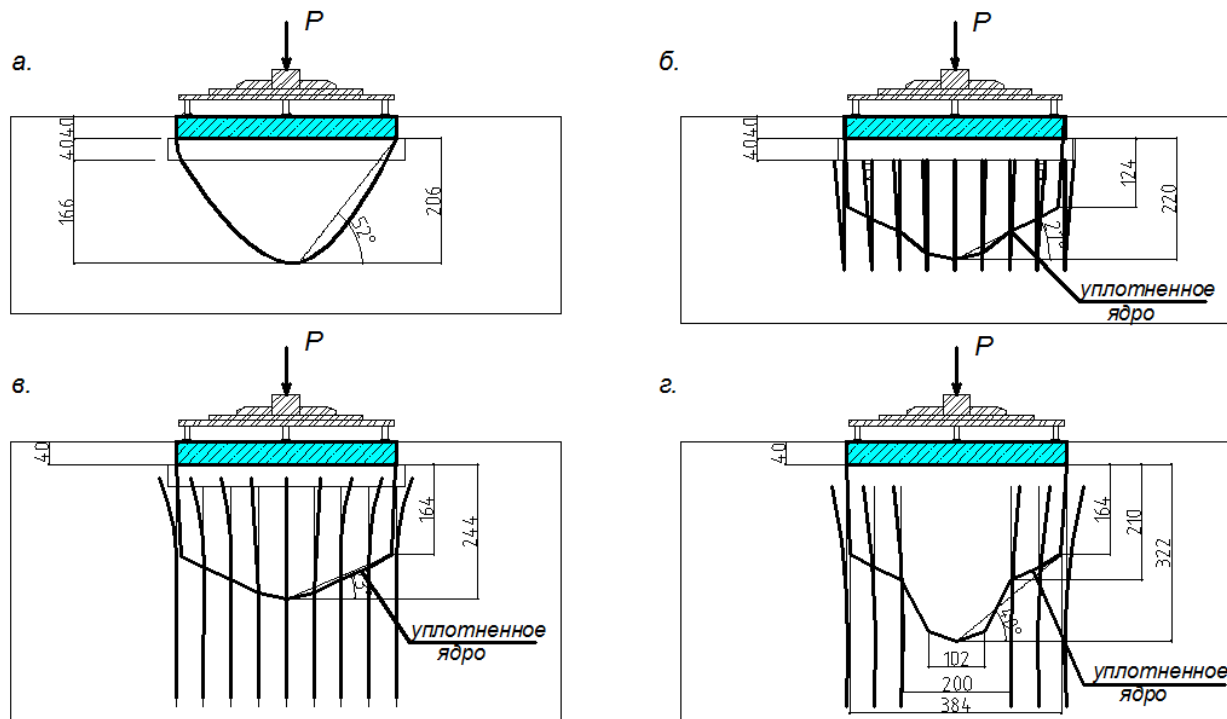
### *Описание исследования*

При проведении испытаний армированных грунтовых оснований в лабораторных и полевых условиях [23, 24] исследовался характер развития уплотненных зон, схематичное изображение которых показано на рисунке 2. При проведении испытаний под подошвой прямоугольных штампов были обнаружены уплотненные зоны, размеры основания которых соответствовали габаритным размерам штампов. Высота и очертание наклонных плоскостей уплотненной зоны в различных сериях испытаний имели некоторое отличие в зависимости от длины армирующих элементов и схемы армирования. При испытании неармированного грунтового основания (рис. 2а) было определено, что высота уплотненной зоны составляла 226 мм, а очертание наклонных граней было линейным. Испытания армированных грунтовых массивов показали, что армирование грунтового основания изменяет размеры и геометрическую форму уплотненной зоны. Для испытаний по сериям 2–4 основание уплотненной зоны соответствует габаритным размерам штампа, однако имеет значительное развитие по глубине (от 124 до 164 мм), при этом высота уплотненной зоны в некоторых случаях увеличивается до 322 мм, а угол наклона граней к горизонту в значительной степени уменьшается.

Работа армирующих элементов в сжимающем силовом потоке отличается от общепринятых понятий «сваи-стойки» и «висячие сваи». По окончании испытаний армированных грунтовых оснований проводилась послойная откопка грунтовых оснований, при которой фиксировались перемещения армирующих элементов (рис. 2). Во всех испытаниях было выявлено деформирование грунта около армирующих элементов.

Деформирование грунта около армирующих элементов связано с включением армирующих элементов в работу при уплотнении грунтового основания. Помимо этого, были выявлены отклонения армирующих элементов от вертикали, свидетельствующие о том, что элементы испытывают не только осевое сжатие, но и нестационарный изгиб с переменным пролетом изгиба. Во всех испытаниях наибольшее перемещение оголовков наблюдалось в армирующих элементах, расположенных в крайних зонах.

Отклонение армирующих элементов от вертикали связано с формированием и развитием областей сдвига при потере устойчивости основания. Это явление возникает из-за того, что армирующие элементы пересекают поверхности скольжения и препятствуют перемещению грунтового основания в направлении наименьшего сопротивления в стороны и вверх. Отклонения армирующих элементов от вертикали зависят от длины, изгибной жесткости армирующих элементов и схемы армирования.



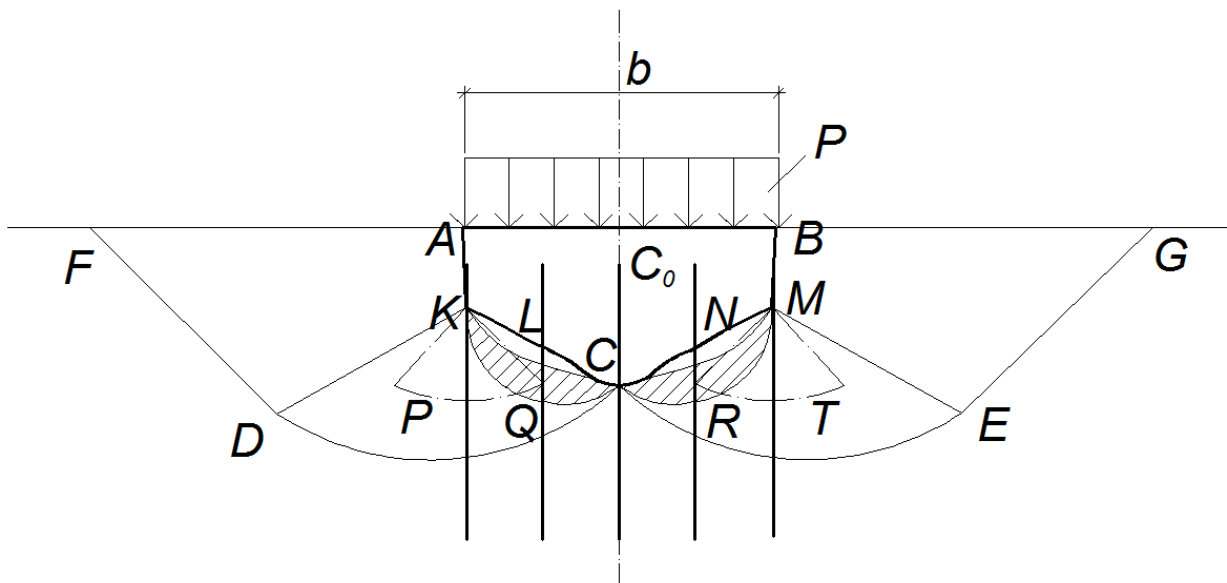
**Рисунок 2. Схематичное изображение уплотненной зоны, построенное по результатам испытаний, проведенных автором [23, 24]:**

- а) не армированное основание;**  
**б) основание, армированное элементами длиной, равной полуширине штампа  $b/2$ ;**  
**в) основание, армированное элементами длиной, равной ширине штампа  $b$ ;**  
**г) основание, армированное элементами длиной, равной ширине штампа  $b$ , при нерегулярной схеме армирования (отсутствие элементов в центральной зоне)**

Технология устройства, практические рекомендации и особенности проектирования, методы и способы армирования в настоящей работе не освещены, однако предложенная методика расчета разработана для усиления оснований армирующими элементами, обладающими изгибной жесткостью.

Изменение очертания уплотненной зоны связано с тем, что армирующие элементы изменяют напряженное состояние грунтового массива, частично ограничивая боковое расширение, а также ограничивая сдвиги. Габаритные размеры уплотненной зоны зависят от длины, изгибной жесткости армирующих элементов и схемы армирования.

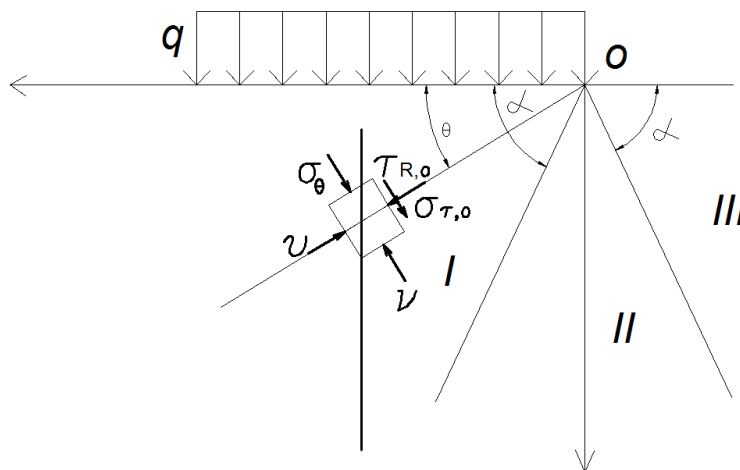
Вспользуемся решением смешанной задачи, полученным В.В. Соколовским [25] для идеально связного полупространства, имеющего на поверхности полубесконечную равномерно распределенную нагрузку, при этом компилируя схему таким образом, чтобы получить расчетную модель для полосовой нагрузки (рис. 3). Этот прием допустим, поскольку криволинейные области предельного состояния, постепенно развивающиеся в основании под полосовой нагрузкой, в верхней части близки по очертанию к областям (в виде секторов), соответствующим полубесконечной нагрузке. Следует предположить, что именно верхние части областей предельного состояния оказывают наибольшее влияние на увеличение интенсивности нарастания осадки в фазе сдвига. Увеличивающаяся нагрузка  $p$ , приложенная к поверхности полупространства, армированного вертикальными элементами связного грунта, приводит к тому, что предельное состояние зарождается по вертикали, проходящей через крайние точки ( $K$  и  $M$ ), и затем развивается симметрично по отношению к вертикали.



**Рисунок 3. Очертания развивающихся областей предельного состояния**

Увеличение осадки в фазе сдвигов происходит в основном за счет боковых смещений в секторах СКД и СМЕ. Поэтому вместо областей предельного состояния, соответствующих нагрузке, распределенной по полосе, можно приближенно ввести у краев полосы, в пределах слоя толщиной  $b/4$  (выявлено по результатам испытаний), области в виде секторов KРQ и MRT (рис. 3), имеющие площади, эквивалентные заштрихованным зонам пластических деформаций. Принимая во внимание соображения, изложенные выше, можно считать, что это упрощение существенно не повлияет на результат.

Составляющие перемещений находим по аналогии с [26], пользуясь выражениями для напряжений. Применяется полярная система координат, при этом положительные направления напряжений ( $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ ) и перемещений ( $u$  – радиальная,  $v$  – тангенциальная составляющие) показаны на рисунке 4.



**Рисунок 4. Составляющие напряжений и перемещений в данной точке**

Исходя из схемы распределения напряжений (рис. 4) в расчет вводится значение уплотняющего давления, эквивалентное связности, учитывающее сопротивление сдвигу армирующих элементов в зоне пластических деформаций:

$$\sigma = 2(c + 3 \frac{M_u}{A_{sh} L_x} n) \left[ \pi - \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \right]. \tag{1}$$

Выражения для напряжений в I области ( $0 \leq \theta \leq \alpha$ ):



$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right| = 2\left(c + 3 \frac{M_u}{A_{sh} L_x} n\right) \left[ 2\pi + \frac{2\theta \cos 2\alpha - 4\alpha + \sin 2\alpha \pm \sin 2(\theta - \alpha)}{1 - \cos 2\alpha} \right],$$

$$\tau_{r\theta} = \left( c + 3 \frac{M_u}{A_{sh} L_x} n \right) \left[ \frac{\cos 2(\theta - \alpha) - \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \right];$$
(2)

в области II предельного состояния ( $\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha$ ):

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{\sigma}{2} + (c + 3 \frac{M_u}{A_{sh} L_x} n) (\pi - 2\theta),$$

$$\tau_{r\theta} = c + 3 \frac{M_u}{A_{sh} L_x} n.$$
(3)

В III области ( $\pi - \alpha \leq \theta \leq \pi$ ):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right| = 2\left(c + 3 \frac{M_u}{A_{sh} L_x} n\right) \times \left[ \frac{2(\theta - \pi) \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \pm \sin 2(\theta + \alpha)}{1 - \cos 2\alpha} \right],$$

$$\tau_{r\theta} = \left( c + 3 \frac{M_u}{A_{sh} L_x} n \right) \left[ \frac{\cos 2(\theta + \alpha) - \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \right].$$
(4)

Используя величины составляющих деформаций:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial \theta}; \gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u}{r}$$
(5)

и подставляя в последние выражения значения напряжений, последовательно интегрируя, получаем выражения для перемещений в области I:

$$u = \frac{1 + \mu}{E} \left( c + 3 \frac{M_u}{A_{sh} L_x} n \right) r \left[ (1 - 2\mu) \times \left( 2\pi + \frac{2\theta \cos 2\alpha - 4\alpha + \sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \right) + \frac{\sin 2(\theta - \alpha)}{1 - \cos 2\alpha} \right] + A \sin \theta + B \cos \theta,$$
(6)

$$v = \frac{1 + \mu}{E} \left( c + 3 \frac{M_u}{A_{sh} L_x} n \right) r \left[ (1 - 2\mu) \times \left( \frac{\cos 2(\theta - \alpha) - 4(1 - \mu) \cos 2\alpha \ln r}{1 - \cos 2\alpha} \right) + A \sin \theta + B \cos \theta + C \right],$$
(7)

где  $E_{ep}$  – модуль деформации грунта, МПа;

$\mu$  – коэффициент относительной поперечной деформации;

$c$  – удельное сцепление, МПа;

$M_u$  – предельно допустимое значение момента, возникающего в поперечном сечении армирующего элемента, МН·м;

$A_{sh}$  – площадь поверхностей сдвига, м<sup>2</sup>;

$L_x$  – отрезок армирующего элемента, расположенный выше поверхности скольжения;

$n$  – количество армирующих элементов, пересекающих поверхность скольжения;

$A, B, C$  – постоянные интегрирования, определяемые условиями для перемещений на границах областей.

Для областей II и III выражения для перемещений получаем аналогичным образом.

Таким образом, расчет осадки с учетом симметричных областей предельного состояния ведется в следующем порядке:

- 1) по имеющемуся значению уплотняющего давления  $\sigma$  определяется угол  $\alpha$ ;
- 2) по выражениям (6) и (7) определяются перемещения точек  $C$  и  $C_0$ ;
- 3) деформация сжатия слоя между точками  $C$  и  $C_0$  определяется как разность вертикальных проекций  $\Delta S_1$ ;
- 4) осадка точки  $C$  (рис. 3) вычисляется как для точки линейно деформируемого полупространства;
- 5) проекция перемещений на вертикаль дает осадку  $S_1$  точки  $C$ ;
- 6) осадка штампа определяется алгебраическим суммированием величины сжатия слоя  $\Delta S_1$  и осадки точки  $C$  как точки линейно деформируемого полупространства  $S_1$ ;

$$S = S_1 + \Delta S_1$$

Предложенная методика апробирована при расчете осадок армированных оснований фундаментов резервуара для хранения нефтепродуктов в г. Нижнекамске Республики Татарстан (фактические значения осадки установлены по данным геотехнического мониторинга) и на четырех крупномасштабных штамповых испытаниях армированных оснований.

Резервуар имеет диаметр 28,5 м. Грунтовые условия площадки до глубины 18,0 м представлены глинистыми грунтами тугопластичной и текучепластичной консистенции. Для преобразования свойств грунтов были использованы составные армирующие элементы (сваи) заводского изготовления сечением 300 x300 мм длиной 19,0 м с шагом 2,5 м.

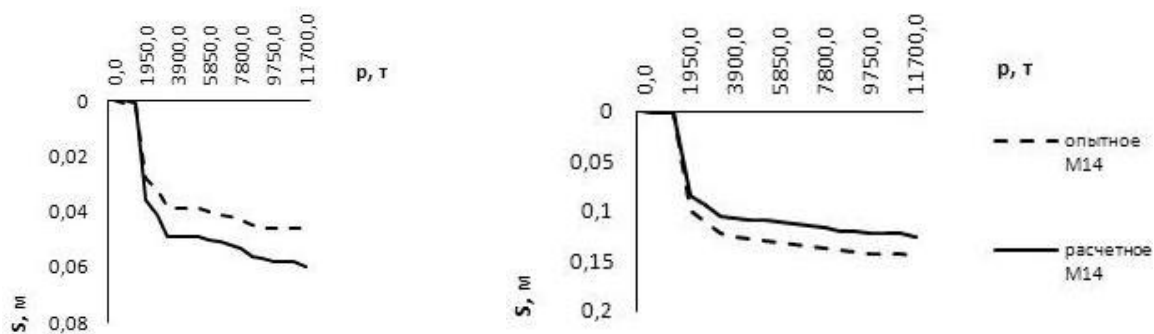


Рисунок 5. Графики сопоставления опытных и расчетных значений осадки армированного основания резервуара для хранения нефтепродуктов в г. Нижнекамске

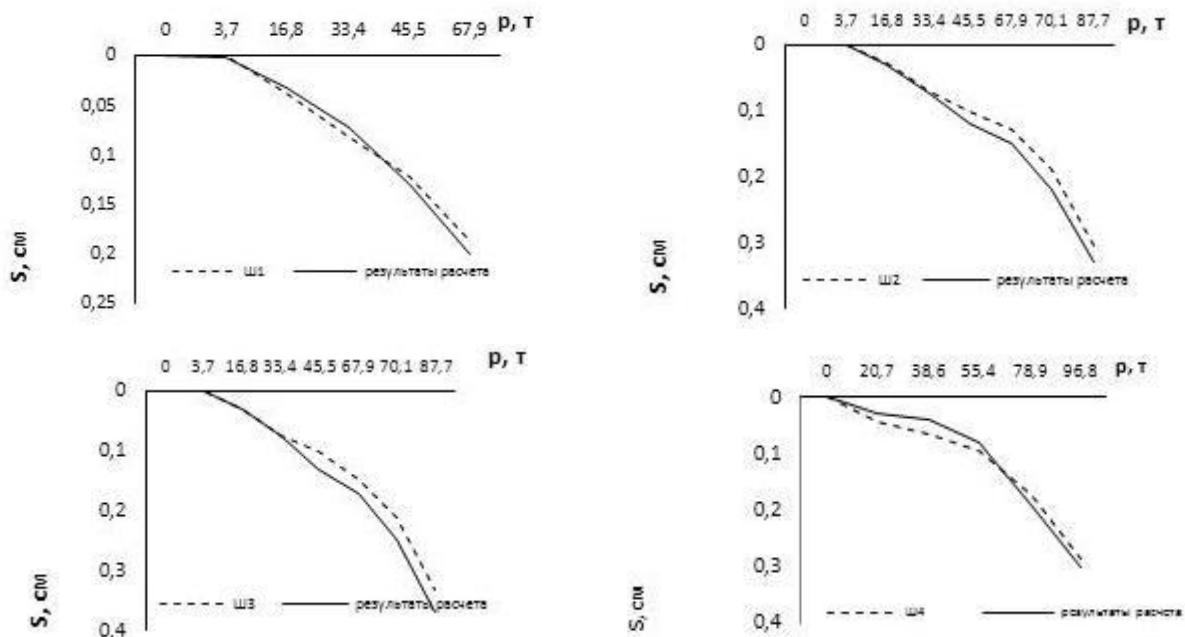


Рисунок 6. Графики сопоставления опытных и расчетных значений осадки армированного основания для штамповых испытаний Ш1, Ш2, Ш3, Ш4

При штамповых испытаниях испытывались модели с размерами 1,5 x 1,5 м и 2,0 x 1,8 м. Армирующие элементы представляли собой железобетонные сваи сечением 300x300 мм длиной 5,0 и 6,0 м.

Сопоставление результатов расчета с данными испытаний приведены на рисунках 5 и 6. Как видно из рисунков 5 и 6, данные, полученные на основе расчетной модели (сплошная линия на рисунке), показывают хорошую сходимость с результатами геотехнического мониторинга и штамповых испытаний (пунктирная линия на рисунке).

## Выводы

1. Проведенные экспериментальные и теоретические исследования позволили выявить область эффективного применения армированных оснований – грунты с модулем деформации в интервале  $5 \leq E \leq 25$  МПа. Последние границы распространяются на сильно сжимаемые и мало сжимаемые грунты.

2. Грунтовая подушка (буферный слой) устраивается послойным уплотнением песчаного или щебенистого грунта, а толщина ее назначается исходя из равномерного распределения нагрузки на армированное грунтовое основание, при этом толщина не должна превышать толщины плитной части фундамента.

3. Предварительный шаг и диаметр армирующих элементов в зависимости от модуля деформации грунта назначается в интервале от 7 до  $11d$ . Длину армирующих элементов предлагается назначать исходя из инженерно-геологических условий площадки строительства согласно положениям СП 24.13330.2011. В случае если толща слабых грунтов имеет значительную мощность по глубине, допускается применять армирующие элементы, прорезающие массив слабого грунта не на всю глубину, при этом длина армирующих элементов должна быть не менее полуширины фундамента.

Назначенные шаг, диаметр и длина армирующих элементов проверяются согласно расчетным положениям настоящей статьи, в случае невыполнения последних требований принимается решение по изменению параметров армирования.

4. Представлена новая схема очертания развивающихся областей предельного состояния армированного вертикальными элементами грунтового основания, учитывающая их реальные размеры, форму и деформации армирующих элементов.

5. Предложены выражения для определения уплотняющего давления для различных зон армированного основания, учитывающие сопротивление сдвигу армирующих элементов в зоне пластических деформаций. Получены выражения для определения перемещений в различных зонах армированного основания, с использованием которых определяется осадка армированного вертикальными элементами грунтового основания.

## Литература

1. Тер-Мартirosян З.Г., Струнин П.В. Усиление слабых грунтов в основании фундаментных плит с использованием технологии струйной цементации грунтов // Вестник МГСУ. 2010. №4. С. 310–315.
2. Desai C.S. Effects of driving and subsequent consolidation on Behavior of Driven Piles // Int. journal for Numerical and Analytical Methods in geomechanics. 1978. No. 2. Pp. 283–301.
3. Hegg U., Jammilkowski M.B., Parvis E. Behavior of oil tanks on soft cohesive ground improved by vertical drains // Proc. 8-th ECSMFE. 1983. No. 2. Pp. 627–632.
4. Джоунс Д.К. Сооружения из армированного грунта. М.: Стройиздат, 1989. 280 с.
5. BS 8006. Code of Practice for Strengthened Reinforced Soils and Other Fills. British Standards Institution. London, 1995. 206 p.
6. Федоровский В.Г., Безволев С.Г. Метод расчета свайных полей и других, вертикально армированных грунтовых массивов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1994. №3. С. 11–15.
7. Kawasaki T. Deep mixing method using cement hardening agent // Proc. 8-th ECSMFE. Stockholm, 1981. Pp. 721–724.
8. Paul Teng T. An introduction to the deep mixing methods as used in geotechnical application / US Department of transportation, federal highway administration, 2000.
9. Караулов А.М. Методика расчета вертикально армированного основания плитного фундамента // Материалы международной научно-практической конференции ПГАСА. Пенза: Изд-во ПГАСА, 2002. С. 66–69.
10. Нуждин Л.В., Кузнецов А.А. Армирование грунтов основания вертикальными стержнями // Труды международного семинара по механике грунтов, фундаментостроению и транспортным сооружениям. М.: Изд-во МГСУ, 2000. С. 204–206.

11. Нуждин Л.В., Скворцов Е.П. Исследование динамического напряженно- деформированного состояния жестких вертикальных армоэлементов // Вестник ТГАСУ. 2003. №1. С. 225–230.
12. Jones D.R.V., Dixon N. A comparison of geomembranes/geotextiles interface shear strength by direct shear and ring shear // Proceeding of the Second European Geosynthetics Conference. Bologna, Italy. 2000. No. 2. Pp. 929–932.
13. Chen Y., Cao W., Chen R.P. An experimental Investigation of Soil Arching within Basal Reinforced and Unreinforced Piled Embankments // Geotextiles and geomembranes. 2008. No. 26. Pp. 164–174.
14. Han J., Gabr M.A. Numerical analysis of geosynthetic-reinforced and pile-supported earth platforms over soft soil // Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering, ASCE. 2002. No. 128(1). Pp. 44–53.
15. Huang J., Han J. Two-Dimensional Parametric Study of Geosynthetic-Reinforced Column-Supported Embankments by Coupled Hydraulic and Mechanical Modeling // Computers and Geotechnics. 2010. No. 37(5). Pp. 638–648.
16. Kempton G.T., Russell D., Pierpoint N., Jones C.J.F.P. Two and Three Dimensional Numerical Analysis of The Performance of Piled Embankments // 6th International Conference on Geosynthetics. 1998. Pp. 767–772.
17. Liu H.L., Charles W.W., Fei K. Performance of A Geogrid-Reinforced and Pile Supported Highway Embankment Over Soft Clays-Case Study // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE. 2007. No. 133(12). Pp. 1483–1493.
18. Russell D., Pierpoint N. An Assessment of Design Methods for Piled Embankments // Ground Engineering. 1997. No. 30(11). Pp. 39–44.
19. Smith M., Filz G. Axisymmetric numerical modeling of a unit cell in geosynthetic reinforced, column-supported embankments // Geosynthetics International. 2007. No. 14(1). Pp. 13–22.
20. Мирсяяпов И.Т., Попов А.О. Напряженно-деформированное состояние армированных грунтовых массивов // Инженерная геология. 2008. №1. С. 40–82.
21. Мирсяяпов И.Т., Попов А.О. Оценка прочности и деформативности армированных грунтовых оснований // Геотехника. 2010. №4. С. 58–67.
22. Мирсяяпов И.Т., Попов А.О. Экспериментально-теоретические исследования работы армированных грунтовых массивов // Известия КГАСУ. 2008. №2(10). С. 75–80.
23. Мирсяяпов И.Т., Попов А.О. Методика расчета армированных оснований // Вестник гражданских инженеров. 2009. №2(19). С.124–125.
24. Попов А.О. Несущая способность и осадки грунтовых оснований, армированных вертикальными элементами // Промышленное и гражданское строительство. 2014. №11. С. 27–31.
25. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. Изд. 3-е. Л.: Физматгиз, 1960. 243 с.
26. Березанцев В.Г. Расчет оснований сооружений. Л.: Стройиздат, 1970. 208 с.

*Антон Олегович Попов, г. Казань, Россия*

*Тел. раб.: +7(9673)625746; эл. почта: a.o.popov@yandex.ru*

© Попов А.О., 2015

doi: 10.5862/MCE.56.4

## Оценка монтажных усилий в металлическом покрытии с учетом сборки

*Аспирант А.Б. Бондарев;  
д-р техн. наук, заведующий кафедрой А.М. Югов,  
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры*

**Аннотация.** В статье выполнен расчет точности купольного шарнирно-стержневого покрытия и анализ сборочных отклонений по параметрам напряженно-деформированного состояния – по величинам начальных усилий. Определение отклонений осуществлено по положению узлов и стержней в пространстве относительно их проектных значений.

Рассмотрены две технологических схемы сборки купольного покрытия – от края к центру и от центра к краю. Расчет точности выполнен авторской компьютерной программой – вычислительный комплекс «Размерный анализ стержневых конструкций» (ВК РАСК) – на персональном компьютере. Оценка напряженно-деформированного состояния купольного покрытия с учетом накопления сборочных отклонений выполнена методом конечных элементов в вычислительном комплексе SCAD.

Предложены конструктивные решения стыковки стержней и способ монтажа покрытия, направленные на повышение его несущей способности, живучести и собираемости.

**Ключевые слова:** большепролетные пространственные покрытия; шарнирно-стержневые системы; монтажные воздействия; сборочные отклонения; сборочные погрешности

### Введение

Современные потребности общества требуют возведения покрытий зданий и сооружений с большими пролетами. Такие запросы связаны с необходимостью размещения большого количества людей, специальных производств, выставочных павильонов, бассейнов, крытых стадионов. При сборке большепролетных покрытий, как и многих других многоэлементных систем, неизбежно накапливаются отклонения. Возникновение и накопление отклонений в металлических статически неопределимых конструкциях приводит к изменению их напряженно-деформированного состояния (НДС), живучести [1] и собираемости [2]. Возможное изменение НДС покрытия при наличии отклонений может снизить несущую способность покрытия, собираемость и живучесть [3–7].

Учет и управление отклонениями в большепролетных покрытиях, а также борьба с ними на этапе проектирования – возможный резерв повышения несущей способности покрытия, повышения его живучести, собираемости и снижения трудоемкости возведения. Величины возможных отклонений при проектировании большепролетных шарнирно-стержневых металлических покрытий являются исходными данными для разработки конструктивных мероприятий, например системы конструктивной компенсации отклонений. Кроме того, знание величин отклонений позволит оценить, а при необходимости снизить их влияние на несущую способность покрытия, а также управлять отклонениями в процессе монтажа. Активное управление отклонениями в покрытии в процессе возведения позволит снизить трудоемкость строительства всего объекта в целом.

### 1. Краткий обзор ранее выполненных исследований

Результаты исследований многих авторов, посвященных отклонениям, свидетельствуют, что отклонения снижают несущую способность конструкции. Значительное количество работ посвящено влиянию погнутости стержней – работы М. Д. Корчака [8], А. М. Югова [9]. Работы Г. Н. Колесникова [10] и другие посвящены исследованию влияния отклонений длин стержней от проектных размеров на поведение конструкции. В этих работах указывалось, что при случайных отклонениях в стержневых оболочках происходит снижение их несущей способности. Исследованием отклонений в многоэтажных зданиях занимались Н. И. Ватин [11], Д. В. Конин [12], В. Е. Сно [13] и многие другие.

Начиная с 70-х годов в МГТУ им. Н.Э. Баумана на кафедре технологии ракетно-космического машиностроения Л. А. Кашуба, В. А. Тарасов, С. В. Исаев занимаются вопросами отклонений формы элементов радиотелескопов, оболочек ракет [14, 15] и другими. В результате комплекса указанных работ, посвященных отклонениям, С. В. Исаев разработал методику расчета Бондарев А.Б., Югов А.М. Оценка монтажных усилий в металлическом покрытии с учетом сборки

пространственной размерной цепи. Расчет точности [11] с использованием современных программных комплексов (к примеру, Solid Works) рассмотрен А. А. Алямовским [16]. Однако возможности современных программных комплексов размерного анализа (Solid Works, Autodesk Inventor, КОМПАС-3D V12, PRO/ENGINEER WILDFIRE) не позволяют выполнить расчет точности пространственных размерных цепей с несколькими замыкающими звеньями. Современные программные комплексы размерного анализа не позволяют вычислить накопление отклонений в пространственных многоэлементных системах, т. к. в них рассматриваются размерные цепи с одним замыкающим звеном.

На современном этапе строительства требуется как никогда высокая скорость и точность определения НДС конструкций, возведения и сдачи их в эксплуатацию. Для удовлетворения всех этих требований требуется учет как возможных отклонений в конструкциях, так и других особенностей, присущих той или иной конструкции. Ошибки проектирования и неправильное определение НДС конструкций, неудовлетворительное качество возведения объектов строительства может привести к остановке производства или гибели людей [19]. Современные программные комплексы для расчета строительных конструкций позволяют определять НДС конструкций с учетом стадийности монтажа (SCAD, ЛИПА, Nastran, ANSYS) и многих других особенностей [18–20], но они не приспособлены для определения отклонений сборки с учетом их накопления.

В последнее время появились исследования, рекомендуемые для борьбы с отклонениями создавать управляемые конструкции, – работы В. И. Буякаса и А. С. Гвамичава [21]. Первые работы по управлению поведением строительных конструкций появились достаточно давно в сейсмостойком строительстве, например, работа И. И. Гольденבלата, Н. А. Николаенко, С. В. Полякова и С. В. Ульянова [22]. Для контроля поведения зданий и сооружений рекомендуют применять системы мониторинга [23]. В работах Н. П. Абовского [24], Charles R. Farrar [25], Chars J. Gantes [26], Gaul L. [27], Hasan R. [28], Kartal M.E. [29], Kaveh A. [30], Kohtaro Matsumoto [31], Ömer Keleşoğlu [32], Preumont A. [33], Tokunbo Ogunfunmi [34] предлагается создавать конструкции типа semi-active – конструкции с «полуактивным управлением», в том числе для борьбы с несовершенствами формы. Управление поведением конструкций применяется для повышения ее виброустойчивости и точности передачи возмущающих факторов, к примеру, радиоволн радиотелескопами и гелиоскопами – исследования Н. М. Kim [35], J. E. Pearson [36] и других.

## ***2. Выделение не решенных ранее частей общей проблемы и анализ последних исследований***

Давно известно, что сборочные отклонения снижают надежность и собираемость большепролетных стержневых металлических покрытий. В работе А. В. Перельмутера [20] отмечается, что аварии неизбежны в силу объективного несовершенства созданных человеком норм. В последнее время появилось значительное количество работ по оценке НДС металлоконструкций с учетом последовательности монтажа, но в этих работах, как и во многих аналогичных, ничего не сказано об учете отклонений при монтаже. В настоящее время учет отклонений выполняется методом статистических испытаний или методом Мора [37]. Для простых систем при расчете точности (определении величин отклонений) можно применить хорошо известные методы теории размерных цепей [38]. Применение методов теории размерных цепей для сложных систем затруднено или невозможно. Использование метода статистических испытаний для определения отклонений и усилий в многоэлементных шарнирно-стержневых статически неопределимых системах не отражает процесса накопления отклонений при сборке.

Следовательно, сегодня требуется разработка методики расчета точности для многоэлементных шарнирно-стержневых систем и оценка влияния отклонений на собираемость, живучесть и НДС стержневых систем. Для обоснования необходимости разработки систем компенсаций (отклонений, усилий) и обеспечения функциональных требований большинства конструкций, в том числе и большепролетных шарнирно-стержневых металлических покрытий, требуется проверка их НДС с учетом отклонений.

## ***3. Объект, цель и методика исследований***

Цель исследования – численная оценка монтажных усилий в шарнирно-стержневом металлическом однопоясном покрытии сферической формы с учетом возможных сборочных отклонений при разных технологических последовательностях сборки. Объект исследования – однопоясное шарнирно-стержневое металлическое купольное покрытие ледового дворца в г. Донецк (рис. 1–2).

Купольное покрытие представляет собой однопоясную оболочку с радиусом нижнего основания 18490 мм из стали С 245. Стрела подъема купола – 10 м. По конструктивному решению основными несущими элементами покрытия являются радиальные ребра, объединенные между собой однопоясной сетью из взаимно пересекающихся стержней. Жесткие меридиональные ребра и однопоясная сеть покрытия совместно воспринимают действующие на них нагрузки. Распор купольного покрытия ледового дворца гасится опорным кольцом. Крепление узлов покрытия с колоннами через внешнее опорное кольцо жесткое. Соединение узлов покрытия между собой принято шарнирным. Исследуемый объект является многократно статически неопределимой системой. Расчет металлоконструкций ледового дворца на восприятие расчетных нагрузок и воздействий, в том числе и монтажных от сборочных отклонений, выполняется методом конечных элементов (МКЭ) с помощью ПК SCAD.

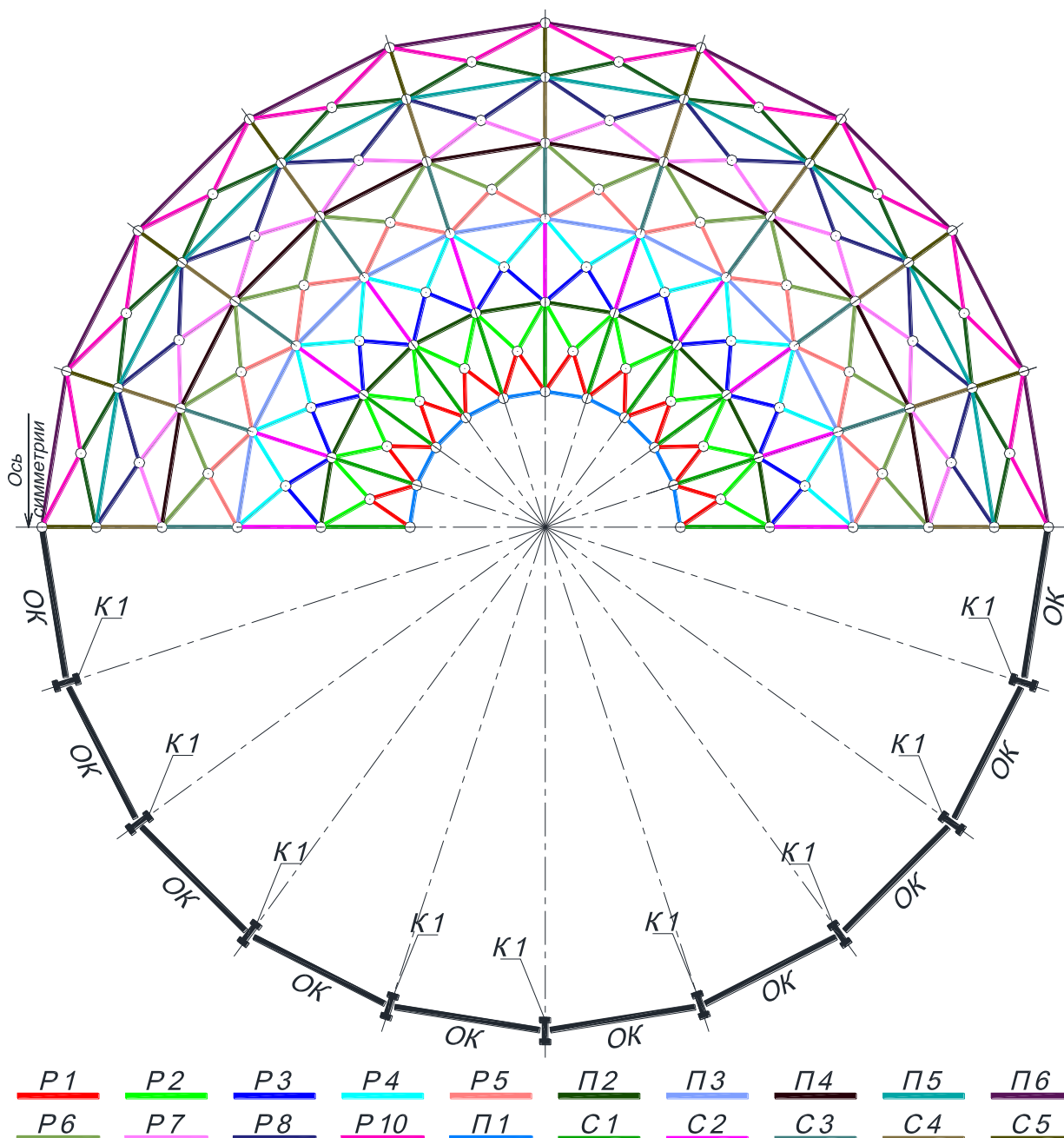


Рисунок 1. Схема расположения элементов покрытия ледового дворца, колонн и опорного контура

При разработке проекта принята поэлементная схема сборки всего купола на подмостях. Затем собранный купол целиком устанавливается в проектное положение стреловым краном. Параллельно со сборкой купола на подмостях выполняется возведение остальных конструкций здания. Поэтому для расчета точности покрытия принята поэлементная сборка. Исследование

сборочных отклонений покрытия подразумевает расчет его точности статистическим методом как пространственной размерной цепи с несколькими замыкающими звеньями. Для определения отклонений (расчета точности) использовалась авторская компьютерная программа – вычислительный комплекс «Размерный анализ стержневых конструкций» (BK PACK) [39]. Расчет точности с помощью BK PACK выполняется в такой последовательности:

- определение геометрических размеров покрытия;
- определение линейных размеров отдельных стержней оболочки покрытия;
- ввод координат узлов номинальной формы оболочки;
- назначение допусков в соответствии с выбранным классом точности;
- собственно расчет точности и анализ результатов расчета.

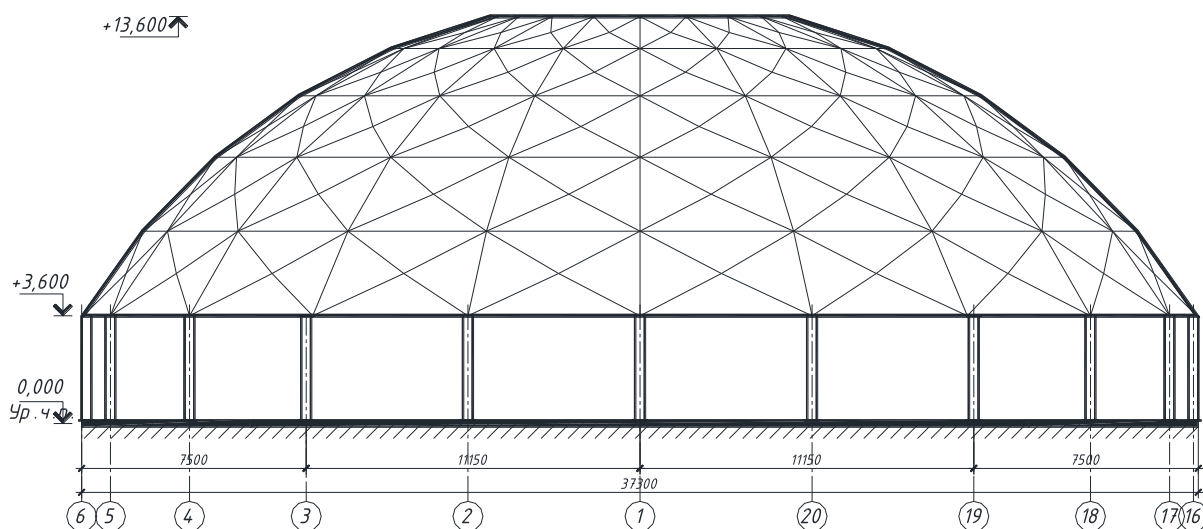


Рисунок 2. Общий вид ледового дворца

В основу BK PACK заложен алгоритм геометрического моделирования, основанный на решении таких алгебраических уравнений как пересечение прямой и окружности, двух окружностей, трех сфер и др. Для определения и анализа НДС покрытия с учетом монтажных воздействий выполнен его расчет на восприятие указанных воздействий. Также выполнен статический расчет покрытия на действие эксплуатационных воздействий – постоянной и временной нагрузок для г. Донецк. Моделирование отклонений в стержнях выполнено температурным воздействием, которое действует вдоль замыкающих стержней покрытия. Замыкающие стержни (звенья пространственной размерной цепи) – стержни, вызывающие появление сборочных (монтажных, начальных) усилий при их соединении с ранее собранной частью покрытия. Замыкающие стержни при различной технологической последовательности представлены красным цветом на рисунках 3 и 4.

Монтажная нагрузка – нагрузка от сборочных отклонений, которые определены из расчета точности с помощью BK PACK. Величину температурной нагрузки, при которой элемент увеличится в длину, определяем по формуле 4.23 [40]:

$$\Delta t = \delta_i / (\alpha_i \times l_i), \quad (1)$$

где  $\Delta t$  – величина температурного воздействия, необходимая для перемещения стержня на единицу длины;

$\delta_i$  – величины перемещения в стержне оболочки, полученные из расчета собираемости;

$\alpha_i$  – коэффициент линейного расширения материала (сталь) стержня,  $\alpha_i = 0,12 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}$ ;

$l_i$  – номинальная длина стержня оболочки по проекту.

Ввиду того, что узел примыкания элементов блока покрытия выполнен в виде шарнира, в качестве типа элемента в SCAD принят элемент пространственной фермы. Сечение элементов сети покрытия на начальном этапе принято по гибкости  $\lambda = 120$ , радиальных ребер –  $\lambda = 60$ .



#### 4. Анализ результатов исследования отклонений

В результате расчета точности исследуемого покрытия получены отклонения узлов от их проектных значений в нормальном ( $dZ$ ), меридиональном ( $dY$ ) и тангенциальном ( $dX$ ) направлении. Статистическая оценка отклонений производилась на основе 2000 серий испытаний, которые отличались друг от друга последовательностью сборки. Номинальное положение узлов оболочки получено путем обработки файлов формата \*.dwg в программе AutoCAD Civil-3D 2013. Расчетная схема купольного покрытия ледового дворца состоит из 219 узлов и 619 стержней. Технологическая схема сборки купольного покрытия в направлении край – центр (КЦ) – вариант 1 – дана на рисунке 3; от центра к краю (ЦК) – вариант 2 – на рисунке 4. Замыкающие стержни – стержни, выполняющие роль замыкающих звеньев в пространственной размерной цепи [38].

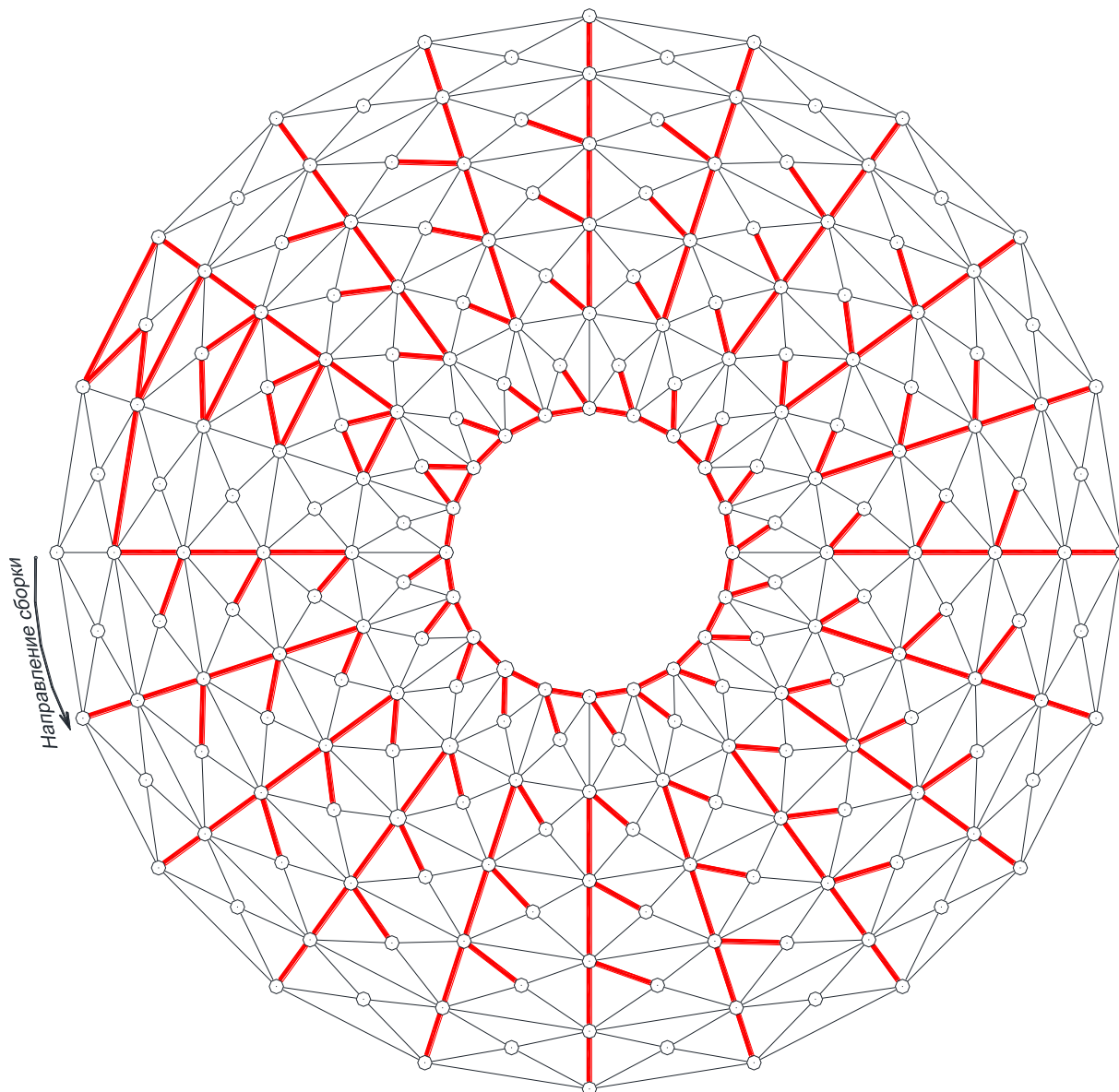
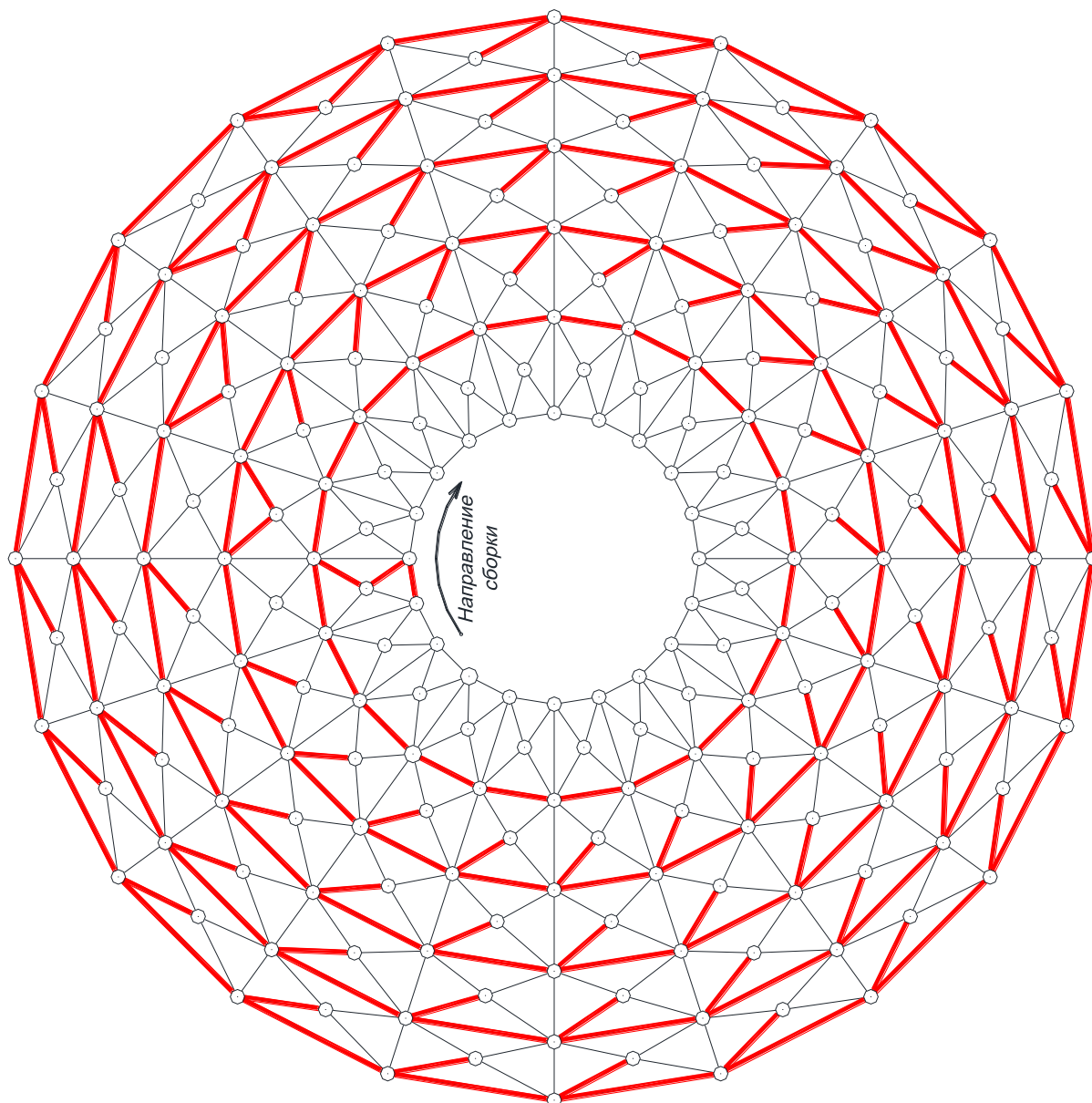


Рисунок 3. Схема расположения замыкающих стержней (звеньев) при сборке покрытия в направлении от опорного контура к центру (КЦ)



**Рисунок 4. Схема расположения замыкающих стержней (звеньев) при сборке покрытия в направлении от центра к краю (ЦК)**

Необходимо обратить внимание на то, что точность возведения исследуемого купольного покрытия зависит от точности изготовления всех элементов ввиду того, что они работают и собираются совместно. Поэтому для статистического исследования возможных погрешностей возведения купольного покрытия выполнен расчет точности всего покрытия целиком. Допускаемые отклонения расчетных геометрических параметров приняты по 1–4 классам точности и для линейных размеров конструкций, изготавливаемых в кондукторах согласно [41].

В таблице 1 приведены значения отклонений отдельных узлов и стержней исследуемого покрытия при сборке от края к центру (КЦ) и от центра к краю (ЦК) только согласно [41]. В таблице 1 видно, что увеличение количества узлов в направлении сборки увеличивает отклонения в узлах и стержнях покрытия. В действительности отклонения при сборке покрытия будут тем или иным способом устраняться. Поэтому при исследовании отклонений вводился «режим корректировки отклонений», предусмотренный в ВК РАСК. Применение режима корректировки положения элементов при монтаже покрытия приводит к снижению отклонений от проектного положения как в замыкающих звеньях, так и в остальных элементах оболочки. Наибольшие отклонения наблюдались в нормальном направлении покрытия.

Таблица 1. Предельные отклонения в покрытии при разных технологиях сборки, мм

Узел	СКО dX	СКО dY	СКО dZ	Стержень	Линейное отклонение	Узел	СКО dX	СКО dY	СКО dZ	Стержень	Линейное отклонение
Монтаж КЦ						Изготовление КЦ					
16	74,4	25,4	49,0	135	271,8	16	13,4	4,9	9,3	135	49,6
27	29,4	88,9	44,2	138	289,6	27	5,3	16,1	8,2	138	52,8
23	56,6	61,5	50,7	259	273,3	78	4,7	13,4	10,6	259	50,9
Монтаж ЦК						Изготовление ЦК					
49	180,1	33,0	21,0	539	527,19	46	40,1	5,8	5,5	539	187,62
1	29,7	154,8	14,2	407	499,86	83	25,9	45,6	13,7	407	170,43
163	46,0	31,6	154	275	560,46	163	20,3	7,8	70,3	275	189,36

Наибольшие зазоры имеют узлы в ключе покрытия – это обусловлено накоплением погрешностей при выполнении сборки стержней в конструктивную форму. Для объяснения этого факта в таблице 1 приведена сравнительная информация о предельных величинах зазоров и отклонений узлов в опорной части покрытия и ключе. Из таблицы 1 видно, что предельные величины отклонений по всем направлениям покрытия превышают нормативные значения более чем в 5 раз. Такие величины отклонений обусловлены проявлением процесса неизбежного накопления отклонений в стержнях (блоках) при их сборке. Отклонения узлов при монтаже сооружения по характеру распределения согласуются с нормальным законом распределения. Из результатов расчета точности видно, что с увеличением количества узлов по направлению сборки увеличиваются отклонения в узлах и стержнях покрытия – это вызвано накоплением отклонений при выполнении сборки стержней в конструктивную форму и подтверждает общие положения теории размерных цепей [38].

Наибольшие отклонения выявлены в ключе покрытия. Для обеспечения стопроцентного уровня собираемости исследованного покрытия и снижения сборочных усилий до нуля требуется разработка конструктивно-технологических и других мероприятий в виде системы конструктивно-технологических мероприятий. Однако для обоснования необходимости разработки конструктивных мероприятий дополнительно рекомендуется оценить НДС покрытия с учетом монтажных воздействий – сборочных усилий.

## 5. Анализ результатов исследования монтажных воздействий

Результаты расчета покрытия приведены для отдельных стержней в виде гистограмм на рисунках 5 и 6. На гистограммах даны усилия от расчетных нагрузок ( $N_{эп.}$ ) и суммарные ( $N_1$ ,  $N_2$ ) – расчетные с учетом монтажных усилий. Поясним обозначения, принятые на гистограммах (рис. 5, 6):

- 1 – усилие в элементе от расчетного действия нагрузок ( $N_{эп.}$ );
- 2 – усилие в элементе от отклонений изготовления при сборке КЦ ( $N_1$ );
- 3 – усилие в элементе от отклонений изготовления при сборке ЦК ( $N_2$ ).

Несущая способность элемента показана на гистограмме как  $N_{max}$ . На гистограммах показано изменение величин сборочных (монтажных) усилий по отношению к несущей способности стержней. Прочность стержня на каждой гистограмме принята равной несущей способности его сечения. Величина сборочного усилия показана в виде суммарного значения  $N_{max}$  и  $N_1$  или  $N_2$  (см. рис. 5).

Например, для раскоса Р1 величина перегрузки сечения от действия сборочного усилия при сборке КЦ  $N_2 = 2,9$ , или 190% (рис. 5). В раскосе Р1 максимальное усилие от расчетной нагрузки составляет  $N_{эп.} = 20$  кН. Максимальная величина монтажного усилия при сборке КЦ составляет  $N_{кц} = 530$  кН. Величина суммарного усилия в Р1 при сборке КЦ составляет  $N_1 = N_{эп.} + N_{кц} = 20 + 530 = 550$  кН, где  $N_{кц}$  – усилие в элементе от отклонений изготовления при технологической схеме сборке КЦ. Аналогично определены величины монтажных (сборочных) усилий во всех остальных элементах оболочки. На гистограммах, которые показаны на рисунке 6, обозначения аналогичные.

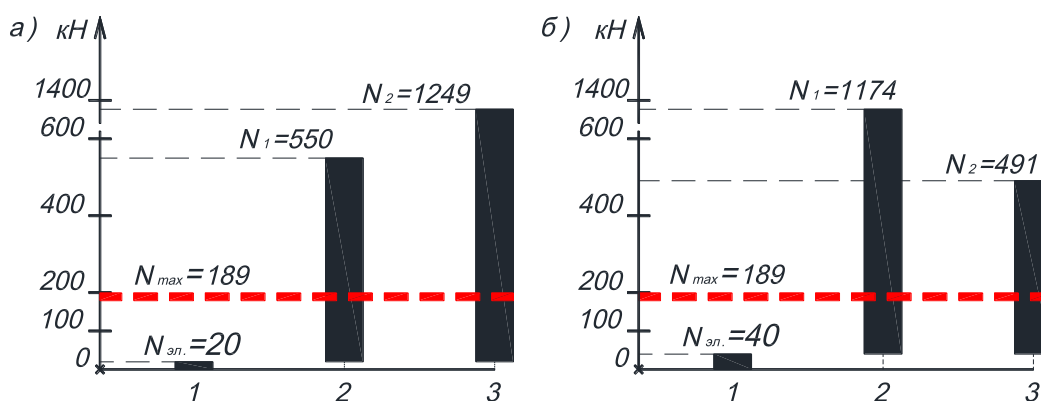


Рисунок 5. Величины усилий: а) в раскосе P1; б) в раскосе P2

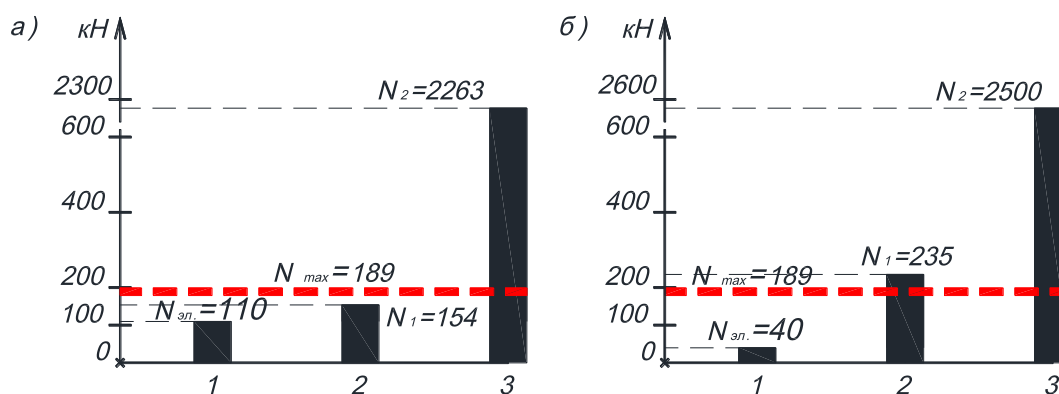


Рисунок 6. Величины усилий: а) в стойке C2, б) в стойке C3

В результате расчета покрытия с учетом сборочных отклонений получены величины сборочных усилий в элементах при сборке от края к центру и от центра к краю. Из анализа результатов расчета установлено, что при монтаже купола появляются элементы несущей способности, которых не достаточно для восприятия суммарного усилия от расчетных и монтажных воздействий, вызванных наличием отклонений. Однако не во всех элементах возникает усилие выше несущей способности элемента.

Следовательно, явное разрушение покрытия не происходит, и потому наличие сборочных усилий в покрытии приводит только к снижению его живучести. При сборке купола по схеме КЦ может разрушиться 163 элемента: P1...P5 – 59 шт., П1...П6 – 104 шт. При сборке по схеме ЦК может разрушиться 124 элемента: P1...P5 – 50 шт., С1...С5 – 74 шт. В связи с этим происходит увеличение деформации и напряжений в оставшихся (работающих) элементах. Однако рекомендуется принять сборку покрытия по схеме ЦК, т.к. при сборке покрытия по схеме КЦ погрешности монтажа больше, чем при сборке по технологии ЦК, а сборочные усилия при обоих вариантах весьма значительные в сравнении с несущей способностью сечения элементов купола. Для исключения влияния отклонений на НДС покрытия предлагается использовать способ монтажа, предложенный авторами [42].

## Выводы

1. Разработанная авторская компьютерная программа – вычислительный комплекс «Размерный анализ стержневых конструкций» для расчета точности стержневых конструкций в вероятностной постановке – позволяет исследовать возможные сборочные отклонения как большепролетных шарнирно-стержневых металлических покрытий различных конструктивных схем и способов возведения, так и других шарнирно-стержневых конструкций (систем).

2. В результате численного статистического исследования купольного покрытия получены среднеквадратические значения возможных отклонений в его узлах и стержнях. Установлено, что предельное значение отклонения присутствует при сборке в направлении ЦК и составляет 180,14 мм, а предельное отклонение в замыкающем звене (стержне) зафиксировано при сборке ЦК и составляет 560,46 мм.

3. Для обеспечения собираемости, живучести исследованного покрытия, повышения его несущей способности и снижения трудоемкости сборки требуется разработка конструктивно-Бондарев А.Б., Югов А.М. Оценка монтажных усилий в металлическом покрытии с учетом сборки

технологических и других мероприятий. Например, рекомендуется использовать способ монтажа, предложенный авторами [42].

### Литература

1. ДБН В.1.2-14-2009. Система обеспечения надежности и безопасности строительных объектов. Общие принципы обеспечения надежности и конструктивной безопасности зданий, сооружений, строительных конструкций и оснований. К.: Сталь, 45 с.
2. ГОСТ 21778-81. Система обеспечения точности геометрических параметров в строительстве. Основные положения. М.: Издательство стандартов, 11 с.
3. Гарифуллин М.Р., Семенов С.А., Беляева С.В., Порываев И.А., Сафиуллин М.Н., Семенов А.А. Поиск рациональной геометрической схемы пространственной металлической конструкции покрытия большепролетного спортивного сооружения // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2014. Том 2. № 17. С. 107–124.
4. Горохов Е.В. Повышение долговечности и надежности металлических конструкций промышленных зданий и сооружений в условиях эксплуатации и реконструкции: Научный доклад доктора технических наук. Днепропетровск: ПГАСА. 90 с.
5. Денисов Е.В. Определение параметров напряженного состояния элементов, эксплуатируемых металлических ферменных конструкций усовершенствованным вибрационным методом: Диссертация кандидата технических наук. Макеевка: ДонНАСА. 2006. 226 с.
6. Назаров Ю.П., Городецкий А.С., Симбиркин В.Н. К проблеме обеспечения живучести строительных конструкций при аварийных воздействиях // Строительная механика и расчет сооружений. 2009. № 4. С. 5–9.
7. Югов А.М., Бондарев А.Б. Оценка живучести однопоясной металлической оболочки покрытия цилиндрической формы вследствие погрешностей изготовления и монтажа // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2013. Volume 9(2). Pp. 124–131.
8. Корчак М.Д. Влияние геометрических несовершенств на несущую способность легких металлических конструкций: Автореферат диссертации доктора технических наук. М.: Электросталь, 1993. 39 с.
9. Югов А.М. Действительная работа металлических решетчатых конструкций с несовершенствами: Диссертация кандидата технических наук. Одесса: ОГАСА, 1988. 200 с.
10. Колесников Г.Н. Статический расчет и формообразование несущих каркасов сетчатых оболочек: Автореферат диссертации кандидата технических наук. Ростов-на-Дону: РГСУ, 1982. 21 с.
11. Ватин Н.И., Кузнецов В.Д., Недвига Е.С. Учет погрешностей монтажа при расчете крупнопанельных зданий // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6. С. 35–40.
12. Конин Д.В. Напряженно-деформированное состояние колонн высотных зданий с металлическим каркасом с учетом неточностей монтажа: Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидат технических наук / ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко. М., 2011. 24 с.
13. Сно В.Е. Статистический анализ погрешностей монтажа колонн каркасных зданий // Строительная механика и расчет сооружений. 1984. №6. С. 5–9.
14. Исаев С.В. Методика оценки линейной модели пространственной размерной цепи для обеспечения взаимозаменяемости объектов производства при сборке: Диссертация на соискание научной степени кандидата технических наук / МГТУ им. Н. Э. Баумана. М., 2007. 204 с.
15. Кашуба Л.А. Геометрия сборки недеформируемых деталей // Системный анализ в науке и образовании: электронный научный журнал. Дубна. 2011. №4. [Электронный ресурс]. Системные требования: Adobe Acrobat Reader. URL: <http://www.sanse.ru/archive/19> (дата обращения: 15.02.2015).
16. Алямовский А.А., Собачкин А.А., Одинцов Е.В., Харитонович А.И., Пономарев Н.Б. Solid Works. Компьютерное моделирование в инженерной практике. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 800 с.
17. Кулябко В.В., Банах В.А., Редченко В.П. Проблемы моделирования динамических нагрузок и расчетных схем сооружений, проведения динамических испытаний и анализа их результатов // Башенные сооружения: материалы, конструкции, технологии. 2009. №3(83). С. 84-89.
18. Белостоцкий А.М., Павлов А.С. Комплексное конечноэлементное моделирование НДС и устойчивости сетчатой оболочки покрытия большепролетного сооружения с эластомерными опорами // International journal for computational civil and structural engineering. 2014. Vol. 10(3). С. 64–70.
19. Павлов А.С. Численное моделирование нелинейных процессов разрушения конструкций большепролетных сооружений: Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидат технических наук. М.: МГСУ. 2011. 24 с.

20. Перельмутер А.В. Проверка устойчивости конструкций, расчет которых выполняется с учетом стадийности монтажа // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2014. Vol. 10(4). С. 22–28.
21. Буюкас В.И. Статически определимые регулируемые структуры и их приложения в технических задачах космической астрономии: Диссертация доктора технических наук. М.: ФИАН, 2004. 190 с.
22. Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Поляков С.В., Ульянов С.В. Модели сейсмостойкости сооружений. М.: Наука. 1979. 252 с.
23. Ларионов В.В., Молчанов А.А., Калашников Г.В. Металлические конструкции наземного оборудования, разработанные ЦНИИПСК им. Мельникова для космических стартов // Промышленное и гражданское строительство. 2005. № 10. С. 60–63.
24. Абовский Н.П. Управляемые конструкции. Учебное пособие. Красноярск: КамКрас, 1998. 433 с.
25. Farrar C.R., Worden K., Todd M. D., Park G., Nichols J., Adams D. E., Bement M. T., Farinholt K. Impacts of artificial intelligence and optimization on design, construction and maintenance. Los Alamos, New Mexico: Los Alamos. National Laboratory, 2007. 143 p.
26. Gantes C.J., Connor J.J., Lwxher R.D., Rosenfeld Y. Structural analysis and design of deployable structures // Computers and Structures. 1989. Vol. 32(3-4). Pp. 661–669.
27. Gaul L., Albrecht H., Wirtzinger J. Semi-active friction damping of large space truss structures // Shock and Vibration. 2004. Vol. 11. Pp. 173–186.
28. Hasan R., Xu L., Grierson D. E. Push-over analysis for performance-based seismic design // Computers and Structures. 2002. № 80. Pp. 2483–2493.
29. Kartal M.E., Basaga H.B., Bayraktar A., Muvafik M. Effects of semi-rigid connection on structural responses // Electronic Journal of Structural Engineering. 2010. Vol. 10. Pp. 22–35.
30. Kaveh A., Nouri M. Weighted graph products for configuration processing of planar and space structures // International Journal of Space Structures. 2009. Vol. 24. №1. Pp. 13–26.
31. Matsumoto K., Wakabayashi S., Nouni M., Yoshida T., Ueno H., Fukase Y. Space Truss Handling Experiment on ETS-VII // Automation and Robotics in Construction XVI. UC3M. 1999. Pp. 225–230.
32. Keleşoğlu O., Ulker M. Fuzzy optimization of geometrical nonlinear space truss design // Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences. 2005. Vol. 80, № 5. Pp. 321–329.
33. Preumont A. Vibration control of active structures: an introduction. 2-nd Edition. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002. 385 p.
34. Tokunbo Ogunfunmi Adaptive Nonlinear System Identification. The Volterra and Wiener Model Approaches. USA: Springer Science+Business Media, LLC, 2007. 229 p.
35. Kim H.M., Bartkovicz T.J. Damage detection and health monitoring of large space structures // Proceedings of the 34th AIAA SDM Conference. La Jolla, California, April, 1993. Pp. 3527–3533.
36. Pearson J.E., Hansen S. Experimental Studies of a Deformable-Mirror Adaptive Optical System // Journal of Optical Society America. 1977. № 67. Pp. 360–369.
37. Рабинович И. М. Курс строительной механики стержневых систем. Часть II. Статически неопределимые системы. 2-е издание, переработанное. М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. 544 с.
38. ГОСТ 21780-2006. Система обеспечения точности геометрических параметров в строительстве. Расчет точности. М.: Издательство стандартов. 13 с.
39. А.с. 47952 Украина. Компьютерная программа «Вычислительный комплекс «Размерный анализ стержневых конструкций» («ВК РАСК») / А. Б. Бондарев, А. М. Югов (Украина). № 48382; заявлено 20.12.2012; опубликовано 20.02.2013, Бюллетень № 1. 2 с.
40. Беляев Н.М. Сопrotивление материалов. М.: Наука, 1965. 856 с.
41. ДБН В.2.6-163-2011. Строительные материалы и конструкции. Стальные конструкции. Нормы проектирования, изготовления и монтажа. К.: Укрархстроинформ, 2011. 215 с.
42. Пат. №79680 Украина, МПК E04B 1/32; E04B 1/58 Способ монтажа большепролетных стержневых металлических покрытий [Текст] / Бондарев А. Б., Югов А. М.; заявитель и патентообладатель Бондарев А. Б., Югов А.М. № u 2012 13187; заявл. 19.11.2012; опубл. 25.04.2013, Бюл. № 1. 5 с.

*Алексей Борисович Бондарев, Макеевка, Украина  
Тел. моб.: +7(914)8645290; эл. почта: bondarev\_a\_b\_rus@mail.ru*

*Анатолий Михайлович Югов, Макеевка, Украина  
Тел. моб.: +7(931)5797054; эл. почта: amyrus@mail.ru*

© Бондарев А.Б., Югов А.М., 2015

doi: 10.5862/MCE.56.5

## Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения

*Д-р физ.-мат. наук, профессор М.Н. Кирсанов,  
Национальный исследовательский университет "МЭИ"*

**Аннотация.** В системе компьютерной математики Maple методом индукции получено аналитическое выражение для прогиба фермы с введенным дополнительным поясом жесткости.

Выбрана плоская балочная модель фермы, равномерно нагруженная вертикальными нагрузками по нижнему поясу. Жесткости стержней приняты одинаковыми. Элементы упрочнения представляют собой горизонтальные стержни и стойки, образующие дополнительный пояс снизу фермы. Усилия в стержнях определяются в аналитической форме методом вырезания узлов. Статическая неопределенность, которая создается за счет введения элементов упрочнения, раскрывается методом сил. Коэффициенты канонического уравнения и прогиб середины пролета в нижнем поясе находятся по формуле Максвелла – Мора.

Построены графики зависимости прогиба от размеров фермы и числа панелей. Найдены асимптотические свойства этих зависимостей, позволяющие оптимизировать конструкцию.

**Ключевые слова:** ферма; прогиб; упрочнение; метод индукции; точное решение; Maple

### Введение

Если прочность балочной фермы является абсолютным требованием к ее конструкции, то параметры необходимой жесткости зависят от назначения фермы. Так, например, жесткость фермы, предназначенной для мостов с рельсовым транспортом, должна быть существенно больше, чем для пешеходных мостов или кровельных покрытий [1, 2]. Одним из способов увеличения жесткости балочной фермы является введение дополнительного пояса [3]. В настоящей работе проводится аналитическое исследование влияния дополнительного пояса на деформации фермы. Методом индукции [4–6] находится решение, зависящее от геометрических параметров конструкции и числа панелей.

Ферма состоит из  $2n$  панелей и упрочняющей конструкции из  $2n - 1$  стоек, расположенных под нижним поясом, двух раскосов и  $2n - 2$  горизонтальных стержней. Упрочняющая конструкция делает ферму один раз статически неопределенной. Действительно, в такой ферме  $m + 3$  стержней, включая 3 опорных стержня, моделирующих шарнирные опоры, где  $m = 12n$ , и  $k = 6n + 1$  узлов, дающих  $12n + 2$  уравнений равновесия. Таким образом, число стержней  $m + 3 = 12n + 3$  на один больше числа уравнений статики.

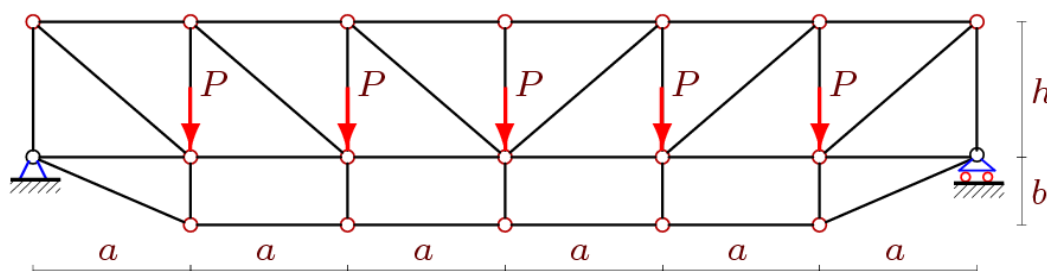


Рисунок 1. Ферма.  $n = 3$

## Расчет

Статическую неопределенность раскрываем методом сил. В качестве основной системы примем ферму с одним удаленным стержнем из пояса упрочнения (рис. 2). Для определения усилий в стержнях фермы используем метод вырезания узлов.

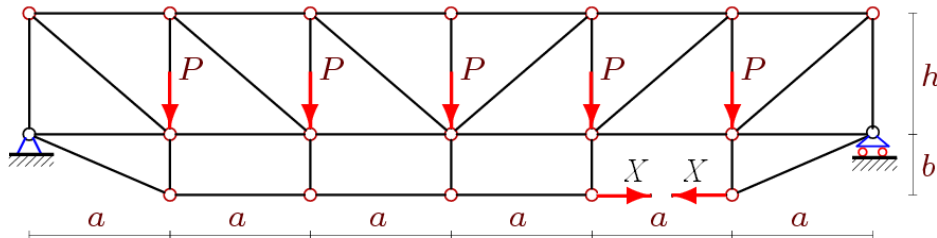


Рисунок 2. Основная система

Пронумеруем шарниры фермы (нижний пояс слева направо, затем верхний пояс). Выбирая начало координат в левой неподвижной шарнирной опоре, получим:

$$x_i = x_{i+2n+1} = (i-1)a, \quad y_i = 0, \quad y_{i+2n+1} = h, \quad i = 1, \dots, 2n+1,$$

$$x_{i+4n+2} = ia, \quad y_{i+4n+2} = -b, \quad i = 1, \dots, 2n-1.$$

Конфигурацию стержней решетки фермы представим условными векторами  $\bar{V}_i, i = 1, \dots, m$ , координатами которых являются номера шарниров по их концам. Отметим, что направления этих векторов просто определяют структуру соединений стержней в ферме и никак не связаны со знаками усилий в стержнях.

Для стержней нижнего пояса имеем следующие векторы:  $\bar{V}_i = [i, i+1], i = 1, \dots, 2n$ ;

стержни верхнего пояса:  $\bar{V}_{i+2n} = [i+1+2n, i+2+2n], i = 1, \dots, 2n$ ;

раскосы решетки:  $\bar{V}_{i+4n} = [i+1, i+2n+1], \bar{V}_{i+5n} = [i+n, i+3n+2], i = 1, \dots, n$ ;

стойки решетки  $\bar{V}_{i+6n} = [i, i+2n+1], i = 1, \dots, 2n+1$ ;

стойки упрочняющей конструкции:  $\bar{V}_{i+8n+1} = [i+1, i+4n+2], i = 1, \dots, 2n-1$ ;

пояс упрочняющей конструкции:  $\bar{V}_{i+10n} = [i+4n+2, i+4n+3], i = 1, \dots, 2n-3$ ;

боковые раскосы упрочняющей конструкции:  $\bar{V}_{12n-2} = [1, 4n+3], \bar{V}_{12n-1} = [2n+1, 6n+1]$ .

Для вычисления направляющих косинусов, входящих в уравнения равновесия узлов фермы в проекциях на оси координат, потребуются длины стержней и проекции их векторных представлений на эти оси:

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, \quad l_{1,i} = x_{V_{2,i}} - x_{V_{1,i}}, \quad l_{2,i} = y_{V_{2,i}} - y_{V_{1,i}}, \quad i = 1, \dots, m_0,$$

где  $m_0 = m + 3$  – число стержней фермы, включая три стержня, которые моделируют неподвижную и подвижную опоры. Первый индекс в номере  $V_{j,i}$  означает номер компоненты вектора  $\bar{V}_i$ , второй – номер стержня. Матрица направляющих косинусов  $\mathbf{G}$  имеет следующие элементы:

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,2} - 2 + j, \quad k \leq m_0, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m_0,$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,1} - 2 + j, \quad k \leq m_0, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m_0.$$

Задача определения усилий в стержнях фермы сводится к решению системы линейных уравнений, которую запишем в матричной форме:

$$\mathbf{G}\bar{S} = \bar{B}.$$



Здесь  $\bar{S}$  – вектор неизвестных усилий,  $\bar{B}$  – вектор нагрузок длиной  $m_0$ . Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу  $i$ , записываются в нечетные элементы  $B_{2i-1}$ , вертикальные – в четные  $B_{2i}$ . Для ускорения счета решение находим с помощью обратной матрицы  $\bar{S} = \mathbf{G}^{-1}\bar{B}$ . Этот метод хорошо реализуется в системе **Maple** [7] и не требует повторного решения системы при изменении нагрузки. В поставленной задаче таких нагрузок три: внешняя нагрузка от  $2n-1$  вертикальных сил, единичные силы по направлению неизвестных  $X$  и единичная сила в середине пролета фермы для определения прогиба.

Введем обозначение для усилий в стержнях фермы. От внешней нагрузки –  $S_{i,P}$ , усилия от единичной нагрузки, вдоль неизвестных  $X$  –  $S_{i,X}$ ,  $i=1, \dots, m$ , усилия от единичной вертикальной нагрузки, приложенной к центральному узлу в середине пролета, –  $s_i$ . Для упрощения решения учтем симметрию задачи и определим усилия в стержнях только в половине пролета.

Применим метод индукции. Последовательно решая в символьной форме поставленную задачу для ферм с 1, 2, 3 и т. д. панелями в половине пролета, определяем сначала последовательности целочисленных коэффициентов перед соответствующими выражениями, а затем и их общие члены при  $i=1, \dots, n$ .

Для стержней нижнего пояса имеем:

$$S_{i,P} = P \frac{a(i-1)(2n-i+1)}{2h}, \quad s_i = -\frac{a(i-1)}{2h}, \quad S_{i,X} = -\frac{h+b}{h}, \quad S_{1,X} = -1;$$

в стержнях верхнего пояса:

$$S_{i+2n,P} = -P \frac{ai(2n-i)}{2h}, \quad s_{i+2n} = \frac{ai}{2h}, \quad S_{i+2n,X} = \frac{b}{h}.$$

Нисходящие раскосы:

$$S_{i+4n,P} = -P \frac{ci(2n-2i+1)}{2h}, \quad s_{i+4n} = -\frac{c}{2h}, \quad S_{i+4n,X} = 0, \quad S_{1+4n,X} = -\frac{bc}{ah};$$

стойки:

$$S_{i+6n,P} = -P \frac{i(2n-2i+1)}{2}, \quad s_{i+6n} = \frac{1}{2}, \quad S_{i+6n,X} = 0, \quad S_{1+6n,X} = \frac{b}{a}.$$

Усилия в упрочняющей конструкции. В стойках:

$$S_{i+8n+1,P} = s_{i+8n+1} = S_{i+8n+1,X} = 0, \quad S_{8n+2,X} = -\frac{b}{a}.$$

В двух боковых раскосах:

$$S_{12n-2,P} = Pd/a, \quad s_{12n-2} = S_{12n-2,X} = 0;$$

в горизонтальных стержнях ( $i=1, \dots, n-2$ ):

$$S_{i+10n,P} = s_{i+10n} = 0, \quad S_{i+10n,X} = 1.$$

Коэффициенты канонического уравнения метода сил  $\delta_1 X + \Delta_p = 0$  определяем по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta_p = \sum_{k=1}^m \frac{S_{k,P} S_{k,X} l_k}{EF}, \quad \delta_1 = \sum_{k=1}^m \frac{S_{k,X}^2 l_k}{EF}.$$

Принимаем, что жесткости  $EF$  всех стержней одинаковые, опорные стержни недеформируемые. Из канонического уравнения находим неизвестное усилие

$$X = -\frac{\Delta_P}{\delta_1} = \frac{Pa(a^3(\Phi_n h + \Psi_n b) + (2n-1)(c^3 + h^3)b)}{2(a^3(2n-1)(h^2 + b^2) + 2(n-1)hba^3 + b^2(c^3 + h^3) + h^2(b^3 + d^3))}, \quad (1)$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ , а  $\Phi_n = n(n-1)(4n+1)/6$  и  $\Psi_n = n(4n^2-1)/3$  – общие члены последовательностей 3, 13, 34, 70, 125, 203, 308, 444 и 10, 35, 84, 165, 286, 455, 680, 969, которые получены из решения одного и того же рекуррентного уравнения

$$\Phi_n = 4\Phi_{n-1} - 6\Phi_{n-2} + 4\Phi_{n-3} - \Phi_{n-4}$$

при разных начальных условиях. Однородное рекуррентное уравнение получено с помощью оператора **rgf\_findrecur** из состава пакета **genfunc** системы компьютерной математики **Maple**. Решение уравнения дает оператор **rsolve**.

Усилия в стержнях статически неопределимой фермы находим по формуле

$$T_k = S_{k,P} + X S_{k,X}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Имея аналитические выражения усилий во всех стержнях статически неопределимой фермы, можно определить прогиб фермы как функцию ее размеров и числа панелей. Прогиб центрального узла нижнего пояса фермы определяем по формуле Максвелла – Мора:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{EF} \sum_{k=1}^m T_k s_k l_k = \frac{1}{EF} \sum_{k=1}^m (S_{k,P} + X S_{k,X}) s_k l_k = \frac{1}{EF} \sum_{k=1}^m S_{k,P} s_k l_k + X \sum_{k=1}^m S_{k,X} s_k l_k = \\ &= P \frac{A_n a^3 + n^2(c^3 + h^3)}{2h^2} + X \frac{2b(n^2 a^3 + c^3 + h^3) + a^3 h n(n-1)}{2ah^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где коэффициент  $A_n = n^2(1+5n^2)/6$  есть общий член последовательности 1, 14, 69, 216, 525, 1086, 2009, 3424, 5481, 8350..., удовлетворяющий рекуррентному уравнению

$$A_n = 5A_{n-1} - 10A_{n-2} + 10A_{n-3} - 5A_{n-4} + A_{n-5}.$$

Отметим нестандартный для подобных задач способ получения второго слагаемого в выражении (2). Прямой способ – метод обобщения результата с применением операторов пакета **genfunc** – дает при последовательном вычислении прогиба в окончательном виде весьма громоздкие на каждом этапе выражения с большим числом слагаемых, за коэффициентами которых уследить трудно. Значительно проще оказался метод суммирования найденных усилий, функционально зависящих от числа панелей  $n$  и размеров фермы, с помощью оператора суммирования **sum**. Кроме того, легко заметить, что первое слагаемое в (2) – это прогиб статически определимой фермы без упрочняющей конструкции внизу фермы (рис. 3). Аналогичная задача для статически определимых ферм с нагрузкой в середине пролета решена (также в символическом виде) в [8, 9].

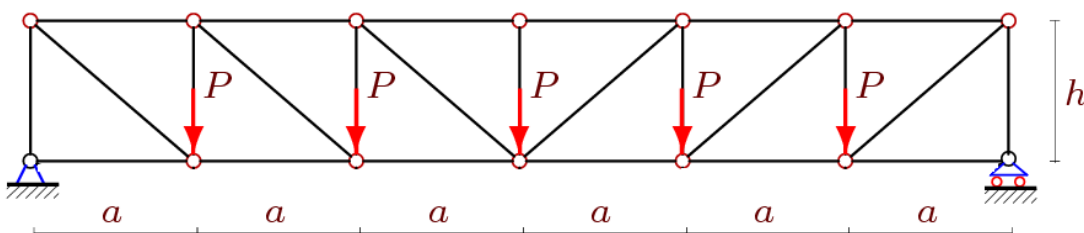


Рисунок 3. Статически определимая ферма,  $n = 3$  (базовая схема)

### Анализ решения

Ценность аналитических решений не только в их простоте, точности и в возможности использования решений в качестве тестовых при отладке сложных численных методов и пакетов, учитывающих многочисленные параметры фермы [10–16]. Аналитическое представление решения позволяет провести его анализ, в том числе и предельный анализ. В частности, значение неизвестной  $X$  метода сил (фактически, усилие в горизонтальных стержнях дополнительного пояса) при увеличении числа панелей и фиксированной длине пролета  $L = 2an$  имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X = \frac{PLh}{b(b+h)}.$$

В этих же условиях (длина пролета фиксирована) имеем еще один предел:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} X = \frac{PL(2n-1)}{2bn}.$$

Зависимость усилия  $X(b)$  от высоты нижнего (дополнительного) пояса  $b$  обнаруживает максимум (рис. 4). Аналитическое выражение этой величины в компактной форме найти не удается, но другая характерная точка этого графика при  $b = 0$  имеет простой вид:

$$X(0) = \frac{PL(4n+1)(n-1)}{24hn}.$$

На рисунке 5 даны графики зависимости (2) относительного прогиба  $\tilde{\Delta} = \Delta EF / P$  от числа панелей, а на рисунке 6 – графики зависимости прогиба от высоты фермы  $h$ . Имеется асимптота при  $h \rightarrow \infty$ .

$$\tilde{\Delta} = Kh + C, \quad K = (n-1)^2, \quad C = (2n-1)(n^3b^2(b+d) + L^2(nd + L(2n-1))) / (2n^3b^2).$$

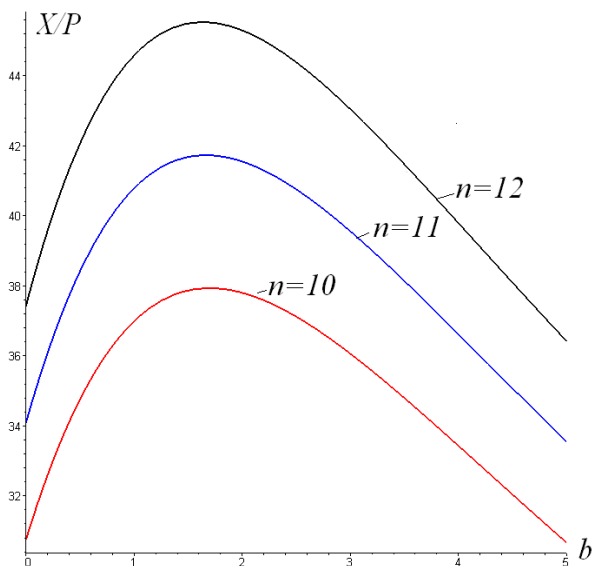


Рисунок 4. Зависимость усилия  $X(b)$  от высоты нижнего пояса  
 $L = 2an = 80 \text{ м}$ ,  $h = 4 \text{ м}$

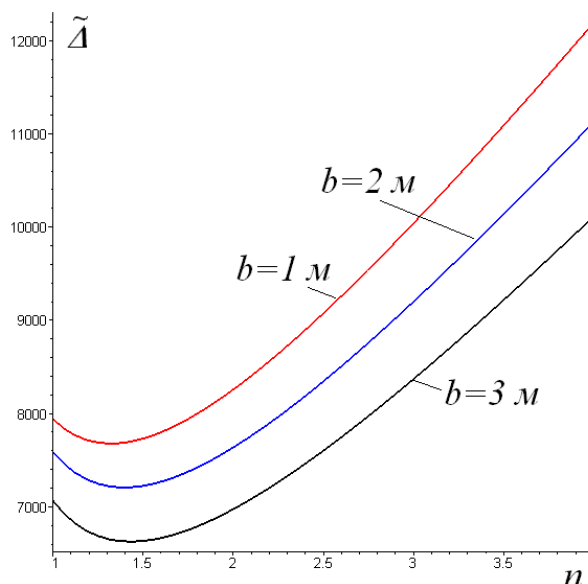


Рисунок 5. Зависимость прогиба от высоты фермы,  $L = 2an = 80 \text{ м}$ ,  $h = 8 \text{ м}$

Для сравнения прогиба фермы с введенными упрочняющими элементами и базовой фермы (статически определимой) на рисунке 7 приведены соответствующие кривые. С увеличением высоты фермы упрочняющее влияние дополнительных элементов падает.

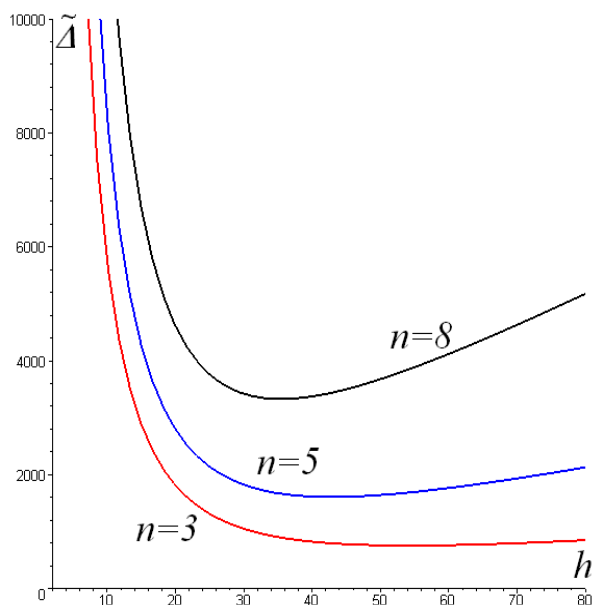


Рисунок 6. Зависимость прогиба от высоты фермы  $L = 80\text{ м}$ ,  $b = 8\text{ м}$

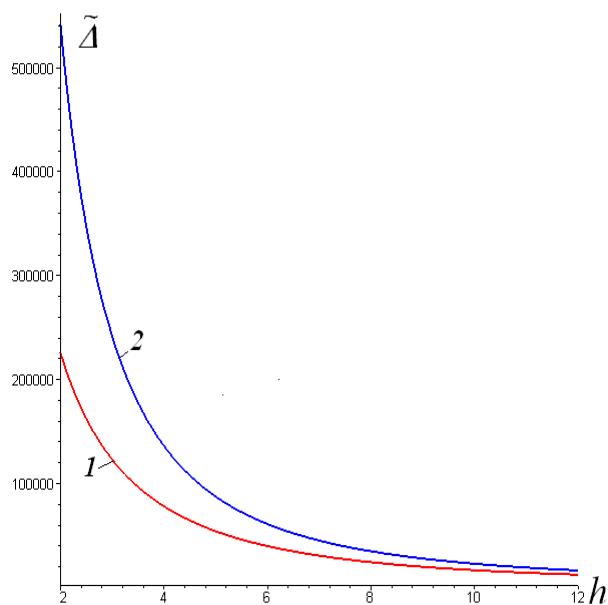


Рисунок 7. 1 – ферма с дополнительным поясом,  $L = 80\text{ м}$ ,  $b = 2\text{ м}$ ,  $n = 10$ , 2 – базовая схема  $L = 80\text{ м}$ ,  $n = 10$

### Выводы

Приведенное решение показало, прежде всего, возможность получения достаточно простого замкнутого аналитического решения для задачи о прогибе статически неопределимой фермы нестандартной конфигурации и с большим числом стержней. Выбранная нагрузка (равномерная по нижнему поясу) моделирует в какой-то степени реальные нагрузки на ферму, встречающиеся в инженерной практике. По сравнению с уже известными решениями для ферм (плоских и пространственных) в этой задаче применен иной метод получения коэффициентов в формуле для прогиба.

Связано это с двумя этапами решения, обязательными для статически неопределимых систем: сначала надо раскрыть статическую неопределимость, применяя метод индукции, затем, имея громоздкую формулу для неизвестной  $X$  метода сил, попытаться (также аналитически) найти прогиб. Именно на втором этапе лучше применить метод суммирования выражений, входящих в формулу Максвелла – Мора. Метод же индукции здесь весьма трудоемок. Число последовательностей различного вида коэффициентов значительно, решение становится труднообозримым.

Отметим также, что в данной задаче содержатся три параметра, характеризующих размеры фермы и число панелей. Для оптимального выбора их набора во избежание простого перебора можно применить генетические алгоритмы [17–19] и алгоритмы, аналогичные муравьиным [20].

### Литература

1. Bacinskas D., Kamaitis Z., Jatulis D., Kilikevicius A. Field Testing of Old Narrow-Gauge Railway Steel Truss Bridge // Procedia Engineering. 2013. Vol. 57. Pp. 136–143.
2. Овсянников М.Ю., Кузнецова С.Г. Определение расчетного положения подвижной нагрузки фермы железнодорожного моста // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. 2013. №2. С. 62–67.
3. Воробьев А.В., Фаизов И.Н. Проектирование усиления раскосной фермы // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. 2012. №1. С. 162–168.
4. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.

5. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. №1(53). С. 32–38.
6. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №6. С. 2–6.
7. Кирсанов М.Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
8. Жакетов Д.Д., Яцков В.Б. Прогиб плоской балочной фермы с треугольной решеткой // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 7. Тамбов, 2014. С. 34–36.
9. Бадертдинов Р.Р. Формула для прогиба плоской балочной фермы // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г. Часть 7. Тамбов, 2014. С. 21–22.
10. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54. Issue 4. Pp. 756–782.
11. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics. 2005. Vol. 85. No. 9. Pp. 607–617.
12. Pholdee N., Bureerat S. Comparative performance of meta-heuristic algorithms for mass minimisation of trusses with dynamic constraints // Advances in Engineering Software. 2014. Vol. 75. Pp. 1–13.
13. Kaveh A, Shahrrouzi M., Farshi B., Alinia-ziazi A. Sizing optimization of truss structures by method of centers and force formulation // International Journal of Solids and Structures. 2010. Vol. 47. Pp. 2508–2524.
14. Казусь А.К., Степаненко А.Н. Исследование влияния величины расцентровки узлов на усилия в элементах фермы типа «Хабаровск» // Ученые заметки ТОГУ. 2013. Т. 4. №2. С. 30–35.
15. Toklu Y.C., Bekdas G., Temur R. Analysis of trusses by total potential optimization method coupled with harmony search // Structural Engineering and Mechanics. 2013. Vol. 45. No 2. Pp. 183–199.
16. Heyman J. Design of a simple steel truss // Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings. 2010. Vol. 163. No. 1. Pp. 53–56.
17. Cazacu R., Grama L. Steel truss optimization using genetic algorithms and FEA // Procedia Technology Vol. 12. 2014. Pp. 339–346.
18. Optimal structural design family by genetic search and ant colony approach // Engineering Computations. 2008. Vol. 25. Issue 3. Pp. 268–288.
19. Кирсанов М.Н. Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. №2. С. 60–63.
20. Sonmez M. Artificial Bee Colony algorithm for optimization of truss structures // Applied Soft Computing. 2011. Vol. 11. Pp. 2406–2418.

*Михаил Николаевич Кирсанов, г. Москва, Россия*

*Тел. раб.: +7(495)3627314; эл. почта: mpei2004@yandex.ru*

© Кирсанов М.Н., 2015

doi: 10.5862/MCE.56.6

## Определение остаточной несущей способности железобетонных балок по критерию жесткости (прогиба)

*Д.т.н., профессор В.С. Уткин,  
студент С.А. Соловьев;*

*Вологодский государственный университет*

**Аннотация.** В связи с требованиями новых нормативных документов Российской Федерации предложен экспериментально-теоретический метод определения остаточной несущей способности железобетонной балки на стадии эксплуатации по критерию жесткости (прогиба).

Использованы интегральные методы испытаний и вероятностные методы описания случайных величин. Предложена новая методика расчета предельного прогиба по критерию остаточных деформаций. На примере показано использование теории свидетельств Демпстера – Шафера для статистической обработки информации в виде множества интервалов. Приведены варианты согласования предельной нагрузки, полученной по результатам испытаний сосредоточенной силой, с эксплуатационной нагрузкой на балку для различных расчетных схем балок.

**Ключевые слова:** несущая способность; предельная нагрузка; железобетонная балка; прогиб; условие жесткости; случайные величины; доверительный интервал

### *Введение*

Железобетонные балки являются несущими элементами многих конструкций в виде подкрановых балок, балок покрытия и перекрытия и т. д. От их безопасной эксплуатации может зависеть безопасность всей конструкции. По ГОСТ Р 54257-2010 «Надежность строительных конструкций и оснований» несущая способность – это максимальный эффект воздействия, реализуемый в строительном объекте без превышения предельных состояний. В качестве эффекта воздействия обычно используется значение предельной нагрузки, при которой балка по тем или иным критериям работоспособности переходит в запредельное состояние или перестает удовлетворять требованиям безопасности или нормальной эксплуатации. Вступивший в силу с 01.01.2014 межгосударственный стандарт ГОСТ 31937-2011 «Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга» и вступивший в силу с 01.07.2010 Закон РФ №384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений» являются показателями актуальности проблемы безопасности зданий и сооружений. Кроме того, ГОСТ 31937-2011 требует периодически производить оценку категории технического состояния зданий и сооружений, которая заключается в выявлении фактической остаточной несущей способности несущих элементов конструкций. Анализ несущей способности конструкций необходим, чтобы оценить безопасность ее эксплуатации и запас живучести, т. е. способность безопасно функционировать при снижении несущей способности по тому или иному критерию работоспособности. В качестве таких критериев по СП 63.13330.2012 приняты прочность арматуры и бетона балки, жесткость, трещинообразование, ширина раскрытия трещин. Однако, как отмечают авторы в [1, 2], в настоящее время надежных методик оценки остаточной несущей способности несущих элементов по всем критериям работоспособности не существует. Возможно, такое утверждение слишком категорично, но оно близко к реальности. В связи с этим разработка способов оценки остаточной несущей способности железобетонных балок остается актуальной задачей на данный момент, тем более с появлением новых нормативных документов РФ и требований в них по обеспечению безопасной эксплуатации строительных конструкций.

В зависимости от критериев работоспособности балки несущая способность будет характеризоваться различной по значению предельной нагрузкой (мерой несущей способности), а для безопасной и безотказной работы балки принимается наименьшая из них. Рассмотрим методы оценки несущей способности железобетонных балок по критерию жесткости (прогиба) балки. Допускаемый прогиб балок определяется различными требованиями [3]. К ним относятся требование недопущения остаточных деформаций, технологические, физиологические, эстетические и другие требования. В ряде случаев ограничения на значение прогиба балок могут определяться по одному или по нескольким из перечисленных требований. Так, например, ограничение в виде недопущения остаточного прогиба балок нередко относится к предварительно напряженным и сильноармированным балкам.

Уткин В.С., Соловьев С.А. Определение остаточной несущей способности железобетонных балок по критерию жесткости (прогиба)

## Обзор иностранной и отечественной литературы

Способ оценки остаточной несущей способности железобетонной балки по критерию прочности арматуры и бетона был рассмотрен в работе [4]. Определение прогибов железобетонных балочных конструкций с учетом коррозии приведено в работе [5]. В [6] дано определение прогибов многопролетных железобетонных балок при наличии трещин в растянутой зоне бетона балки. Сравнительный анализ прогибов железобетонных балок с трещинами и без трещин приведен в [7]. В работе [8] рассматриваются прогибы железобетонных балок со смешанным армированием при многократно повторяющемся нагружении. Влияние циклов замораживания – оттаивания на прогиб железобетонных балок исследовано в работе [9]. В работе [10] рассматривается влияние усиления железобетонной балки на прогиб. В работе [11] построены диаграммы «нагрузка – прогиб» для железобетонных балок, усиленных торкретированием углепластиковой смеси. Анализ факторов, оказавших влияние на предельный прогиб эксплуатируемой конструкции, приведен в [12]. В [13] оценивается прогиб составных железобетонных балок. В [14] анализируется прогиб железобетонной балки после воздействия на нее огня. В [15] рассмотрены различные способы определения прогибов. В [16] предложен способ оценки остаточной несущей способности балки по критерию жесткости (прогибу) путем построения графиков зависимости прогиба от нагрузки, как показано на рисунке 1.

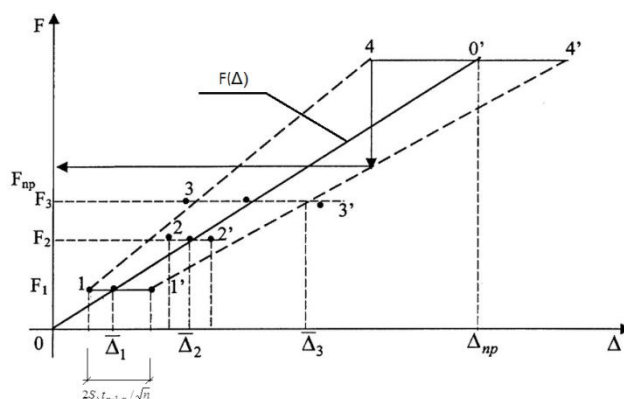


Рисунок 1. Способ определения остаточной несущей способности по критерию прогиба балки по [16]

При этом способе балка нагружается испытательной нагрузкой, различной по значению, в виде сосредоточенной силы  $F_i$  с измерением наибольшего прогиба, и по полученным результатам строят график зависимости нагрузки от прогиба  $F(\Delta)$ , который ограничивается значением предельно допустимого прогиба  $\Delta_{пр}$ , определяемого по СП 20.13330.2011, как показано на рисунке 1. По графику  $F(\Delta)$  с учетом доверительного интервала по прогибу определяют при самом осторожном подходе значение предельной нагрузки. Недостатком данного метода является заниженное значение предельной нагрузки, а также отсутствие количественной оценки безопасной эксплуатации балки при достижении на ней нагрузки, равной предельной. Недостатками также являются дополнительное нагружение балки испытательной нагрузкой  $F_i$ , что небезопасно, отсутствие связи между предельной нагрузкой  $F_{пр}$ , полученной по результатам испытаний балки в виде сосредоточенной силы, и фактическим видом нагружения балки в процессе ее эксплуатации. Ненормированный подход к определению ширины доверительного интервала ( $2S_{\Delta} t_{n-1,\alpha} / \sqrt{n}$ , где  $S_{\Delta}$  – среднее квадратическое отклонение;  $t_{n-1,\alpha}$  – коэффициент Стьюдента;  $n$  – число измерений  $\Delta_i$  при нагрузке  $F_i$ ) также снижает эффективность метода по [16]. Аналогичным способом предложено определять предельную нагрузку и в [17].

## Постановка задачи

Из приведенных выше работ видно, что основным показателем несущей способности железобетонной балки является предельная нагрузка, не приводящая балку по тому или иному критерию работоспособности в запредельное состояние. В большинстве приведенных работ отсутствует количественная оценка влияния прогибов балок на их остаточную несущую способность. Уткин В.С., Соловьев С.А. Определение остаточной несущей способности железобетонных балок по критерию жесткости (прогиба)

способность и на оперативную надежность по безопасности эксплуатации. В данном исследовании предлагается еще один способ определения предельной нагрузки (несущей способности) применительно к железобетонным балкам, в котором отсутствуют перечисленные выше недостатки.

### Описание исследования

Способ заключается в следующем: выявляют место (поперечное сечение) балки с наибольшим прогибом от эксплуатационной нагрузки, вычисленное теоретически или выявленное с помощью высокоточного нивелира и рейки [18]. В этом месте (сечении) устанавливаются 3–4 прогибомера для выявления и измерения наибольшего прогиба от испытательных нагрузок в виде сосредоточенных сил  $F_i$ . Наибольшее значение нагрузки для испытаний балки по условию безопасности  $F_{\max}$  определяют из условия  $M_F \leq M_{F, \text{экс}}$  с учетом вида эпюр изгибающих моментов  $M_F$  и  $M_{F, \text{экс}}$ , где  $M_{F, \text{экс}}$  – наибольший изгибающий момент от эксплуатационных нагрузок вида  $F$ ,  $q$  и т.д., определяемый методами строительной механики;  $M_F$  – изгибающий момент от испытательной нагрузки  $F$ , приложенной в сечении балки, где наибольшее значение  $M_{F, \text{экс}}$ . При этом испытательные нагрузки принимают в виде 3–4 различных значений  $F_i < F_{\max}$ .

Затем балку разгружают соответствующей сосредоточенной силой  $F_i$ . Такую нагрузку можно осуществить с помощью гидравлического домкрата, направляя ее противоположно эксплуатационной нагрузке и собственному весу балки, что обеспечивает безопасность испытаний и не вносит дополнительных неисправностей в балку. После приложения испытательной нагрузки  $F_i$  ее выдерживают на балке для стабилизации деформаций [18]. Затем измеряют прогиб балок известными методами [18, 19 и др.]. Пробное нагружение (разгружение) каждой ступенью значения испытательной нагрузки  $F_i$  производят не менее 10 раз [20] для статистического анализа результатов испытаний. Результаты измерений прогиба в одних и тех же условиях с одним и тем же средством измерения анализируются по гистограммам с целью выявления функций распределения для описания результатов измерений. Практика показывает, что результаты таких испытаний (одной и той же физической величины) хорошо описываются нормальным законом распределения. В качестве меры изменчивости при нормальном законе распределения результатов измерений  $f_i$  используем доверительный интервал, полученный по правилу трех сигм [20].

По результатам нескольких ( $n \geq 10$ ) испытаний с не менее чем тремя различными по значению пробными нагрузками  $F_i$  и измерений прогибов балки  $f_i$  находят средние значения

прогибов балки  $\bar{f}_i$  при каждом значении  $F_i$  по формуле  $\bar{f}_i = \frac{\sum_{j=1}^n f_{i,j}}{n}$  и среднее квадратическое

отклонение  $S_{f_i} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (f_{j,i} - \bar{f}_i)^2}{n-1}}$ . По значениям нагрузок  $F_i$  и средним значениям прогибов

$\bar{f}_i$  методом наименьших квадратов, используя компьютерную программу, строят степенную функцию  $\Phi_1(F; \bar{f})$  зависимости  $F$  от  $\bar{f}$ , примерное графическое изображение которой приведено на рисунке 2. Аналогичным образом, но для возможных наибольших прогибов в силу изменчивости результатов измерений  $\tilde{f}_i$  с учетом средних значений и значений среднеквадратических отклонений на каждом уровне испытательной нагрузки находят значения прогибов  $(\bar{f}_i + 3S_{f_i})$ , полученных по правилу трех сигм, по которым строят вторую функцию  $\Phi_2(F; \bar{f} + 3S_{f_i})$ . Для менее ответственных железобетонных балок доверительный интервал для



прогиба  $\tilde{f}_i$  можно ограничить значением  $2S_{f_i}$  с вероятностью 0,954, что приведет к повышению нижнего значения предельной нагрузки  $F_{np}^H$ .

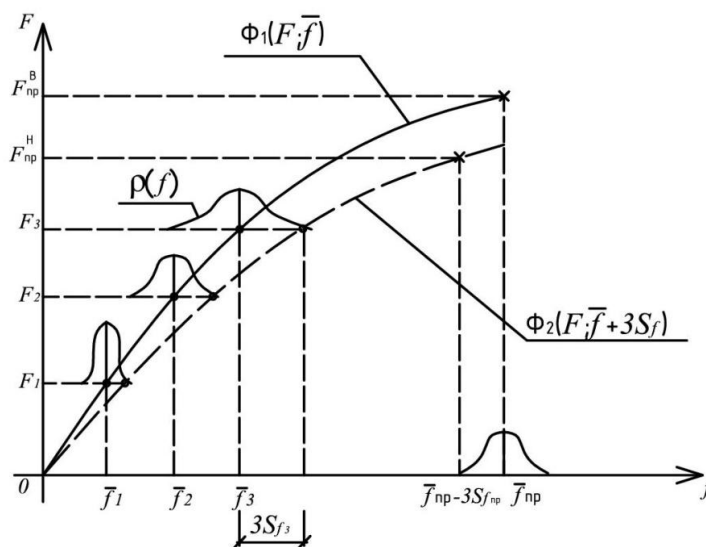


Рисунок 2. Графики функций  $\Phi_1(F; \bar{f})$  и  $\Phi_2(F; \bar{f} + 3S_f)$

Графики функций  $\Phi_1(F; \bar{f})$  и  $\Phi_2(F; \bar{f} + 3S_f)$  ограничиваются справа предельными значениями прогибов  $f_{np}$  и  $(\bar{f}_{np} - 3S_{f_{np}})$ , т. е. средним и возможным наименьшим по значению прогибом с вероятностью 0,997.

Рассмотрим вариант оценки несущей способности (предельной нагрузки), в котором недопустимы остаточные деформации. Это требование может быть вызвано условием безопасности эксплуатации или технологическими требованиями. Известно, что остаточные деформации практически не возникают при напряжениях в арматуре железобетонных балок, не превышающих предела упругости  $\sigma_y$ , что следует из утверждения, приведенного в [21]: «пределом упругости  $\sigma_y$  стали называется максимальное напряжение, которое может выдержать материал, не обнаруживая признаков остаточной деформации при разгрузке». По ГОСТ 1497-84 принято понятие условного предела упругости, которое определяется значением напряжения, при котором среднее значение остаточной деформации  $\bar{\varepsilon}_{ост} = \bar{\varepsilon}_{np}$  достигает 0,005 % или 0,05 %. По [3] для высоколегированной и термически упрочненной арматуры различают условный предел упругости  $\sigma_{0,02}$  и предел упругости  $\sigma_{sc} = 0,8\sigma_{0,02}$ . По [22] коэффициент вариации предела текучести стали можно принять равным  $\nu = 0,05 \dots 0,08$ . Приняв такой же коэффициент вариации для предела упругости стали, можно найти среднее значение предельного напряжения, соответствующее пределу упругости  $\bar{\sigma}_{np}$ , и его среднее квадратическое отклонение  $S_{\sigma_{np}}$ . По возможности, а в ответственных конструкциях в обязательном порядке, рекомендуется проводить испытания образцов арматуры, вырезанных из малонапряженных участков балки, в количестве 5–8 штук по рекомендациям в [23]. По результатам испытаний определяют среднее значение предельного напряжения (предела упругости) балки  $\bar{\sigma}_{np}$  и его среднее квадратическое отклонение  $S_{\sigma_{np}}$ .

Для балки при сосредоточенной нагрузке в середине пролета имеем:

$$f = s \frac{Ml^2}{B}, \quad (1)$$

где  $M$  – значение изгибающего момента;  $l$  – длина балки;  $B$  – жесткость приведенного сечения, определяемая по [3] как  $B = 0,85 E_b I_{red}$ , где  $E_b$  – модуль упругости бетона;  $I_{red}$  – момент инерции приведенного сечения, который допускается определять для балки прямоугольного сечения как  $I_{red} = bh^3 / 12$ ;  $s$  – коэффициент, зависящий от расчетной схемы и вида нагрузок, для свободно опертой балки при сосредоточенной нагрузке в середине пролета  $s = 1/12$ .

Значение изгибающего момента  $M$  без учета арматуры в сжатой зоне балки можно найти с учетом изменчивости параметров (отмеченных волнистой линией) и с учетом упругой деформации бетона, исходя из условия равновесия сил:

$$\tilde{M} = \tilde{\sigma}_s A_s (h_0 - \tilde{x} / 3), \quad (2)$$

где  $\sigma_s$  – напряжение в растянутой арматуре балки;  $A_s$  – площадь рабочей растянутой арматуры балки;  $h_0$  – рабочая высота сечения балки;  $x$  – высота сжатой зоны бетона балки, определяемая в условиях упругой деформации бетона (при недопущении остаточного прогиба) по результатам измерения деформаций в 2–3 точках сжатой зоны бетона балки при любой испытательной нагрузке  $F_i$  путем построения эпюры деформаций.

Среднее значение предельного прогиба с учетом (1) и (2), применив метод линеаризации, можно найти по формуле:

$$\bar{f}_{np} = \frac{1}{12} \frac{A_s \bar{\sigma}_{np} l^2 (h_0 - \bar{x} / 3)}{0,85 \bar{E}_b I_{red}}, \quad (3)$$

а среднее квадратическое отклонение – по формуле:

$$S_{f_{np}} = \frac{1}{12} \frac{A_s l^2}{0,85 I_{red}} \sqrt{\left( \frac{(h_0 - \bar{x})}{\bar{E}_b} \right)^2 S_{\sigma_{np}}^2 + \left( \frac{(h_0 - \bar{x}) \cdot \bar{\sigma}_{np}}{\bar{E}_b^2} \right)^2 S_{E_b}^2 + \left( \frac{\frac{1}{3} \bar{\sigma}_{np}}{\bar{E}_b} \right)^2 S_x^2}, \quad (4)$$

где  $\bar{E}_b$  – среднее значение модуля упругости бетона;  $S_{E_b}$  – среднее квадратическое отклонение модуля упругости бетона;  $\bar{\sigma}_{np}$  – среднее значение предельного напряжения (предела упругости) арматуры;  $S_{\sigma_{np}}$  – среднее квадратическое отклонение предельного напряжения (предела упругости) арматуры;  $\bar{x}$  – среднее значение высоты сжатой зоны бетона;  $S_x$  – среднее квадратическое отклонение  $\bar{x}$ .

Методика определения  $\bar{\sigma}_{np}$  и  $S_{\sigma_{np}}$  описана выше. Модуль упругости бетона определяется неразрушающими методами [18, 22 и др.]. Высота сжатой зоны  $x$  бетона определяется по измерениям деформаций бетона балки.

Подставляя среднее значение предельного прогиба  $\bar{f}_{np}$  в функцию  $\Phi_1(F; \bar{f})$  вместо  $\bar{f}$ , находят верхнее значение предельной нагрузки  $F_{np}^B$ , как показано на рисунке 2. Подставляя  $(\bar{f}_{np} - 3S_{f_{np}})$  в функцию  $\Phi_2(F; \bar{f} + 3S_f)$  вместо  $(\bar{f} + 3S_f)$ , находят нижнее значение предельной нагрузки  $F_{np}^H$  (рис. 2). Интервал  $[F_{np}^H; F_{np}^B]$  характеризует несущую способность балки по критерию прогиба из условия отсутствия остаточных деформаций (остаточного прогиба). На рисунке 2 также условно показаны функции плотности вероятности  $\rho(f)$  случайной величины  $\tilde{f}_i$ .

Из рисунка 2 видно, что предельная нагрузка характеризуется двумя значениями: нижним  $F_{np}^H$  и верхним  $F_{np}^B$ . Действительно, предельную нагрузку выше среднего значения прогибов балки по условиям отсутствия упругих деформаций принимать не рекомендуется, а значение  $F_{np}^H$  дает гарантию выполнения этого требования с вероятностью 0,997, что для строительной практики вполне допустимо. В отдельных, малоответственных по условию работы железобетонных балках можно использовать правило двух сигм с вероятностью реализации события  $f_{\max} \leq f_{np}$ , равной 0,954.

Рассмотрим способ определения несущей способности балки, при котором предельный прогиб  $f_{np}$  устанавливается нормами в зависимости от длины пролета балки. Так, для балки покрытия длиной 6 м предельный прогиб равен  $l/200$  из условия эстетико-психологических требований. Аналогично первому рассмотренному выше случаю находят функции  $\Phi_1(F; \bar{f})$  и  $\Phi(F; \bar{f} + 3S_f)$ , но ограничивают их справа однозначным  $f_{np}$ . Подставляя значение предельного прогиба  $f_{np}$  в функцию  $\Phi_1(F; \bar{f})$  вместо  $\bar{f}$ , находят верхнее значение предельной нагрузки  $F_{np}^B$ , как показано на рисунке 3. Подставляя  $f_{np}$  в функцию  $\Phi_2(F; \bar{f} + 3S_f)$  вместо  $(\bar{f} + 3S_f)$ , находят нижнее значение предельной нагрузки  $F_{np}^H$  (рис. 3).

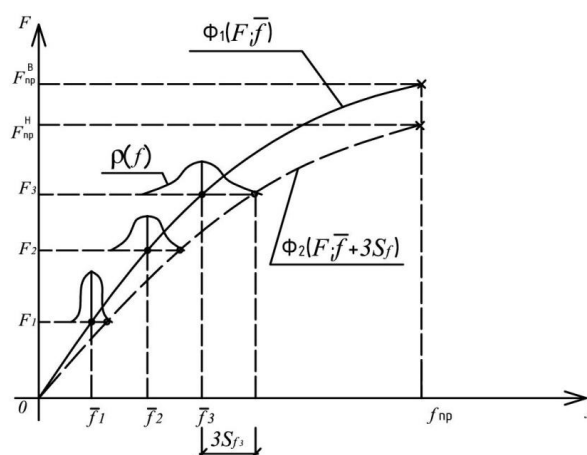


Рисунок 3. Графики функций  $\Phi_1(F; \bar{f})$  и  $\Phi_2(F; \bar{f} + 3S_f)$

Отметим, что полученный интервал  $[F_{np}^H; F_{np}^B]$  является одним значением из множества  $\{[F_{np,i}^H; F_{np,i}^B]\}$ . Для наиболее ответственных несущих конструкций и несущих конструкций уникальных зданий рекомендуется проводить повторные испытания, в результате которых будут получены различные по значению интервалы несущей способности балки, т. е. получим подмножество интервалов  $[F_{np,i}^H; F_{np,i}^B]$ . Это подмножество интервалов можно обработать с помощью теории свидетельств Демпстера – Шафера [24, 25, 26] и получить статистические математические ожидания для нижней и верхней границы предельной нагрузки  $[F_{np}^H; F_{np}^B]$  с определенной обеспеченностью (вероятностью).

Рассмотрим это на примере. Пусть в результате многократных испытаний балки были получены следующие интервалы предельной нагрузки, характеризующие несущую способность балки по критерию прогиба: [9715; 11350], [9831; 11252], [9631; 11100], [9556; 10999], [9555; 10832] кН. Общее число интервалов  $n = 5$ . Статистическое математическое ожидание значения предельной нагрузки по результатам испытаний по [27] найдем по формулам:

$$\underline{EY} = \sum_{i=1}^n m(A_i) \cdot \inf(A_i); \quad \bar{EY} = \sum_{i=1}^n m(A_i) \cdot \sup(A_i), \quad (5)$$

где  $m(A_i) = C_i / N$ , где  $N$  – число интервалов;  $C_i$  – количество наблюдаемых подмножеств  $A_i$ ;  $A_i$  – подмножество множества  $\Omega$  (в нашем случае предельная нагрузка).

В приведенном примере  $n = 5$ . По формуле (5) имеем:

$$\underline{EY} = \left(\frac{1}{5} 9715 + \frac{1}{5} 9831 + \frac{1}{5} 9631 + \frac{1}{5} 9556 + \frac{1}{5} 9555\right) = 9567 \text{ кН}$$

$$\bar{EY} = \left(\frac{1}{5} 11350 + \frac{1}{5} 11252 + \frac{1}{5} 11100 + \frac{1}{5} 10999 + \frac{1}{5} 10832\right) = 11106 \text{ кН}$$

Предельная нагрузка характеризуется средним интервалом [9567; 11106] кН. Как видно, он не совпадает ни с одним исходным интервалом значений предельной нагрузки, полученных из одного испытания.

Определение предельной нагрузки  $F_{np}$  (меры несущей способности) для балки не будет иметь практического значения, если ее не согласовать с существующей эксплуатационной нагрузкой, например, равномерно распределенной –  $q$ . Это согласование осуществляется методами строительной механики. Рассмотрим примеры.

1. Балка свободно опирается концами на опоры, как показано на расчетной схеме на рисунке 4.

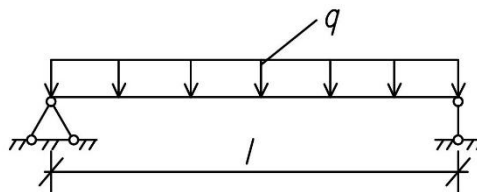


Рисунок 4. Расчетная схема свободно опертой балки

Если предельная нагрузка  $F_{np}$  была найдена для балки с приложением ее в середине пролета, то из  $M_{F,np} = M_{q,np}$  или  $F_{np} \cdot \frac{l}{4} = \frac{q_{np} l^2}{8}$  находят  $q_{np} = \frac{2 \cdot F_{np}}{l}$ .

2. Балка с угловыми жесткостями (связями) на опорах – расчетная схема на рисунке 5.

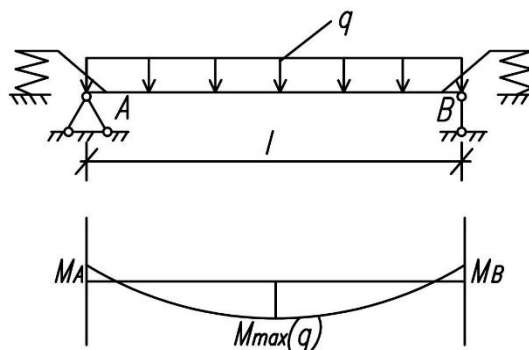


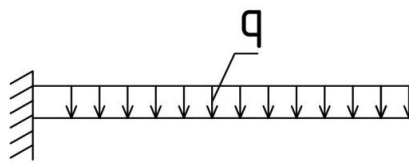
Рисунок 5. Расчетная схема балки с угловыми жесткостями (связями)

Балка статически неопределимая, ее решение можно найти в [28]. Испытательные нагрузки  $F_i$  прикладываются в сечении с  $M_{max}(q)$  и по описанной выше методике находят  $F_{np}$ . Из равенства  $M_{F,np} = M_{q,np}$  находят значение  $q_{np}$ , которое будет мерой несущей способности

Уткин В.С., Соловьев С.А. Определение остаточной несущей способности железобетонных балок по критерию жесткости (прогиба)

балки. Если окажется, что  $M_A$  или  $M_B$  больше  $M_{\max(q)}$  в середине пролета балки (например, при абсолютном защемлении  $M_A = \frac{ql^2}{8}$ , а  $M_{\max}(q) = \frac{ql^2}{24}$ ), то в этом случае испытательная нагрузка  $F_u$  и предельная нагрузка  $F_{np}$  прикладываются и определяются по методике, описанной выше, и значение  $q$  определяется из равенства  $M_{F,np} = M_{q,np}$ , но затем уменьшается в  $n = \frac{M_{\max}(A \text{ или } B)}{M_{\max}(q)}$  раз, при условии что  $M_{\max}(A)$  или  $M_{\max}(B)$  балки на опорах по схеме на рисунке 5 будет больше  $M_{\max} = \frac{ql^2}{24}$ .

3. Консольно-защемленная балка (рис. 6).



**Рисунок 6. Расчетная схема консольно-защемленной балки**

Если предельная нагрузка  $F_{np}$  была найдена для балки с приложением ее на краю консоли,

то из  $M_{F,np} = M_{q,np}$  или  $F_{np} \cdot l = \frac{q_{np} l^2}{2}$  следует  $q_{np} = \frac{2 \cdot F_{np}}{l}$ .

Могут быть использованы и другие варианты расчетных схем балок.

### Заключение

1. Предложен новый метод определения остаточной несущей способности железобетонных балок на стадии эксплуатации по критерию жесткости (прогиба).
2. Рассмотрено два варианта информации о предельном прогибе: из условия недопущения остаточной деформации (прогиба) и из условия ограничения значения прогиба по требованиям нормативных документов.
3. Показано использование теории свидетельств Демпстера – Шафера для статистической обработки информации применительно к случайным интервалам – результатам определения предельной нагрузки на балку по критерию прогиба.

### Литература

1. Золина Т.В. Сводный алгоритм расчета промышленного объекта на действующие нагрузки с оценкой остаточного ресурса // Промышленное и гражданское строительство. 2014. №6. С. 3–5.
2. Байда Д.Н. Остаточная несущая способность железобетонных балок после их частичного разрушения. Автореферат дисс.... к.т.н., Винница: ВНТУ, 2005. 20 с.
3. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. Общий курс. Учебник для вузов. 5-е изд., перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1991. 767 с.
4. Уткин В.С. Определение остаточной несущей способности железобетонных балок на стадии эксплуатации по критерию прочности арматуры и бетона // Инженерно-строительный журнал. №1(53). 2015. С. 15–23.
5. Ягулов Б.А., Мигаль Р.Е. Жесткость и прогибы балочных железобетонных конструкций, поврежденных коррозией // Бетон и железобетон. 2010. №5. С. 24–27.
6. Верещагин В.С. Определение прогибов многопролетных железобетонных балок с нормальными трещинами // Бетон и железобетон. 2004. №1. С. 20–22.

Уткин В.С., Соловьев С.А. Определение остаточной несущей способности железобетонных балок по критерию жесткости (прогиба)

7. Кодыш Э.Н., Трекин Н.Н., Трекин Д.Н. Анализ деформативности изгибаемых железобетонных элементов // Промышленное и гражданское строительство. 2013. №6. С. 59–61.
8. Баймаруков С.Х. Прогобы железобетонных балок со смешанным армированием при многократно повторном нагружении // Бетон и железобетон. 1999. №4. С. 12–14.
9. Cao D.F., Ge W.J., Wang B.Y., Tu Y.M. Study on the flexural behaviors of RC beams after freeze-thaw cycles // International Journal of Civil Engineering. 2015. Vol. 13. No. 1. Pp. 92–101.
10. Hojatkashani A., Kabir M. Z. Experimental examination of CFRP strengthened RC beams under high cycle fatigue loading // International Journal of Civil Engineering. 2012. Vol. 10. No. 4. Pp. 291–300.
11. Lee K.S. Experimental study of sprayed FRP system for strengthening reinforced concrete beams // Journal of advanced concrete technology. 2012. Vol. 10. No. 6. Pp. 219–230.
12. Ohno M., Chijiwa N., Suryanto B., Maekawa K. An investigation into the long-term excessive deflection of PC Viaducts by using 3d multi-scale integrated analysis // Journal of advanced concrete technology. 2012. Vol. 10. No. 2. Pp. 47–58.
13. Ousalem H. [et al.] Seismic Performance and Flexural Stiffness Variation of Assembled Precast High-Strength Concrete Beam Jointed at Mid-Span Using Transverse Bolts // Journal of advanced concrete technology. 2009. Vol. 7. No. 2. Pp. 205–216.
14. Kadhum M.M. Fire resistance of reinforced concrete rigid beams // Journal of civil engineering and construction technology. 2014. Vol. 5. No. 5. Pp. 35–48.
15. Bischoff P. H. Rational Model for Calculating Deflection of Reinforced Concrete Beams and Slabs // Canadian Journal of Civil Engineering. 2007. Vol. 34. No. 8. Pp. 992–1002.
16. Пат. 2161778 РФ МПК G01N3/10. Способ неразрушающего контроля несущей способности строительных конструкций. М.: заявитель: Уткин В.С., Голикова Л.В., патентообладатель: ВоГТУ. опубл. 10.01.2001.
17. Пат. 2006813 РФ МПК G01N3/00. Способ неразрушающего контроля прочности строительных конструкций. М.: заявитель: Уткин В.С., патентообладатель: ВоГТУ. опубл. 30.01.1994.
18. Лужин О.В., Злочевский А.Б., Горбунов И.А., Волохов В.А. Обследование и испытание сооружений. М.: Стройиздат, 1987. 269 с.
19. Землянский А.А. Обследование и испытание зданий и сооружений: учебное пособие. М.: Изд-во АСВ, 2004. 240 с.
20. Шишкин И.Ф. Метрология, стандартизация и управление качеством / Под ред. акад. Н. С. Соломенко. М.: Изд-во стандартов, 1990. 342 с.
21. Смирнов А.Ф. Сопrotивление материалов: Учебник для вузов / Под ред. А.Ф.Смирнова. М.: Высшая школа, 1975. 480 с.
22. Шпете Г. Надежность несущих строительных конструкций / Пер. с нем. О.О. Андреева. М.: Стройиздат, 1994. 288 с.
23. Бедов А.И., Сапрыкин В.Ф. Обследование и реконструкция железобетонных и каменных конструкций эксплуатируемых зданий и сооружений. М.: АСВ, 1995. 196 с.
24. Dempster A.P. Upper and lower probabilities induced by multivalued mapping // Annals of Mathematical Statistic. 1967. Vol. 38. No. 2. Pp. 325–329.
25. Shafer G.A. Mathematical theory of evidence. Princeton: Princeton university press, 1976. 297 p.
26. Zhang Z., Jiang C., Han X., Dean Hu., Yu S. A response surface approach for structure reliability analysis using evidence theory // Advances in Engineering Software. 2014. Vol. 69. Pp. 37–45.
27. Уткин Л.В. Анализ риска и принятие решений при неполной информации. СПб: Наука, 2007. 404 с.
28. Уткин В.С. Уточнение расчетных схем балок и рам на стадии эксплуатации и проверочный расчет их по несущей способности // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. №1. С. 6–10.

*Владимир Сергеевич Уткин, г. Вологда, Россия  
Тел. раб.: +7(8172)518396; эл. почта: UtkinVoGTU@mail.ru*

*Сергей Александрович Соловьев, г. Вологда, Россия  
Тел. моб.: +7(900)5081130; эл. почта: ser6sol@yandex.ru*

© Уткин В.С., Соловьев С.А., 2015

doi: 10.5862/MCE.56.7

## Вариационные постановки нелинейных задач с независимыми вращательными степенями свободы

*Д-р техн. наук, заведующий кафедрой В.В. Лалин;  
ассистент Е.В. Зданчук;  
аспирант Д.А. Кушова;*

*д-р физ.-мат. наук, профессор Л.А. Розин,  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

**Аннотация.** Рассматриваются геометрически и физически нелинейные теории упругих стержней (стержни Коссера – Тимошенко) и упругой среды Коссера. Эти теории характерны тем, что в них присутствуют независимые трансляционные и вращательные степени свободы. Постановки задач для этих теорий в виде систем дифференциальных уравнений хорошо известны. Однако до сих пор не получены вариационные постановки в виде задач о поиске точек стационарности соответствующих функционалов.

Используются только вариационные постановки в виде принципа виртуальной работы (возможных перемещений). Наличие функционалов вариационных постановок важно для правильной формулировки алгоритмов метода конечных элементов при решении нелинейных задач, а также для постановки и решения задач устойчивости равновесия.

В настоящей работе даны вариационные постановки статических задач для указанных теорий в виде задач поиска точек стационарности функционалов.

**Ключевые слова:** независимые вращательные степени свободы; нелинейные стержни Коссера; нелинейная среда Коссера; функционал вариационной постановки

### Введение

В статье рассматриваются геометрически и физически нелинейные пространственные статические задачи строительной механики и механики деформируемого твердого тела для упругих сред, в которых, наряду с трансляционными степенями свободы – перемещениями, имеются вращательные степени свободы – повороты, независимые от перемещений.

Примером одномерных теорий такого рода является стержень Коссера – Тимошенко [1–20], трехмерными примерами являются среда Коссера – моментная теория упругости [19, 21–25] и редуцированная среда Коссера [26–29].

В мировой научной литературе для геометрически нелинейных задач с независимыми поворотами отсутствует вариационная постановка в виде задачи поиска точки стационарности некоторого функционала. Используется только вариационная постановка в виде вариационного уравнения – принцип виртуальных перемещений (виртуальной работы) [7, 14, 15, 17, 19, 20, 30–33].

В настоящей статье даны вариационные постановки нелинейной теории упругих стержней Коссера – Тимошенко и нелинейной трехмерной упругой среды Коссера в виде задачи о поиске точки стационарности соответствующих функционалов.

### Описание больших поворотов

Независимые повороты можно описывать с помощью вектора поворота  $\varphi = \varphi_i \mathbf{e}_i$ , где  $\mathbf{e}_i$  – орты ортогональной декартовой системы координат. Здесь и в дальнейшем все индексы имеют значения от 1 до 3 и используется правило суммирования по нему индексу, например,  $\varphi_i \mathbf{e}_i \equiv \varphi_1 \mathbf{e}_1 + \varphi_2 \mathbf{e}_2 + \varphi_3 \mathbf{e}_3$ .

Альтернативное описание независимых поворотов дает тензор поворота  $\mathbf{P}$ . Через вектор  $\varphi$  тензор  $\mathbf{P}$  выражается следующим образом [3, 14, 16, 20, 23, 34, 35]:

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{P}(\varphi) = \mathbf{I} \cos \Phi + \frac{\sin \Phi}{\Phi} \mathbf{I} \times \varphi + \frac{1 - \cos \Phi}{\Phi^2} \varphi \varphi, \quad (1)$$

где  $\Phi = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}$  – модуль вектора  $\varphi$ ;  $\mathbf{I} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$  – единичный тензор;  $\times$  – знак векторного умножения;  $\mathbf{ab}$  – диадное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Тензор  $\mathbf{P}$  является ортогональным тензором, т.е. удовлетворяет равенствам  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{I}$  (где  $\cdot$  – знак скалярного умножения) и имеет определитель, равный 1.

Если тензор  $\mathbf{P}$  зависит от некоторого числового параметра  $\beta$ , то его производная по  $\beta$  полностью определяется вектором  $\mathbf{b}$  по правилу [5, 34, 35]:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \beta} = \mathbf{P} \times \mathbf{b} \quad (\Leftrightarrow) \quad \mathbf{b} = -\frac{1}{2} (\mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \beta})_x, \quad (2)$$

где  $(\dots)_x$  – векторный инвариант тензора [5, 34, 35];  $(\dots)^T$  – транспонирование тензора.

Пусть от параметра  $\beta$  зависит вектор поворота  $\varphi$ :  $\varphi = \varphi(\beta)$ , то есть  $\mathbf{P}(\beta) \equiv \mathbf{P}(\varphi(\beta))$ . Производная  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \beta}$  по-прежнему определяется вектором  $\mathbf{b}$  по формуле (2). Производная  $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$  и вектор  $\mathbf{b}$  связаны соотношением

$$\mathbf{b} = \mathbf{Z}^T \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad (3)$$

где тензор Жилина  $\mathbf{Z}$  определен формулой [34, 35]:

$$\mathbf{Z} \equiv \mathbf{Z}(\varphi) = \mathbf{I} \frac{\sin \Phi}{\Phi} + \frac{1 - \cos \Phi}{\Phi^2} \mathbf{I} \times \varphi + \frac{\Phi - \sin \Phi}{\Phi^3} \varphi \varphi. \quad (4)$$

Несмотря на то, что выражение (4) было известно и раньше (см., например [2, 21, 36]), систематическое исследование свойств и использование этого тензора было проведено именно П.А. Жилиным, что объясняет использованное нами название тензора  $\mathbf{Z}$ .

Из (1) следует, что  $\mathbf{P}$  можно рассматривать как функцию трех параметров  $\varphi_i$ . Введем три вектора  $\mathbf{H}_i$  по формуле (2):

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \varphi_i} = \mathbf{P} \times \mathbf{H}_i. \quad (5)$$

Согласно (3)  $\mathbf{H}_i = \mathbf{Z}^T \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i}$ , но  $\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} = \mathbf{e}_i$ , следовательно  $\mathbf{H}_i = \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{e}_i$ . Так как  $\mathbf{e}_i$  – линейно независимые единичные векторы, то последнее равенство эквивалентно следующему:

$$\mathbf{Z}^T = \mathbf{H}_i \mathbf{e}_i \quad (6)$$

и, поскольку  $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \beta} \equiv 0$ , то формулу (3) можно записать в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{H}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta}. \quad (7)$$

### Вычисление вариаций

Обозначим  $\delta \varphi \equiv \mathbf{e}_i \delta \varphi_i$  – вариация вектора поворота  $\varphi$ . Для любой функции (в том числе векторной или тензорной)  $A(\varphi)$  вектора  $\varphi$  вариация вычисляется следующим образом:

$$\delta A = \left. \frac{\partial A(\varphi + \alpha \delta \varphi)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0},$$

Лалин В.В., Зданчук Е.В., Кушова Д.А., Розин Л.А. Вариационные постановки нелинейных задач с независимыми вращательными степенями свободы



где  $\alpha$  – скалярный параметр.

Исходя из определения, получим

$$\delta A = \left[ \frac{\partial A(\varphi + \alpha \delta \varphi)}{\partial(\varphi_i + \alpha \delta \varphi_i)} \frac{\partial(\varphi_i + \alpha \delta \varphi_i)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = \frac{\partial A}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i. \quad (8)$$

Вычислим вариацию тензора  $\mathbf{P}$ . Согласно (8) и (5) можно записать:

$$\delta \mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i = \mathbf{P} \times \mathbf{H}_i \delta \varphi_i.$$

Используя свойство  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$ , последнюю формулу можно записать в виде

$$\delta \mathbf{P} = \mathbf{P} \times \mathbf{H}_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k \delta \varphi_k.$$

На основании (6) и определения  $\delta \varphi$ , окончательно получим:

$$\delta \mathbf{P} = \mathbf{P} \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta \varphi. \quad (9)$$

Формула (9) – инвариантная запись вариации тензора поворота  $\mathbf{P}$ .

Далее займемся вычислением вариации вектора  $\mathbf{b}$  из формул (2) и (3). Так как, согласно (3), вектор  $\mathbf{b}$  зависит не только от самого вектора  $\varphi$ , но и от его производной  $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$ , то его вариация должна вычисляться по формуле:

$$\delta \mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta})} \delta(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta}). \quad (10)$$

Так как векторы  $\mathbf{H}_i$  не зависят от  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta}$ , то из (7) следует:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta})} = \mathbf{H}_i. \quad (11)$$

Используя равенство  $\delta(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta}) = \frac{\partial(\delta \varphi_i)}{\partial \beta}$  и (11), последнее слагаемое в (10) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta})} \delta(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta}) = \mathbf{H}_i \frac{\partial(\delta \varphi_i)}{\partial \beta}. \quad (12)$$

Для вычисления первого слагаемого в (10) используем равенство вторых смешанных производных тензора  $\mathbf{P}$ . На основании (2) и (5) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \varphi_i \partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\mathbf{P} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{P} \times \mathbf{H}_i) \times \mathbf{b} + \mathbf{P} \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \varphi_i}; \\ \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \beta \partial \varphi_i} &= \frac{\partial}{\partial \beta} (\mathbf{P} \times \mathbf{H}_i) = (\mathbf{P} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{H}_i + \mathbf{P} \times \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (13)$$

Приравняв друг другу правые части формул (13) и воспользовавшись непосредственно проверяемым тождеством  $(\mathbf{A} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} - (\mathbf{A} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{A} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ , справедливым для любых векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и тензора  $\mathbf{A}$ , получим  $\mathbf{P} \times (\mathbf{H}_i \times \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial \beta}) = 0$ , откуда

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial \beta} + \mathbf{b} \times \mathbf{H}_i.$$

Подставляя последнюю формулу и формулу (12) в (10), получим:

$$\delta \mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial \beta} (\mathbf{H}_i \delta \varphi_i) + \mathbf{b} \times \mathbf{H}_i \delta \varphi_i. \quad (14)$$

Так как  $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \beta} \equiv 0$ , то с использованием (6) формулу (14) можно записать в следующем инвариантном виде:

$$\delta \mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial \beta} (\mathbf{Z}^T \cdot \delta \varphi) + \mathbf{b} \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta \varphi. \quad (15)$$

В дальнейшем будет удобно использовать преобразованную формулу (15). Для этого воспользуемся тождествами [34]:

$$\mathbf{Z}^T = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z} \text{ и } (\mathbf{P} \times \mathbf{b})^T = -\mathbf{b} \times \mathbf{P}^T. \quad (16)$$

На основании последнего тождества из (2) следует  $\frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \beta} = -\mathbf{b} \times \mathbf{P}^T$ . Теперь первое слагаемое в (15) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} (\mathbf{Z}^T \cdot \delta \varphi) &= \frac{\partial}{\partial \beta} (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi) = \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \beta} \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi + \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (\mathbf{Z} \cdot \delta \varphi) = \\ &= -\mathbf{b} \times \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi + \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (\mathbf{Z} \cdot \delta \varphi) = -\mathbf{b} \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta \varphi + \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (\mathbf{Z} \cdot \delta \varphi) \end{aligned}$$

Подставив полученный результат в (15), получим:

$$\delta \mathbf{b} = \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (\mathbf{Z} \cdot \delta \varphi). \quad (17)$$

Напомним, что в (17)  $\beta$  – произвольный скалярный параметр, от которого зависят вектор и тензор поворота.

### *Вариационная постановка нелинейных задач для стержней Коссера – Тимошенко*

Выберем в качестве отсчетной конфигурации (ОК) начальное положение стержня в момент времени  $t = 0$ , актуальная конфигурация (АК) – текущее положение стержня в момент времени  $t$ . Будем использовать материальное (Лагранжево) описание, при котором любая точка стержня задается своей дуговой координатой  $s$  в ОК.

Введем обозначения:

$\mathbf{r}(s, t)$  – радиус-вектор точек стержня в АК;

$\mathbf{R}(s, t)$  – радиус-вектор точек стержня в ОК  $\mathbf{R}(s, 0) \equiv \mathbf{R}(s)$ ;

$\mathbf{P}(s, t)$  – тензор поворота, описывающий независимые повороты;

$\rho$  – линейная плотность в ОК;

Лалин В.В., Зданчук Е.В., Кушова Д.А., Розин Л.А. Вариационные постановки нелинейных задач с независимыми вращательными степенями свободы

$J$  – массовая плотность тензора инерции в АК;  
 $v, \omega$  – векторы линейной и угловой скоростей;  
 $q, \mu$  – векторы распределенной силовой и моментной нагрузок в текущем положении на единицу длины ОК;

$f, m$  – векторы внутренних усилий (сил и моментов);

$\varepsilon, \gamma$  – векторы деформаций (растяжение – сдвиг и изгиб – кручение);

$\frac{\partial}{\partial s}(\dots) \equiv (\dots)'$  – частная производная по длине дуги;

$\frac{\partial}{\partial t}(\dots) \equiv (\dots)^\bullet$  – частная производная по времени.

Определение скоростей:

$$v = r^\bullet; \quad P^\bullet = \omega \times P. \quad (18)$$

Определение деформаций:

$$\varepsilon = r' - P \cdot R'; \quad P' = \gamma \times P. \quad (19)$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases} f' + q = \rho v^\bullet \\ m' + r' \times f + \mu = \rho(J \cdot \omega)^\bullet \end{cases} \quad (20)$$

Формулы и уравнения (18)–(20) являются хорошо известными и стандартными для нелинейной теории стержней. В зарубежной литературе такая теория называется геометрически точной (geometrically exact theory) [1, 4–6, 8, 10, 11, 16].

Для упругих стержней энергия деформации зависит только от деформаций:  $W = W(\varepsilon, \gamma)$ , где  $W$  – линейная плотность энергии деформации текущего положения на единицу длины ОК.

Известно, что векторы внутренних усилий  $f, m$  и деформаций  $\varepsilon, \gamma$  не являются энергетически сопряженными, т.е.  $W^\bullet \neq f \cdot \varepsilon^\bullet + m \cdot \gamma^\bullet$ , следовательно, для таких векторов не может существовать классической вариационной постановки в виде задачи о поиске точки стационарности некоторого функционала.

В работах [2, 8, 11, 16] доказано, что энергетически сопряженными являются повернутые векторы усилий и деформаций:

$$\begin{cases} E = P^T \cdot \varepsilon = P^T r' - R' \\ \Gamma = P^T \cdot \gamma \Leftrightarrow P' = P \times \Gamma \end{cases} \quad (21)$$

$$F = P^T \cdot f; \quad M = P^T \cdot m. \quad (22)$$

Для таких векторов в работе [8] доказано равенство:

$$W^\bullet = F \cdot E^\bullet + M \cdot \Gamma^\bullet, \quad (23)$$

где  $W = W(E, \Gamma)$ .

Как показано в [8], из (23) вытекает следующая запись физических уравнений для нелинейно упругого материала:

$$F = \frac{\partial W}{\partial E}; \quad M = \frac{\partial W}{\partial \Gamma}. \quad (24)$$

В дальнейшем будем рассматривать статические задачи, правые части уравнений (20) будут равны нулю и уравнения равновесия, записанные через повернутые векторы (22) примут вид:

$$\begin{cases} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{F})' + q = 0 \\ (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M})' + \mathbf{r}' \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{F} + \boldsymbol{\mu} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Введем функционал:

$$L(r, \varphi) = \int_0^l [W(E, \Gamma) - U_1(r) - U_2(\varphi)] ds,$$

где  $U_1(r)$  – потенциал силовой нагрузки;

$U_2(\varphi)$  – потенциал моментной нагрузки;

$l$  – длина стержня в ОК.

Будем считать, что один конец стержня, например при  $s = 0$ , закреплён, второй – свободен и не нагружен. Тогда главные граничные условия для вариационной задачи поиска точки стационарности функционала  $L$ :

$$L \rightarrow \text{стац} \quad (26)$$

будут иметь вид:

$$\begin{cases} \mathbf{r}(0) = \mathbf{R}(0) \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Статические граничные условия на свободном конце стержня имеют вид:

$$\begin{aligned} m(l) = 0 & \Leftrightarrow M(l) = 0 \\ f(l) = 0 & \Leftrightarrow F(l) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Докажем, что уравнения Эйлера вариационной задачи (26), (27) будут равносильны уравнениям равновесия (25) при условии потенциальности нагрузок, а естественные граничные условия – равносильны граничным условиям (28).

Вариация функционала  $L$  имеет вид:

$$\delta L = \int_0^l \left[ \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \cdot \delta \mathbf{E} + \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \cdot \delta \boldsymbol{\Gamma} - \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} - \frac{\partial U_2}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right] ds.$$

Вариацию вектора  $\boldsymbol{\Gamma}$  получим из (17), отождествив параметр  $\beta$  с дуговой координатой  $s$ :

$$\delta \boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{Z} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi})'. \quad (29)$$

Вычислим вариацию вектора  $\mathbf{E}$  из формулы (21):

$$\delta \mathbf{E} = \delta \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{P}^T \cdot \delta \mathbf{r}'.$$

Согласно (9) и (16)

$$\delta \mathbf{P}^T = -(\mathbf{Z}^T \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) \times \mathbf{P}^T;$$

$$\delta \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{r}' = -(\mathbf{Z}^T \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) \times \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{r}' = (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{r}') \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{r}') \times \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{Z} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}).$$

Окончательно,

$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{P}^T \cdot (\delta \mathbf{r}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{Z} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}). \quad (30)$$

Используя (24), (29) и (30), первые два слагаемых вариации  $\delta L$  можно записать в виде:

$$\int_0^l [F \cdot P^T \cdot (\delta r' + r' \times Z \cdot \delta \varphi) + M \cdot P^T \cdot (Z \cdot \delta \varphi)'] ds.$$

В последнем выражении проинтегрируем два слагаемых по частям:

$$\int_0^l F \cdot P^T \cdot (\delta r)' ds = (P \cdot F) \cdot \delta r \Big|_0^l - \int_0^l (P \cdot F)' \cdot \delta r ds;$$

$$\int_0^l M \cdot P^T \cdot (Z \cdot \delta \varphi)' ds = (P \cdot M) \cdot Z \cdot \delta \varphi \Big|_0^l - \int_0^l (P \cdot M)' \cdot Z \cdot \delta \varphi ds.$$

Так как  $F \cdot P^T \cdot (r' \times Z \cdot \delta \varphi) = (F \cdot P^T \times r') \cdot Z \cdot \delta \varphi = -(r' \times P \cdot F) \cdot Z \cdot \delta \varphi$ , то вариация  $\delta L$  окончательно запишется в следующем виде:

$$\delta L = - \int_0^l \left\{ \left( (P \cdot F)' + \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) \cdot \delta r + \left[ (P \cdot M)' + r' \times P \cdot F \right] \cdot Z + \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \right\} \cdot \delta \varphi ds +$$

$$+ \left[ P \cdot M \right] \cdot Z \cdot \delta \varphi + (P \cdot F) \cdot \delta r \Big|_{s=l},$$

так как из (27) следует, что  $\delta r(0) = 0$ ,  $\delta \varphi(0) = 0$ .

Условие  $\delta L = 0$  приводит к следующим уравнениям Эйлера и естественным граничным условиям:

$$\begin{cases} (P \cdot F)' + \frac{\partial U_1}{\partial r} = 0 \\ \left[ (P \cdot M)' + r' \times P \cdot F \right] \cdot Z + \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \quad (31)$$

$$(P \cdot M) \cdot Z \Big|_{s=l} = 0 \quad (P \cdot F) \Big|_{s=l} = 0. \quad (32)$$

Так как тензор  $Z$  – неособенный (при  $\Phi \neq 0$  и  $\Phi \neq \pi$ ) ([34]), так же как и тензор  $P$ , то естественные граничные условия (32) равносильны условиям (28). Аналогично, первое уравнение (31) равносильно первому уравнению (25) при условии потенциальности силовой нагрузки  $q = \partial U / \partial r$ . Второе уравнение (31) будет равносильно второму уравнению (25) при условии

$$\frac{\partial U_2}{\partial \varphi} = \mu \cdot Z. \quad (33)$$

Как показано в работах [37, 38], именно выражение (33) есть условие потенциальности моментной нагрузки.

Таким образом, вариационная постановка (26), (27) не только равносильна уравнениям (25), но и позволяет автоматически получить нетривиальное выражение для потенциальной моментной нагрузки.

### **Вариационная постановка нелинейных задач для среды Коссера (моментной теории упругости)**

При материальном (лагранжевом) описании каждая точка среды задается тремя координатами  $x_i$  в ОК. Кинематические переменные:  $r(x_i; t)$  – радиус-вектор в АК, тензор поворота  $P(x_i; t)$  или вектор поворота  $\varphi(x_i; t)$ , связанный с тензором  $P$  формулой (1). Векторы  $v$  – линейной и  $\omega$  – угловой скоростей определяются по формулам (18).

Лалин В.В., Зданчук Е.В., Кушова Д.А., Розин Л.А. Вариационные постановки нелинейных задач с независимыми вращательными степенями свободы

Ограничимся случаем одинаковой ориентации частиц в ОК, то есть будем считать, что для всех  $x_i$  в момент времени  $t = 0$  справедливы условия  $\varphi(x_i;0) = 0$  и  $\mathbf{P}(x_i;0) = \mathbf{I}$ .

Введем обозначения:

$\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}$  – тензоры напряжений и моментных напряжений (тензоры типа Коши) в АК;

$\mathbf{e}, \mathbf{k}$  – тензоры деформаций растяжения – сдвига и изгиба – кручения;

$\mathbf{f}, \boldsymbol{\mu}$  – векторы объемной силовой и моментной нагрузок на единицу объема ОК;

$\rho$  – объемная плотность в ОК;

$\mathbf{J}$  – массовая плотность тензора инерции в АК;

$\nabla = \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$  – оператор-градиент в ОК;

$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{r}^T$  – градиент деформации;

$J = \det \mathbf{F}$  – определитель тензора  $\mathbf{F}$ .

Для упругой среды энергия деформации зависит только от деформаций:  $W = W(\mathbf{e}, \mathbf{k})$ , где  $W$  – объемная плотность энергии деформации текущего состояния на единицу объема ОК. Тензоры  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}$ ,  $\mathbf{e}, \mathbf{k}$  определены в АК [7, 19, 21–23, 25, 39] и не являются энергетически сопряженными, то есть

$$\dot{W}(\mathbf{e}, \mathbf{k}) \neq \boldsymbol{\tau}^T \cdot \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{m}^T \cdot \dot{\mathbf{k}}.$$

При материальном описании необходимо использовать следующие тензоры внутренних усилий [19,23]:

$$\mathbf{T} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{M} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{P}. \quad (34)$$

Как показано в [19, 23, 25], энергетически сопряженными к тензорам (34) являются тензоры деформации  $\mathbf{E}, \mathbf{K}$ , которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{P} - \mathbf{I}; \\ \nabla \mathbf{P}^T &= -\mathbf{K} \times \mathbf{P}^T, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $\mathbf{K} = \mathbf{e}_s \mathbf{k}_s$ ;

векторы  $\mathbf{k}_s$  определяются равенствами  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_s} = \mathbf{P} \times \mathbf{k}_s \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial x_s} = -\mathbf{k}_s \times \mathbf{P}^T$ .

Из последнего равенства и формулы (3) следует, что  $\mathbf{k}_s = \mathbf{Z}^T \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \cdot \mathbf{Z}$ , откуда получаем следующее выражение тензора  $\mathbf{K}$  через вектор  $\varphi$ :

$$\mathbf{K} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{Z}. \quad (36)$$

В работе [23] доказано, что введенные тензоры усилий (34) и деформаций (35) удовлетворяют равенству

$$\dot{W}(\mathbf{e}, \mathbf{k}) = \mathbf{T}^T \cdot \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{M}^T \cdot \dot{\mathbf{K}}. \quad (37)$$

Как показано в [23], из равенства (37) вытекает следующая запись физических уравнений для нелинейно упругого материала:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}. \quad (38)$$

В лагранжевых координатах уравнения движения имеют вид [23, 39]:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{f} &= \rho \dot{\mathbf{v}}; \\ \nabla \cdot (J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{m}) + J \boldsymbol{\tau}_x + \boldsymbol{\mu} &= \rho (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})^*.\end{aligned}$$

В дальнейшем будем рассматривать статические задачи, правые части уравнений движения будут равны нулю и уравнения равновесия, записанные с использованием тензоров (34), примут вид:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T) + \mathbf{f} &= 0, \\ \nabla \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^T) + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T)_x + \boldsymbol{\mu} &= 0.\end{aligned}\quad (39)$$

Рассмотрим тело, занимавшее в ОК объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S = S_1 + S_2$ . На части поверхности  $S_1$  заданы условия закрепления:

$$\mathbf{r}|_{S_1} = 0; \varphi|_{S_1} = 0.$$

На части поверхности  $S_2$  тело свободно и не нагружено:  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{S_2^*} = 0$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|_{S_2^*} = 0$ , где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности тела в АК.

Так как  $\mathbf{n} dS^* = J \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^{-1} dS$  [40], где  $dS$  – элемент поверхности в ОК, который переходит в  $dS^*$  в АК,  $\mathbf{N}$  – единичная внешняя нормаль к поверхности  $S$ , которая переходит в  $\mathbf{n}$  в АК, то граничные условия на  $S_2$  можно переписать в виде:

$$J \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{S_2} = 0; J \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{m}|_{S_2} = 0,$$

или с использованием тензоров (34):

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T|_{S_2} = 0; \mathbf{N} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^T|_{S_2} = 0.\quad (40)$$

Введем функционал

$$L(\mathbf{r}, \varphi) = \int_V [W(\mathbf{E}, \mathbf{K}) - U_1(\mathbf{r}) - U_2(\varphi)] dV,$$

где  $U_1(\mathbf{r})$  – потенциал силовой нагрузки;  $U_2(\varphi)$  – потенциал моментной нагрузки.

Рассмотрим вариационную задачу поиска точки стационарности функционала  $L$ :

$$L(\mathbf{r}, \varphi) \rightarrow \text{стац} \quad (41)$$

при условиях (40) (главные граничные условия).

Докажем, что уравнения Эйлера вариационной задачи (40), (41) будут эквивалентны уравнениям (39) при условии потенциальности нагрузок, а естественные граничные условия будут равносильны условиям (40).

Вариация функционала  $L$  имеет вид:

$$\delta L = \int_V \left( \frac{\partial W^T}{\partial \mathbf{E}} \cdots \delta \mathbf{E} + \frac{\partial W^T}{\partial \mathbf{K}} \cdots \delta \mathbf{K} \right) - \nabla U_1 \cdot \delta \mathbf{r} - \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \cdot \delta \varphi dV.$$

Вычислим вариации тензоров деформаций. Из определения тензора  $\mathbf{F}$  следует, что  $\delta \mathbf{F}^T = \nabla \delta \mathbf{r}$ . Тогда, с учетом (9), из (35) получаем:

$$\delta \mathbf{E} = \nabla \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{P} \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta \varphi.\quad (42)$$

Из определения вектора  $\mathbf{k}_s$  и (17) получаем:

$$\delta \mathbf{k}_s = \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial}{\partial x_s} (\mathbf{Z} \cdot \delta \varphi) = \frac{\partial}{\partial x_s} (\mathbf{Z} \cdot \delta \varphi) \cdot \mathbf{P}.$$

Отсюда и из определения тензора  $\mathbf{K}$  следует:

$$\delta \mathbf{K} = \nabla (\mathbf{Z} \cdot \delta \varphi) \cdot \mathbf{P}. \quad (43)$$

Теперь первые два слагаемые в  $\delta L$  с учетом (38) можно записать в виде

$$\int_V [\mathbf{T}^T \cdot (\nabla \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{P} \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta \varphi) + \mathbf{M}^T \cdot \nabla (\mathbf{Z} \cdot \delta \varphi) \cdot \mathbf{P}] dV. \quad (44)$$

Первое и третье слагаемые в (44) преобразуем с использованием свойства  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$  [40], формулы  $\mathbf{A}^T \cdot \nabla \mathbf{a} = \nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}$  [40] и формулы Гаусса – Остроградского  $\int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} dS$  [40].

Получим:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{T}^T \cdot (\nabla \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) dV &= \int_V (\mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T)^T \cdot \nabla \delta \mathbf{r} dV = \int_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \delta \mathbf{r} dS - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T) \cdot \delta \mathbf{r} dV, \\ \int_V \mathbf{M}^T \cdot \nabla (\mathbf{Z} \cdot \delta \varphi) \cdot \mathbf{P} dV &= \int_V (\mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^T)^T \cdot \nabla (\mathbf{Z} \cdot \delta \varphi) dV = \int_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi dS - \\ &\quad - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^T) \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi dV. \end{aligned}$$

При преобразовании второго слагаемого в (44) используем следующие свойства [23]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_x^T &= -\mathbf{A}_x, \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{a}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_x \cdot \mathbf{a}, \quad (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P})_x = \mathbf{A}_x \cdot \mathbf{P} \quad \text{и} \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{P} \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta \varphi) &= (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{P})_x \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \delta \varphi = -(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T})_x \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \delta \varphi = \\ &= -(\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T)_x \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \delta \varphi = -(\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T)_x \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi. \end{aligned}$$

Так как  $\delta \mathbf{r}|_{S_1} = 0$ ,  $\delta \varphi|_{S_1} = 0$ , то окончательно вариация  $\delta L$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_{S_2} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi) dS_2 - \\ &\quad - \int_V [(\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T) + \nabla U_1) \cdot \delta \mathbf{r} - [(\nabla \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^T) + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T)_x) \cdot \mathbf{Z} + \frac{\partial U_2}{\partial \varphi}] \cdot \delta \varphi] dV. \end{aligned}$$

Условие  $\delta L = 0$  при любых  $\delta \mathbf{r}$  и  $\delta \varphi$  приводит к следующим уравнениям Эйлера и естественным граничным условиям:

$$\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T) + \nabla U_1 = 0, \quad [(\nabla \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^T) + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T)_x) \cdot \mathbf{Z} + \frac{\partial U_2}{\partial \varphi}] = 0, \quad (45)$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T \Big|_{S_2} = 0, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z} \Big|_{S_2} = 0. \quad (46)$$



Условия (46) равносильны условиям (40). Первое уравнение (45) равносильно первому уравнению (39) при условии потенциальности силовой нагрузки:  $\mathbf{f} = \nabla U_1$ . Второе уравнение (45) равносильно второму уравнению (39) при условии потенциальности моментной нагрузки:

$$\frac{\partial U_2}{\partial \varphi} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{Z}, \text{ аналогично условию (33).}$$

### Заключение

В работе даны постановки геометрически и физически нелинейных задач для упругих стержней Коссера – Тимошенко и упругой среды Коссера. Используются энергетически сопряженные внутренние усилия и деформации. Даны вариационные формулировки в виде задач поиска точки стационарности соответствующих функционалов. Доказана эквивалентность на гладких решениях вариационных и дифференциальных постановок. Показано, что вариационные постановки автоматически приводят к правильному выражению для потенциальной моментной нагрузки.

Полученные результаты являются важными для построения алгоритмов метода конечных элементов при численном решении нелинейных задач, а также для постановки и решения задач устойчивости равновесия.

### Литература

1. Голоскоков Д.П., Жилин П.А. Общая нелинейная теория упругих стержней с приложением к описанию эффекта Пойнтинга / Депонировано ВИНТИ №1912-В87 Деп. 20 с.
2. Crisfield M.A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and structures. Vol. 2. Wiley: Chichester, 1977.
3. Simo J.C., Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Geometric and computational aspects // Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering. 1986. Vol. 58. Issue 1. Pp. 79–116.
4. Simo J.C., Vu-Quoc L. On the dynamics in space of rods undergoing large motions – a geometrically exact approach // Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering. 1988. Vol. 66. Pp.125–161.
5. Елисеев В.В. Механика упругих стержней. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 1994. 88с.
6. Jelenic G., Crisfield M.A. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain – invariant finite element for static and dynamics // Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. 1999. №171. Pp. 141–171.
7. Rubin M.B. Cosserat theories: shells, rods and points. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 408 p.
8. Лалин В.В. Различные формы уравнений нелинейной динамики упругих стержней // Труды СПбГПУ. №489. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004. С. 121–128.
9. Gerstmayr J., Shabana A.A. Analysis of thin beams and cables using the absolute nodal coordinate formulation // Nonlinear Dyn. 2006. №45(1–2). Pp. 109–130.
10. Makinen J. Total Lagrangian Reissner’s geometrically exact beam element without singularities // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2007. Pp. 1009–1048.
11. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория упругих тонких стержней. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2007. 102 с.
12. Бровка Г.Л., Иванова О.А. Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера // Известия РАН. МТТ. 2008. №1. С. 22–36.
13. Галишникова В.В. Вывод разрешающих уравнений задачи нелинейного деформирования пространственных ферм на основе унифицированного подхода // Вестник ВолгГАСУ, Серия: Строительство и архитектура. Волгоград. 2009. Вып. 14(33). С. 39–49.
14. Ibrahimbegovic A. Nonlinear Solid Mechanics. Springer Science+Business Media B.V, 2009. 585 p.
15. Iesan D. Classical and Generalized Models of Elastic Rods. Boca Raton. CRC Press, 2009. 369 p.
16. Lang H., Linn J. Lagrangian fields theory in space – time for geometrically exact Cosserat rods. Preprint: Berichte des ITWM Kaiserslautern, 2009.
17. Bauchau O.A. Flexible Multibody Dynamics. Springer, 2010. 728 p.
18. Xiao N., Zhong H. Non-linear quadrature element analysis of planar frames based on geometrically exact beam theory // Int. J. Non-Lin. Mech. 2012. Vol. 47. Pp. 481–488.

19. Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. Foundations of Micropolar Mechanics. New York. Springer, 2013. 145 p.
20. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. The Finite Element Method for Solids and Structural Mechanics. Elsevier. 2014. 624 p.
21. Kafadar C.B., Eringen A.C. Micropolar media – I. The classical theory // Int. J. Engng. Sci. 1971. Vol. 9. Pp. 271–305.
22. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theory I. Foundations and solids. New York. Springer, 1999. 325 p.
23. Лалин В.В. Уравнения нелинейной динамики моментной упругой среды // Научно – технические ведомости СПбГПУ. 2007. №49. С. 97–105.
24. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Волны в упругой среде Коссера // Математическое моделирование систем и процессов. 2008. №16. С. 64–75.
25. Pictaszkiwicz W., Eremeyev V.A. On vectorially parametrized natural strain measures of the non-linear Cosserat continuum // Int. J. Solids Struct. 2009. №46(11–12). Pp. 2477–2480.
26. Кулеш М.А., Грекова Е.Ф., Шардаков И.Н. Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера // Акустический журнал. 2009. Т. 55, №2. С. 216–225.
27. Grekova E.F., Kulesh M.A., Herman G.C. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model// Bulletin of the Seismological Society of America. 2009. 99 (2 B). Pp. 1423–1428.
28. Grekova E.F. Nonlinear isotropic elastic reduced Cosserat continuum as a possible model for geomedium and geomaterials. Spherical prestressed state in the semilinear material // Journal of seismology. 2012. Vol. 16, issue 4. Pp. 695–707.
29. Lalin V., Zdanchuk E. Nonlinear thermodynamic model for reduced Cosserat continuum // International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2014. Vol. 8. Pp. 208–213.
30. Antman S.S. Nonlinear problems of elasticity. Berlin Heidelberg New York. Springer, 2005. 835 p.
31. Shabana A.A. Computational continuum mechanics. Cambridge University Press, 2008. 349 p.
32. Wriggers P. Nonlinear finite element methods. Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 566 p.
33. Krenk S. Non-linear modeling and analysis of solids and structures. Cambridge University Press, 2009. 361 p.
34. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор, 2001. 276 с.
35. Zhilin P.A. A new Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1996. №4. Pp. 187–204.
36. Borri M., Mello F., Atluri S.N. Variational approach for dynamics and time-finite-element: numerical studies // Computational Mechanics. 1990. No. 7(1). Pp. 49–76.
37. Исполков Ю.Г., Сливкер В.И. О консервативной моментной нагрузке // Строительная механика и расчет сооружений. 2007. №1. С. 61–67.
38. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т. 1. М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010. 704 с.
39. Елисеев В.В. Механика упругих тел. СПб. Изд-во: СПбГПУ. 2003. 336 с.
40. Lurie A.I. Nonlinear theory of elasticity. Amsterdam: North-Holland, 1990. 617 p.

*Владимир Владимирович Лалин, Санкт-Петербург, Россия  
Тел. моб.: +7(921)3199878; эл. почта: vlalin@yandex.ru*

*Елизавета Викторовна Зданчук, Санкт-Петербург, Россия  
Тел. моб.: +7(905)2518113; эл. почта: zelizaveta@yandex.ru*

*Дарья Александровна Кушова, Санкт-Петербург, Россия  
Тел. моб.: +7(911)1908859; эл. почта: dasha\_kushova@mail.ru*

*Леонид Александрович Розин, Санкт-Петербург, Россия  
Тел. раб.: +7(812)552-60-87; эл. почта: smitu@cef.spbstu.ru*

© Лалин В.В., Зданчук Е.В., Кушова Д.А., Розин Л.А., 2015



Инженерно-строительный институт  
Центр дополнительных профессиональных программ

195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,  
тел/факс: 552-94-60, [www.stroikursi.spbstu.ru](http://www.stroikursi.spbstu.ru),  
[stroikursi@mail.ru](mailto:stroikursi@mail.ru)

Приглашает специалистов проектных и строительных организаций,  
**не имеющих базового профильного высшего образования**  
на курсы профессиональной переподготовки (от 500 часов)  
по направлению «Строительство» по программам:

**П-01 «Промышленное и гражданское строительство»**

Программа включает учебные разделы:

- Основы строительного дела
- Инженерное оборудование зданий и сооружений
- Технология и контроль качества строительства
- Основы проектирования зданий и сооружений
- Автоматизация проектных работ с использованием AutoCAD
- Автоматизация сметного дела в строительстве
- Управление строительной организацией
- Управление инвестиционно-строительными проектами. Выполнение функций технического заказчика

**П-02 «Экономика и управление в строительстве»**

Программа включает учебные разделы:

- Основы строительного дела
- Инженерное оборудование зданий и сооружений
- Технология и контроль качества строительства
- Управление инвестиционно-строительными проектами. Выполнение функций технического заказчика и генерального подрядчика
- Управление строительной организацией
- Экономика и ценообразование в строительстве
- Управление строительной организацией
- Организация, управление и планирование в строительстве
- Автоматизация сметного дела в строительстве

**П-03 «Инженерные системы зданий и сооружений»**

Программа включает учебные разделы:

- Основы механики жидкости и газа
- Инженерное оборудование зданий и сооружений
- Проектирование, монтаж и эксплуатация систем вентиляции и кондиционирования
- Проектирование, монтаж и эксплуатация систем отопления и теплоснабжения
- Проектирование, монтаж и эксплуатация систем водоснабжения и водоотведения
- Автоматизация проектных работ с использованием AutoCAD
- Электроснабжение и электрооборудование объектов

**П-04 «Проектирование и конструирование зданий и сооружений»**

Программа включает учебные разделы:

- Основы сопротивления материалов и механики стержневых систем
- Проектирование и расчет оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Проектирование и расчет железобетонных конструкций
- Проектирование и расчет металлических конструкций
- Проектирование зданий и сооружений с использованием AutoCAD
- Расчет строительных конструкций с использованием SCAD Office

**П-05 «Контроль качества строительства»**

Программа включает учебные разделы:

- Основы строительного дела
- Инженерное оборудование зданий и сооружений
- Технология и контроль качества строительства
- Проектирование и расчет железобетонных конструкций
- Проектирование и расчет металлических конструкций
- Обследование строительных конструкций зданий и сооружений
- Выполнение функций технического заказчика и генерального подрядчика

По окончании курса слушателю выдается диплом о профессиональной переподготовке  
установленного образца, дающий право на ведение профессиональной деятельности

