DOI: 10.5862/JPM.225.11
УДК 539.3

Н.С. Хапилова [1], *С.В. Залётов* [2]

[1] Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк.

[2] Ростовский государственный экономический университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ НА ИЗОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

Представлено аналитическое решение осесимметричной смешанной задачи для изотропного полупространства, поверхность которого упруго закреплена вне круговой области приложения распределенной нагрузки. Обоснована процедура перехода в решении задачи от распределенной нагрузки к сосредоточенной силе. Получена компактная форма точного аналитического решения задачи о сосредоточенной силе, приложенной к упруго закрепленной поверхности полупространства. Показано, что в частном случае, когда коэффициент пропорциональности нормальных напряжений и перемещений в условии упругого закрепления границы обращается в нуль, построенное аналитическое решение задачи совпадает с известными формулами Буссинеска.

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА, АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ, ИЗОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО, СОСРЕДОТОЧЕННАЯ СИЛА.

Введение

В печати регулярно появляются работы, посвященные тем или иным обобщениям задачи Буссинеска [1], связанным с усложнением граничных условий, моделей деформирования упругого полупространства, структурных особенностей его строения. Это связано с многочисленными практическими приложениями данной задачи о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство. Ее решение практически служит базовой моделью для исследования деформации полубесконечных упругих тел под действием распределенной нагрузки.

Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел при изучении ряда научно-технических проблем в машиностроении, в горной и строительной механике приводит к постановке смешанной задачи для полупространства, в точках поверхности которого вне области приложения распределенной нагрузки выполняется условие пропорциональности нормальных напряжений и перемещений (условие упругого закрепления границы).

Создание методов решения этой пространственной задачи актуально, так как она связана с расчетом напряженно-деформированного состояния горного массива при разработке пластовых месторождений полезных ископаемых [2 – 4], а также с оценкой прочности деталей, включающих тонкие перфорированные прослойки, с исследованием ряда проблем теории многослойных оснований и т. п.

В работах [5, 6] методом интегрального преобразования Ханкеля получено аналитическое решение осесимметричной задачи для случая, когда поверхность изотропного полупространства упруго закреплена вне круговой области приложения распределенной нагрузки, касательные напряжения на всей границе отсутствуют, а напряжения на бесконечности обращаются в нуль.

В данной статье обоснована процедура перехода от распределенной нагрузки к сосредоточенной силе в построенном аналитическом решении задачи. Предложена компактная форма точного аналитического решения задачи о действии сосредоточенной силы на изотропное полупространство с упруго закрепленной поверхностью. В частном случае, когда коэффициент пропорциональности в условии упругого закрепления границы обращается в нуль, из построенного аналитического решения задачи получены известные формулы Буссинеска.

Математическая постановка и аналитическое решение осесимметричной смешанной задачи

В случае осесимметричной деформации изотропного тела основная система уравнений теории упругости, записанная в цилиндрической системе координат r, θ, z, сводится к бигармоническому уравнению [7]:

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = 0,\ \ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad (1)$$

где $\Phi(r, z)$ – функция напряжения Лява, через которую компоненты тензора напряжений $\sigma_r(r,z), \sigma_\theta(r,z), \sigma_z(r,z), \tau_{rz}(r,z)$ и векторы перемещений $u(r,z)$, $w(r,z)$ выражаются формулами

$$\begin{gathered}
\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right),\\
\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right),\\
\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right),\\
\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left((1-\nu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right),\\
u = -\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z},\\
w = \frac{1}{2G}\left(2(1-\nu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right).
\end{gathered} \qquad (2)$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, G – модуль сдвига.

Постановка рассматриваемой осесимметричной задачи для изотропного полупространства следующая:

в области

$$\{0 < r < \infty, 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le z < \infty\}$$

найти неизвестные компоненты тензора напряжений и вектора перемещений, удовлетворяющие уравнениям (1), соотношениям (2) и смешанным условиям

$$\begin{gathered}
\sigma_z(r,0) = -q(r),\ r < a;\\
\sigma_z(r,0) = kw(r,0),\ \ r > a;\\
\tau_{rz}(r,0) = 0,\ \ r < \infty
\end{gathered} \qquad (3)$$

на граничной плоскости $z = 0$.

В формулах (3) $q(r)$ – нормальная нагрузка, распределенная по кругу радиуса a и приложенная к границе полупространства; k – постоянный коэффициент пропорциональности напряжений и перемещений.

В результате решения уравнения (1) с граничными условиями (3) методом интегрального преобразования Ханкеля [8] находим компоненты вектора перемещений и тензора напряжений в упругом полупространстве [5]:

$$\begin{aligned}
u(r,z) &= -\frac{1+\nu}{E}\int_0^\infty \bar\beta(t)(1-2\nu-zt)\times\\
&\times e^{-tz}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi},\\
w(r,z) &= -\frac{1+\nu}{E}\int_0^\infty \bar\beta(t)(2\nu-2-zt)\times\\
&\times e^{-tz}J_0(rt)\frac{tdt}{t+\chi},\\
\sigma_z(r,z) &= -\int_0^\infty \bar\beta(t)t^2(1+zt)e^{-tz}J_0(rt)\frac{dt}{t+\chi},\\
\sigma_r(r,z) &= -\int_0^\infty \bar\beta(t)(1-zt)e^{-tz}J_0(rt)\frac{t^2dt}{t+\chi} +\\
&+\frac{1}{r}\int_0^\infty \bar\beta(t)(1-2\nu-zt)e^{-tz}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi},\\
\sigma_\theta(r,z) &= -2\nu\int_0^\infty \bar\beta(t)e^{-tz}J_0(rt)\frac{t^2dt}{t+\chi} -\\
&-\frac{1}{r}\int_0^\infty \bar\beta(t)(1-2\nu-zt)e^{-tz}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi},\\
\tau_{rz}(r,z) &= -z\int_0^\infty \bar\beta(t)t^3e^{-tz}J_1(rt)\frac{dt}{t+\chi},
\end{aligned} \qquad (4)$$

где $\chi = 2k(1-\nu^2)/E$; $J_0(rt)$, $J_1(rt)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков; $\bar\beta(t)$ – трансформанта введенной функции

$$\beta(r)=\begin{cases}q(r)+kw(r,0), & r<a;\\ 0, & r>a.\end{cases} \qquad (5)$$

Функция $\beta(r)$ определяется из интегрального уравнения

$$\beta(r)=q(r)+\int_0^a \beta(\xi)g_{1w}(r,\xi)d\xi,\ r<a,$$

ядро которого имеет вид

$$g_{1w}(r,\xi)=\chi\xi\int_0^\infty J_0(\xi t)J_0(rt)\frac{tdt}{t+\chi}.$$

В случае, когда $k=0$, формулы (4) трансформируются в известное решение Teредзавы [9].

Сосредоточенная сила, приложенная к упруго закрепленной границе полупространства

Для перехода в решении (4) от распределенной нагрузки к сосредоточенной силе P рассмотрим задачу для случая, когда к упругому полупространству приложена нагрузка постоянной интенсивности $q(r)=q_0$ в круговой области радиуса ε. Тогда

$$q_0=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{P}{\pi\varepsilon^2},$$

и, согласно (5), имеем:

$$\beta(r)=\begin{cases}q_0+kw(r,0), & r<\varepsilon;\\ 0, & r>\varepsilon.\end{cases} \qquad (6)$$

С учетом равенства (6), запишем трансформанту функции $\beta(r)$ при интегральном преобразовании Ханкеля в виде

$$\bar\beta(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^\varepsilon\left[\frac{P}{\pi\varepsilon^2}+kw(r,0)\right]rJ_0(rt)dr. \qquad (7)$$

Используя формулу (4), находим вертикальное перемещение на границе полупространства. Подставим выражение для $w(r,0)$ в соотношение (7), получим неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода для определения трансформанты $\bar\beta(t)$:

$$\bar\beta(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{P}{\pi\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon rJ_0(rt)dr+$$
$$+\chi\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^\infty\bar\beta(t_1)\frac{t_1}{t_1+\chi}\left[\int_0^\varepsilon rJ_0(rt)J_0(rt_1)dr\right]dt_1. \qquad (8)$$

Вычислим предел первого слагаемого в правой части равенства (8):

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{P}{\pi\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon rJ_0(rt)dr=\frac{P}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{J_1(\varepsilon t)}{\varepsilon t}=\frac{P}{2\pi}.$$

Для решения уравнения (8) используем метод последовательных приближений. В качестве нулевого приближения полагаем $\bar\beta^{[0]}(t)=P/2\pi$.

Вычислим первое приближение:

$$\bar\beta^{[1]}(t)=\frac{P}{2\pi}+\frac{P\chi}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^\varepsilon\left\{\int_0^\infty\frac{t_1}{t_1+\chi}J_0(rt_1)dt_1\right\}\times$$
$$\times\ rJ_0(rt)dr=\frac{P}{2\pi}+\frac{P\chi}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^\varepsilon\left\{\frac{1}{r}-\frac{\pi\chi}{2}[H_0(r\chi)-\right.$$
$$\left.-Y_0(r\chi)]\right\}rJ_0(rt)dr,$$

где $H_0(r\chi)$ – функция Струве нулевого порядка, $Y_0(r\chi)$ – функция Неймана нулевого порядка.

Используя представления специальных функций в форме степенных рядов, вычисляем интеграл во втором слагаемом и затем находим, что предел полученного выражения равен нулю, следовательно, $\bar\beta^{[1]}(t)=P/2\pi$. Поскольку интегральный оператор в равенстве (8) при вычислении последующих приближений не изменяется, решение интегрального уравнения записывается в виде $\bar\beta(t)=P/2\pi$.

Итак, если на упругое полупространство действует сосредоточенная сила, то трансформанта функции $\beta(r)$ при $\chi=0$ и $\chi\neq0$ равна $P/2\pi$. Подставив это значение $\bar\beta(t)$ в формулы (4), получим аналитическое решение задачи о сосредоточенной силе, приложенной к изотропному полупространству с упруго закрепленной границей.

Задача Буссинеска

Рассмотрим случай $\chi=0$, который соответствует задаче о действии сосредоточенной силы P на упругое полупространство, граничная плоскость которого не закреплена. Приравняем в решении (4) параметр χ нулю, отметим верхним индексом β характеристики напряженно-деформированного состояния, соответствующие исследуемому варианту. В результате получим распределение напряжений и перемещений в изотропном полупространстве:

$$u^{\beta}(r,z) = -\frac{1+\nu}{E}\frac{P}{2\pi}\int_0^{\infty}(1-2\nu-zt)e^{-tz}J_1(rt)dt,$$

$$w^{\beta}(r,z) = -\frac{1+\nu}{E}\frac{P}{2\pi}\int_0^{\infty}(2\nu-2-zt)e^{-tz}J_0(rt)dt,$$

$$\sigma_z^{\beta}(r,z) = -\frac{P}{2\pi}\int_0^{\infty}t(1+zt)e^{-tz}J_0(rt)dt,$$

$$\sigma_r^{\beta}(r,z) = -\frac{P}{2\pi}\int_0^{\infty}t(1-zt)e^{-tz}J_0(rt)dt + \frac{P}{2\pi r}\int_0^{\infty}(1-2\nu-zt)e^{-tz}J_1(rt)dt, \qquad (9)$$

$$\sigma_\theta^{\beta}(r,z) = -\frac{\nu P}{\pi}\int_0^{\infty}te^{-tz}J_0(rt)dt - \frac{P}{2\pi r}\int_0^{\infty}(1-2\nu-zt)e^{-tz}J_1(rt)dt,$$

$$\tau_{rz}^{\beta}(r,z) = \frac{Pz}{2\pi}\int_0^{\infty}t^2e^{-tz}J_1(rt)dt,$$

и на его границе

$$u^{\beta}(r,0) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)P}{2\pi E}\int_0^{\infty}J_1(rt)dt,$$

$$w^{\beta}(r,0) = \frac{(1-\nu^2)}{E}\frac{P}{\pi}\int_0^{\infty}J_0(rt)dt,$$

$$\sigma_z^{\beta}(r,0) = -\frac{P}{2\pi}\int_0^{\infty}tJ_0(rt)dt,$$

$$\sigma_r^{\beta}(r,0) = -\frac{P}{2\pi}\int_0^{\infty}tJ_0(rt)dt + \frac{(1-2\nu)P}{2\pi r}\int_0^{\infty}J_1(rt)dt,$$

$$\sigma_\theta^{\beta}(r,0) = -\frac{\nu P}{\pi}\int_0^{\infty}tJ_0(rt)dt - \frac{(1-2\nu)P}{2\pi r}\int_0^{\infty}J_1(rt)dt,$$

$$\tau_{rz}^{\beta}(r,0) = 0. \qquad (10)$$

Вычислим интегралы [10], входящие в формулы (9), (10) для напряжений и перемещений:

$$\int_0^{\infty}te^{-tz}J_0(rt)dt = \frac{z}{\sqrt{(r^2+z^2)^3}};$$

$$\int_0^{\infty}t^2e^{-tz}J_0(rt)dt = -\frac{1}{\sqrt{(r^2+z^2)^3}} + \frac{3z^2}{\sqrt{(r^2+z^2)^5}};$$

$$\int_0^{\infty}e^{-tz}J_1(rt)dt = \frac{1}{r}\left[1-\frac{z}{\sqrt{(r^2+z^2)}}\right];$$

$$\int_0^{\infty}te^{-tz}J_1(rt)dt = \frac{r}{\sqrt{(r^2+z^2)^3}}; \qquad (11)$$

$$\int_0^{\infty}t^2e^{-tz}J_1(rt)dt = \frac{3zr}{\sqrt{(r^2+z^2)^5}}.$$

Введем обозначение

$$\rho = \sqrt{r^2+z^2}. \qquad (12)$$

Подставим выражения для определенных интегралов (11) в равенства (9), (10). Учитывая формулу (12), после несложных преобразований получаем:

$$u^{\beta}(r,z) = -\frac{1+\nu}{E}\frac{P}{2\pi}\left[(1-2\nu)\frac{\rho-z}{\rho r} - \frac{rz}{\rho^3}\right],$$

$$w^{\beta}(r,z) = \frac{1+\nu}{E}\frac{P}{2\pi}\left[\frac{2(1-\nu)}{\rho} + \frac{z^2}{\rho^3}\right],$$

$$\sigma_z^{\beta}(r,z) = -\frac{3Pz^3}{2\pi\rho^5},$$

$$\sigma_r^{\beta}(r,z) = \frac{P}{2\pi}\left[\frac{(1-2\nu)}{r^2}\left(1-\frac{z}{\rho}\right) - \frac{3zr^2}{\rho^5}\right], \qquad (13)$$

$$\sigma_\theta^{\beta}(r,z) = -\frac{P}{2\pi}(1-2\nu)\left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{\rho r^2} - \frac{z}{\rho^3}\right],$$

$$\tau_{rz}^{\beta}(r,z) = -\frac{3Pz^2r}{2\pi\rho^5}$$

и, соответственно, в точках граничной плоскости $z = 0$:

$$u^{\beta}(r,0) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\frac{P}{2\pi r},$$

$$w^{\beta}(r,0) = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{P}{\pi r},$$

$$\sigma_z^{\beta}(r,0) = 0,$$

$$\sigma_r^{\beta}(r,0) = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi r^2}, \qquad (14)$$

$$\sigma_\theta^{\beta}(r,0) = -\frac{(1-2\nu)P}{2\pi r^2},$$

$$\tau_{rz}^{\beta}(r,0) = 0.$$

Соотношения (13), (14) совпадают с известным решением задачи Буссинеска в произвольных точках полупространства и на его границе [11].

Таким образом, показано, что формулы Буссинеска действительно являются частным случаем решения смешанной задачи для упругого полупространства с граничными условиями (3).

Точное решение задачи о сосредоточенной силе при упругом закреплении границы полупространства

Исследуем решение (4) для случая, когда $\chi \neq 0$, а приложенная к полупространству нагрузка является сосредоточенной силой. Подставим в формулы (4) трансформанту $\bar{\beta} = P / 2\pi$ и преобразуем их к более компактному виду, вычислив входящие в решение несобственные интегралы через специальные функции.

Рассмотрим сначала решение в точках граничной плоскости $z = 0$. Найдем значения следующих интегралов [10]:

$$\int_0^\infty J_0(rt)\frac{dt}{t+\chi} = \frac{\pi}{2}[H_0(r\chi) - Y_0(r\chi)], \quad (15)$$

$$\int_0^\infty J_1(rt)\frac{dt}{t+\chi} = -\frac{\pi\chi}{2}[H_{-1}(r\chi) - Y_{-1}(r\chi)], \quad (16)$$

где $H_m(r\chi)$ – функции Струве, $Y_m(r\chi)$ – функции Неймана, $m = 0; -1$.

Если порядок функции Неймана есть целое число, то, согласно работе [12], имеем:

$$Y_{-m}(x) = (-1)^m Y_m(x).$$

Из рекуррентного соотношения [13]

$$H_{\alpha-1}(x) + H_{\alpha+1}(x) = \frac{2\alpha}{x}H_\alpha(x) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)},$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, находим, что при $\alpha = 0$

$$H_{-1}(x) = -H_1(x) + \frac{2}{\pi}. \quad (17)$$

С учетом соотношений (15) – (17) вычислим содержащиеся в решении интегралы

$$\int_0^\infty J_0(rt)\frac{tdt}{t+\chi} = \frac{1}{r} - \frac{\pi\chi}{2}[H_0(r\chi) - Y_0(r\chi)], \quad (18)$$

$$\int_0^\infty J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi} = \frac{\pi\chi}{2}[H_1(r\chi) - Y_1(r\chi)] - \chi, \quad (18)$$

$$\int_0^\infty J_1(rt)\frac{dt}{t+\chi} = \frac{1}{r\chi} + 1 - \frac{\pi}{2}[H_1(r\chi) - Y_1(r\chi)].$$

Используя равенства (4), (15) – (18), получаем формулы для компонент вектора перемещений и тензора напряжений в точках граничной плоскости $z = 0$:

$$u(r,0) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)P\chi}{2\pi E} \times \left\{1 - \frac{\pi}{2}[H_1(r\chi) - Y_1(r\chi)]\right\},$$

$$w(r,0) = \frac{(1-\nu^2)P}{\pi E}\left\{\frac{1}{r} - \frac{\pi\chi}{2}[H_0(r\chi) - Y_0(r\chi)]\right\},$$

$$\sigma_z(r,0) = \frac{P\chi}{2\pi}\left\{\frac{1}{r} - \frac{\pi\chi}{2}[H_0(r\chi) - Y_0(r\chi)]\right\},$$

$$\sigma_r(r,0) = \frac{P\chi}{2\pi}\left\{\frac{1}{r} - \frac{\pi\chi}{2}[H_0(r\chi) - Y_0(r\chi)]\right\} - \frac{(1-2\nu)P\chi}{2\pi r}\left\{1 - \frac{\pi}{2}[H_1(r\chi) - Y_1(r\chi)]\right\}, \quad (19)$$

$$\sigma_\theta(r,0) = \frac{\nu P\chi}{2\pi}\left\{\frac{1}{r} - \frac{\pi\chi}{2}[H_0(r\chi) - Y_0(r\chi)]\right\} + \frac{(1-2\nu)P\chi}{2\pi r}\left\{1 - \frac{\pi}{2}[H_1(r\chi) - Y_1(r\chi)]\right\},$$

$$\tau_{rz}(r,0) = 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что из соотношений (19) следует выполнение условия пропорциональности напряжений и перемещений $\sigma_z(r,0) = kw(r,0)$ в точках граничной поверхности упругого полупространства.

Покажем далее, что, устремив параметр χ к нулю в решении (19), получим формулы Буссинеска для перемещений и напряжений. Учитывая поведение функций Неймана при малых значениях аргумента [13]

$$Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi}\ln x, \quad Y_m(x) \sim -\frac{1}{\pi}\Gamma(m)\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}, \quad m > 0,$$

а также равенства $H_0(0) = H_1(0) = 0$, вычисляем пределы функциональных выражений, стоящих в правых частях соотношений (19). В результате получаем для перемещений:

$$\lim_{\chi\to 0} u(r,0) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)P}{2\pi E}\frac{\pi}{2}\times$$
$$\times\lim_{\chi\to 0}\chi Y_1(r\chi) = u^{\beta}(r,0),$$
$$\lim_{\chi\to 0} w(r,0) = \frac{(1-\nu^2)P}{\pi E}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{r}-\frac{\pi}{2}\lim_{\chi\to 0}\chi Y_0(r\chi)\right\} = w^{\beta}(r,0)$$

и напряжений:

$$\lim_{\chi\to 0}\sigma_z(r,0) =$$
$$=\frac{P}{2\pi}\lim_{\chi\to 0}\left\{\frac{\chi}{r}-\frac{\pi\chi^2}{2}[H_0(r\chi)-Y_0(r\chi)]\right\} = 0,$$
$$\lim_{\chi\to 0}\sigma_r(r,0) = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi r^2} = \sigma_r^{\beta}(r,0),$$
$$\lim_{\chi\to 0}\sigma_\theta(r,0) = -\frac{(1-2\nu)P}{2\pi r^2} = \sigma_\theta^{\beta}(r,0).$$

Для представления в компактной форме решения задачи о сосредоточенной силе в точках (r, z) введем обозначения для сходящихся несобственных интегралов:

$$R_m(r,z) = \int_0^\infty e^{-tz}J_m(rt)\frac{dt}{t+\chi},\quad m = 0,1 \tag{20}$$

и затем вычислим интегралы

$$\int_0^\infty e^{-tz}J_0(rt)\frac{tdt}{t+\chi} = \frac{1}{\rho}-\chi R_0(r,z);$$
$$\int_0^\infty e^{-tz}J_0(rt)\frac{t^2dt}{t+\chi} = \frac{z}{\rho^3}-\frac{\chi}{\rho}+\chi^2R_0(r,z); \tag{21}$$
$$\int_0^\infty e^{-tz}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi} = \frac{\rho-z}{r\rho}-\chi R_1(r,z);$$
$$\int_0^\infty e^{-tz}J_1(rt)\frac{t^2dt}{t+\chi} = \frac{r}{\rho^3}-\frac{\chi(\rho-z)}{r\rho}+\chi^2R_1(r,z).$$

С учетом равенств (4), (20), (21) формулы для компонент вектора перемещений и тензора напряжений в произвольных точках изотропного полупространства с упруго закрепленной границей принимают вид

$$u(r,z) = -\frac{(1+\nu)P}{2\pi E}\left\{-\frac{rz}{\rho^3}+(1-2\nu+\chi z)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\rho-z}{r\rho}-\chi R_1(r,z)\right]\right\}, \tag{22}$$

$$w(r,z) = \frac{(1+\nu)P}{2\pi E\rho}\left\{\frac{z^2}{\rho^2}-z\chi+2(1-\nu)+\right.$$
$$\left.+\chi\rho(\chi z+2\nu-2)R_0(r,z)\right\},$$
$$\sigma_z(r,z) = -\frac{P}{2\pi\rho^3}\left\{\frac{3z^3}{\rho^2}-\chi[z^2+\right.$$
$$\left.+\rho^2(1-\chi z)(1-\chi\rho R_0(r,z))]\right\},$$
$$\sigma_r(r,z) = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{1-2\nu}{r^2}\left(1-\frac{z}{\rho}\right)-\frac{3zr^2}{\rho^5}\right\}+$$
$$+\frac{P\chi}{2\pi}\left\{\frac{1}{\rho^3}(r^2+\chi z\rho^2)+\frac{z(\rho-z)}{r^2\rho}-\right. \tag{22}$$
$$\left.-\chi(\chi z+1)R_0(r,z)-\frac{1}{r}(1-2\nu+\chi z)R_1(r,z)\right\},$$
$$\sigma_\theta(r,z) = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi}\left\{\frac{z}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\right\}+$$
$$+\frac{P\chi}{2\pi}\left\{\frac{\nu}{\rho}-\frac{z(\rho-z)}{\rho r^2}-\chi\nu R_0(r,z)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r}(1-2\nu+\chi z)R_1(r,z)\right\},$$
$$\tau_{rz}(r,z) = -\frac{Pz}{2\pi}\left\{\frac{3rz}{\rho^5}-\right.$$
$$\left.-\chi\left[\frac{r}{\rho^3}-\frac{\chi(\rho-z)}{r\rho}+\chi^2R_1(r,z)\right]\right\}.$$

Некоторые результаты численных исследований аналитического решения задачи о действии сосредоточенной силы на изотропное полупространство с упруго закрепленной границей приведены в работе [14].

Заключение

Точное решение задачи о сосредоточенной силе в форме (19), (22) по сравнению с интегральными формулами, полученными при подстановке в соотношения (4) трансформанты $\bar{\beta}(t) = P/2\pi$, обладает рядом преимуществ, а именно: объем предварительных исследований перед его численной реализацией значительно меньше, так как оно содержит только два несобственных интеграла $R_0(r,z), R_1(r,z)$, которые достаточно быстро сходятся. Существенное уменьшение (на порядок и более) времени компьютерных расчетов при использовании формул (19), (22) позволяет оценить напряженно-деформированное состояние упругого полупространства в любой окрестности точки приложения сосредоточенной силы, осуществив при этом объем численных исследований, достаточный для установления закономерностей распределения напряжений и перемещений в упругом теле и на его границе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Boussinesq J.** Application eles Potentiels a l`Etudel`Equilibreet du Mouvement des Solides Elastiques. Paris, Gauthier – Villars, 1885.

[2] **Кавлакан М.В., Михайлов А.М.** Осесимметричная задача об опорном давлении // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1980. № 1. С. 18–22.

[3] **Залётов С.В., Залётов В.В., Хапилова Н.С.** Влияние деформируемости угольного пласта на пространственное напряженное состояние массива горных пород в окрестности полости // Научный вестник Московского государственного горного университета. 2014. № 1(46). С. 100–107.

[4] **Залётов С.В.** Осесимметричная задача об опорном давлении на деформируемый угольный пласт // Научный вестник Московского государственного горного университета. 2014, № 1(46). С. 37–43.

[5] **Хапилова Н.С., Залётов С.В.** Осесимметричная деформация изотропного полупространства при упругом закреплении границы вне области приложения нормальной нагрузки // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XV Междунар. конф. Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2011. Т. 1. С. 246–250.

[6] **Хапилова Н.С., Залётов В.В., Залётов С.В.** Осесимметричная задача о действии распределенной нагрузки на изотропное полупространство с упруго закрепленной границей // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. 2012. Т. 25. С. 251 –259.

[7] **Амензаде Ю.А.** Теория упругости. М.: Высшая школа, 1971.

[8] **Уфлянд Я.С.** Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1963.

[9] **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.

[10] **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1974.

[11] **Тимошенко С.П., Гудьер Дж.** Теория упругости. М.: Наука, 1975.

[12] **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1978.

[13] **Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.

[14] **Залётов В.В., Залётов С.В., Илюхин А.А.** Численное исследование аналитического решения задачи о действии сосредоточенной силы на изотропное полупространство с упруго закрепленной границей // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XVII Международной конференции. Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2014. Т. 1. С. 206 –210.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ХАПИЛОВА Нелли Сергеевна – *доктор технических наук, заведующая отделом Института прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк.*

83114, Украина, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, 74
hapines.nelly@gmail.com

ЗАЛЁТОВ Сергей Владиславович – *аспирант Ростовского государственного экономического университета (РИНХ).*

344002, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, Большая Садовая ул., 69.
sesezzzbkb@gmail.com

Khapilova N.S., Zaletov S.V. THE EXACT SOLUTION OF THE PROBLEM ON A CONCENTRATED-FORCE ACTION ON THE ISOTROPIC HALF-SPACE WITH THE BOUNDARY FIXED ELASTICALLY.

We present the analytical solution of the axisymmetric mixed problem for the isotropic half-space with the surface fixed elastically outside the circular area of the application of a distributed load. In the solution of the problem, the transition procedure from a distributed load to the concentrated force has been justified. A compact form of the exact analytical solution of the problem on the concentrated force applied to the half-space with the surface fixed elastically was obtained. In the specific case when the proportionality factor of normal stresses and displacements vanishing under the condition of the elastic fixing of the boundary, the constructed analytical solution was shown to coincide with the well-known Boussinesq formulae.

AXISYMMETRIC MIXED PROBLEM, ANALYTICAL SOLUTION, ISOTROPIC HALF-SPACE, CONCENTRATED FORCE.

REFERENCES

[1] **J. Boussinesq,** Application eles Potentiels a l`Etudel`Equilibreet du Mouvement des Solides Elastiques, Paris, Gauthier – Villars, 1885.

[2] **M.V. Kavlakan, A.M. Mikhaylov,** Osesimmetrichnaya zadacha ob opornom davlenii [Axisymmetric problem on reference pressure], Fiziko-Tekhnicheskiye Problemy Razrabotki Poleznykh Iskopayemykh. 1980, 1, 18 – 22.

[3] **S.V. Zaletov, V.V. Zaletov, N.S. Khapilova,** Vliyaniye deformiruyemosti ugolnogo plasta na prostranstvennoye napryazhenno-deformiruyemoye sostoyaniye massiva gornykh porod v okrestnosti polosti, Nauchnyy Vestnik Moskovskogo Gosudarstvennogo Gornogo Universiteta. 1(46) (2014) 100–107.

[4] **S.V. Zaletov,** Osesimmetrichnaya zadacha ob opornom davlenii na deformiruyemyy ugolnyy plast, Nauchnyy Vestnik Moskovskogo Gosudarstvennogo Gornogo Universiteta. 1(46) (2014) 37–43.

[5] **N.S. Khapilova, S.V. Zaletov,** Osesimmetrichnaya deformatsiya izotropnogo poluprostranstva pri uprugom zakreplenii granitsy vne oblasti prilozheniya normalnoy nagruzki, Sovremennyye Problemy Mekhaniki Sploshnoy Sredy, Trudy XV Mezhdunarodnoy Konferentsii. Rostov-na-Donu (Rossiya): Yuzhnyy Federalnyy Universitet. 1(2011) 246 – 250.

[6] **N.S. Khapilova, V.V. Zaletov, S.V. Zaletov,** Osesimmetrichnaya zadacha o deystvii raspredelennoy nagruzki na izotropnoye poluprostranstvo s uprugo zakreplennoy granitsey, Trudy Instituta Prikladnoy Matematiki i Mekhaniki NAN Ukrainy. 25(2012) 251 – 259.

[7] **Yu.A. Amenzade,** Teoriya uprugosti [The theory of elastic strength], Moscow, Vysshaya Shkola, 1971.

[8] **Ya.S. Uflyand,** Integralnyye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti [Integral transformations in the elasticity problems], Leningrad, Nauka, 1963.

[9] **V. Novatskiy,** Teoriya uprugosti [The theory of elastic strength], Moscow, Mir, 1975.

[10] **I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik,** Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy [Tables of integrals, sums, series and products], Moscow, Nauka, 1974.

[11] **S.P. Timoshenko, Dzh. Gudyer,** Teoriya uprugosti [The theory of elastic strength], Moscow, Nauka, 1975.

[12] **G. Korn, T. Korn,** Spravochnik po matematike [A handbook of mathematics], Moscow, Nauka, 1978.

[13] **M. Abramovits, I. Stigan,** Spravochnik po spetsialnym funktsiyam [A handbook of special functions], Moscow, Nauka, 1979.

[14] **V.V. Zaletov, S.V. Zaletov, A.A. Ilyukhin,** Chislennoye issledovaniye analiticheskogo resheniya zadachi o deystvii sosredotochennoy sily na izotropnoye poluprostranstvo s uprugo zakreplennoy granitsey, Sovremennyye problemy mekhaniki sploshnoy sredy. Trudy XVII Mezhdunarodnoy konferentsii. Rostov-na-Donu (Rossiya): Yuzhnyy Federalnyy Universitet. 1(2014) 206 – 210.

THE AUTHORS

KHAPILOVA Nelly S.
Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine
74 Rosa Luxemburg St., Donetsk, 83114, Ukraine
hapines.nelly@gmail.com

ZALETOV Sergey V.
Rostov State University of Economics
69 Bolshaya Sadovaya St., Rostov-on-Don, 344002, Russian Federation
sesezzzbkb@gmail.com