Изменение диссипации энергии при переходе от ламинарного режима к турбулентному

Д.т.н., профессор, заведующий кафедрой А.Д. Гиргидов*,
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: диссипация энергии; ламинарный и турбулентный потоки; обтекание пластины; течение в цилиндрической трубе

Связи диссипации механической энергии в потоке несжимаемой жидкости с потерями напора в случае течения в трубах или с лобовым сопротивлением движению тела в жидкой среде в литературе (см. например [1-5]) уделяется недостаточное внимание. Вместе с тем эта связь может иметь существенное практическое значение и позволяет получить нетривиальные результаты [6].

Вопрос с диссипации энергии в гидромеханике часто рассматривается в связи с теоремой Гельмгольца о минимуме диссипации [1]. При этом на границах выделенного контрольного объема задаётся скорость жидкости, т.е. требуется соблюдение кинематических условий. В некоторых задачах, например при исследовании перехода ламинарного режима движения в турбулентный, может оказаться целесообразным выяснение особенностей диссипации механической энергии при заданных динамических условиях (силы, напряжений) на границах потока. Рассмотрим два примера такой постановки вопроса.

Обтекание пластины, двигающейся в покоящейся жидкости со скоростью V с постоянным тяговым усилием F (на единицу ширины пластины):

$$F = c\frac{\rho V^2}{2}, \tag{1}$$

где ρ – плотность жидкости; c – коэффициент сопротивления.

При ламинарном режиме [2]:

$$c_l = 1{,}328\, Re_L^{-1/2}, \tag{2}$$

где $Re_L = \frac{VL}{\nu}$; L – длина пластины (вдоль потока); ν – кинематический коэффициент вязкости.

При турбулентном режиме [1]:

$$c_t = 0{,}0307\, Re_L^{-1/7}. \tag{3}$$

Если ламинарный режим перешел в турбулентный, то коэффициент сопротивления возрастет, а скорость V_l, соответствующая ламинарному режиму, при постоянной тяге уменьшится до значения скорости V_t, соответствующей турбулентному режиму. Чтобы оценить значение V_l / V_t, приравняем значения тяги при двух режимах:

$$c_l\frac{\rho V_l^2}{2} = c_t\frac{\rho V_t^2}{2}. \tag{4}$$

Используя (2) и (3), из (4) имеем:

$$\frac{V_l}{V_t} = 0{,}231\left(\frac{V_l L}{\nu}\right)^{0{,}385}.$$

Для значения $\frac{V_l L}{\nu} = 10^6$ получим:

$$V_l = 4{,}72 V_t.$$

Таким образом, при переходе ламинарного режима в турбулентный в случае постоянной тяги скорость пластины уменьшается в несколько раз, и следовательно, диссипация энергии за единицу времени уменьшится во столько же раз. Вместе с тем работа, необходимая для перемещения пластины на фиксированное расстояние, при обоих режимах будет одинаковой.

Течение Гагена–Пуазейля

Рассмотрим с этих же позиций течение Гагена-Пуазейля в цилиндрической трубе диаметром D, соединяющей два резервуара. Свободные поверхности жидкости в резервуарах поддерживаются на постоянном уровне (например, с помощью устройства холостых сливов). Давление на свободные поверхности одинаково, а разность уровней жидкости в резервуарах равна Z. Во всех точках контрольной поверхности, ограничивающих объём жидкости в резервуарах и трубе, скорость жидкости равна нулю. Увеличивая длину трубы l, можно добиться того, что потери энергии на вход в трубу и на выход из трубы в резервуар, а также длина начального участка станут пренебрежимо малы. При этом в трубе будет иметь место продольно однородное движение, а потери напора по длине h_l, вычисленные по формуле Вейсбаха-Дарси, будут равны Z:

$$h_l = \lambda \frac{l}{D}\frac{\mathrm{v}^2}{2g}, \tag{5}$$

где λ – коэффициент гидравлического трения; v – средняя (объемная) скорость жидкости в трубе.

Согласно уравнению Бернулли для потока вязкой жидкости (выражающему закон изменения кинетической энергии [2]) диссипация энергии внутри трубы за единицу времени:

$$\int_{\forall} \rho\,\varepsilon\,\mathrm{d}\forall = \rho\, g\, Q\, Z = \rho\, g \frac{\pi D^2}{4}\mathrm{v}\, Z, \tag{6}$$

где $\forall$ – объем трубы; Q – расход жидкости.

Обратим внимание на то, что при сделанных предположениях продольный градиент давления в трубе постоянен и равен:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho g Z}{l} = \lambda \frac{\rho \mathrm{v}^2}{2D},$$

где x – продольная координата. Это означает, что касательное напряжение на стенке трубы также постоянно на всей внутренней поверхности трубы:

$$\tau_0 = \frac{\rho g D Z}{4l}. \tag{7}$$

Таким образом, так и в случае пластины, на поток в трубе действует постоянная сила:

$$F = \tau_0\, \pi D l = \frac{\pi D^2}{4}\rho\, g\, Z. \tag{8}$$

На первый взгляд, на поверхности объема жидкости в резервуарах и трубе скорость жидкости равна нулю, и следовательно, выполняются граничные условия теоремы Гельмгольца о минимуме диссипации. Однако следует обратить внимание, что равенство нулю скорости жидкости на свободной поверхности в резервуарах выполняется лишь асимптотически (при неограниченном увеличении размера резервуара). При этом отношение бесконечно малых скоростей при ламинарном и турбулентном режимах остается постоянным и равным отношению средних скоростей при этих режимах. Поэтому, хотя для течения Гагена-Пуазеля имеет место минимум диссипации [7], в рассматриваемом примере течения в трубе, соединяющей два резервуара, условия теоремы Гельмгольца не соблюдаются.

Как показано теоретически в [8,9], (см. также [10,11,12]), средняя скорость в трубе v_t при турбулентном режиме меньше, чем скорость v_l при ламинарном. Это следует также из экспериментального графика Никурадзе [1]. Если при одном и том же градиенте давления могут существовать и ламинарный и турбулентный режимы, то имеем равенство:

$$\lambda_l \frac{l}{D} \frac{\rho v_l^{\,2}}{2} = \lambda_t \frac{l}{D} \frac{\rho v_t^2}{2}, \tag{9}$$

где λ_l и λ_t – коэффициенты гидравлического трения при ламинарном и турбулентном режимах соответственно. Из графика Никурадзе следует, что во всём диапазоне чисел Рейнольдса $Re = \frac{vD}{\nu}$, где ν – кинематический коэффициент вязкости, в котором может существовать турбулентный режим, $\lambda_t > \lambda_l$. При этом из (9) следует, что $v_l > v_t$, и согласно (5) диссипация энергии при турбулентном режиме в контрольном объеме меньше, чем при ламинарном.

Чтобы оценить, насколько уменьшается диссипация энергии, предположим, что при турбулентном режиме труба гидравлически гладкая, так что

$$\lambda_t = \frac{0{,}3164}{Re_t^{0{,}25}},$$

а при ламинарном $\lambda_l = \frac{64}{Re_l}$. Подставляя эти выражения в (9), получим:

$$\frac{64}{Re_l} \frac{l}{D} \frac{\rho v_l^{\,2}}{2} = \frac{0{,}3164}{Re_t^{0{,}25}} \frac{l}{D} \frac{\rho v_t^2}{2}.$$

Из этого равенства следует:

$$\frac{v_l}{v_t} = 0{,}0494\, Re_t^{0{,}75}. \tag{10}$$

Приняв в качестве минимального числа Рейнольдса, при котором реализуется развитый турбулентный режим, Re =4000, получим $v_l = 2{,}48 v_t$.

Таким образом, в соответствии с (6) диссипация энергии при турбулентном режиме в 2,5 раза меньше, чем при ламинарном. Отметим, что при соответствующем расчетным условиям значении $Re \cong 10^4$ ламинарный режим в трубе может существовать: если создать соответствующие условия, то ламинарное движение можно наблюдать при Re =4 x 10^4 [8].

Представляется полезным отметить то, что граничные условия для цилиндрической трубы неограниченной длины без указания на их присоединения к резервуарам в полярной системе координат (x, r), где r – расстояние от оси трубы, имеют следующий вид:

при $r = \frac{D}{2}$ имеем $u_x = 0$; $\tau_0 = \mathrm{const}$, где u_x – продольная скорость жидкости.

Таким образом, на поверхности цилиндра для идентификации потоков должны быть заданы скорость (равная нулю) и (в соответствии с законом Ньютона для вязких напряжений) её нормальная производная $\frac{\partial u_x}{\partial r}$, которая и определяет среднюю скорость потока:

$$v = \sqrt{\frac{8}{\lambda} \nu \frac{\partial u_x}{\partial r}}. \tag{11}$$

Задание на поверхности трубопровода двух кинематических условий равносильно принятию постоянного значения силы F, действующей со стороны трубы на поток.

Приведенные примеры демонстрируют следующее: если сила, действующая со стороны твердых границ на поток жидкости, постоянна, то при потере устойчивости ламинарного потока и переходе к турбулентному режиму возникает поле скорости, уменьшающее диссипацию механической энергии в несколько (в два и более) раз по сравнению с ламинарным режимом.

Литература

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Наука, 1978. 736 с.
2. Гиргидов А. Д. Механика жидкости и газа. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 545 с.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М. : Мир, 1973. 758 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. IV, Гидродинамика. М. : Наука, 1986. 736 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М. : Наука, 1963. 742 с.
6. Гиргидов А. Д. О лобовом сопротивлении движению цилиндра // Инженерно-строительный журнал. 2011. №1. С. 9-11.
7. Гиргидов А. Д. О диссипации энергии при движении несжимаемой жидкости // ДАН. 2009. Том 425, №3. С. 1-4.
8. Thomas T. Y. Qualitative analysis of the flow of fluids in pipes // Amer. J. Math. 1942. Vol. 64. P. 754.
9. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М. : Мир, 1981. 640с.
10. Busse F. H. Bounds on the transport of mass and momentum by turbulent flow between parallel plates // ZAMP. 1969. Vol. 20. Pp. 1-14.
11. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М. : Изд-во иностр. лит., 1963. 256 с.
12. Joseph D. D. Response curves for plane Poiseuille flow // Advances in applied mechanics. 1974. Vol. 14. Pp. 241–278.

**Артур Давидович Гиргидов, Санкт-Петербург, Россия*

Тел. раб.: +7(812)552-64-01; эл. почта: hydraulika@cef.spbstu.ru

Changing of energy dissipation in the transition of laminar flow to turbulence

A.D. Girgidov,
Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia,
+7(812)552-64-01; e-mail: hydraulika@cef.spbstu.ru

Key words

energy dissipation; turbulent and laminar flow; flow past a cylinder; flow in a pipe

Abstract

Under the same fixed dynamical boundary conditions the energy dissipation in laminar and turbulent flow are compared. As examples the flow past a plate and the flow through a pipe are considered.

It is found out that in turbulent flow energy dissipation is essentially less than in laminar flow (under the same boundary dynamical conditions).

References

1. Loytsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid mechanics]. Moscow : Nauka, 1978. 736 p. (rus)
2. Girgidov A. D. *Mekhanika zhidkosti i gaza (gidravlika)* [Fluid mechanics (hydraulics)]. Saint-Petersburg, Izd-vo Politekhn. un-ta, 2007. 545 p. (rus)
3. Betchelor G. Vvedenie v dinamiku zhidkosti [Introduction to fluid dynamics]. Moscow : Mir, 1973. 758 p.
4. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika. T. IV, Gidrodinamika* [Theoretical physics. Vol. 4. Hydrodynamics]. Moscow : Nauka, 1986. 736 p.
5. Shlikhting G. *Teoriya pogranichnogo sloya* [Boundary-layer theory]. Moscow : Nauka, 1963. 742 p.
6. Girgidov A. D. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No. 1. Pp. 9-11.
7. Girgidov A. D. *Dnevnik Akademii nauk*. 2009. Vol. 425, No. 3. Pp. 1-4.
8. Thomas T. Y. Qualitative analysis of the flow of fluids in pipes. *Amer. J. Math*. 1942. Vol. 64. P. 754.
9. Dzhozef D. *Ustoychivost dvizheniy zhidkosti* [Motion stability of the fluid]. Moscow : Mir, 1981. 640 p.
10. Busse F. H. Bounds on the transport of mass and momentum by turbulent flow between parallel plates. *ZAMP*. 1969. Vol. 20. Pp. 1-14.
11. Serrin Dzh. *Matematicheskie osnovy klassicheskoy mekhaniki zhidkosti* [Mathematical foundation of classical fluid mechanics]. Moscow : Izd-vo inostr. lit., 1963. 256 p.
12. Joseph D. D. Response curves for plane Poiseuille flow. *Advances in applied mechanics*. 1974. Vol. 14. Pp. 241–278.

Full text of this article in Russian: pp. 49-52