Конечные элементы для расчета ограждающих конструкций из тонкостенных профилей

Д.т.н., профессор, заведующий кафедрой В.В. Лалин;
аспирант В.А. Рыбаков,*
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: термопанель; кручение; депланация; интерполяционные полиномы; деформация сдвига; бимомент; матрица жесткости

В последние годы в России и за рубежом [1, 2] наблюдается широкое применение металлоконструкций в промышленном и гражданском строительстве. Особое место в строительной индустрии занимают легкие стальные тонкостенные конструкции, имеющие ряд технологических и эксплуатационных достоинств (легкость, быстровозводимость и т.д.) [3, 4].

В сборно-монолитном и каркасном строительстве, объемы которого постоянно растут, в качестве эффективных и экономичных ограждающих конструкций можно использовать так называемые термопанели [5, 6]. Термопанели – это панели наружных стен с каркасом из тонкостенных термопрофилей [7]. Из термопанелей строятся наружные стены многоэтажных зданий на железобетонном или стальном каркасе, которые воспринимают ветровую нагрузку, действующую на фасад, и переносят её на основной несущий каркас здания (рис. 1).

Рисунок 1. Вариант ограждающей конструкции: навесная конструкция стены

Теории расчета обычных (толщиной, как правило, более 4 мм) конструкций оказываются неприменимы к тонкостенным, являющимися основными, конструкциям термопанели, ввиду малой толщины профилей.

Для повседневного решения инженерных задач расчета элементов тонкостенных конструкций можно выделить принципиально 2 группы способов расчета: основанные на оболочечном моделировании и на стержневом.

Первая группа связана с представлением тонкостенного стержня в виде оболочки и дальнейшим численным расчетом, как правило, с помощью метода конечных элементов, в программных комплексах SCAD, Lira, SOFiSTiK и т.д. [8-12 и др.]. Такие способы расчета являются достаточно точными, но весьма трудоемкими в инженерно-конструкторской деятельности, особенно с точки зрения комплексного расчета конструкции.

Во второй группе способов можно выделить аналитические и численные методы расчета тонкостенных стержней, связанные с введением дополнительной «седьмой» степени свободы [13, 14].

Как нами отмечалось ранее в [15, 16], аналитические методы решения [17-20], как правило, являются трудоемкими для повседневного применения ввиду сложности математических уравнений и функций, и возникает необходимость использования численных методов расчета, например, метода конечных элементов (МКЭ) [21, 22].

Так, в диссертации Туснина А.Р. [23] предлагается так называемый метод тонкостенных конечных элементов, анализируя который, следует отметить следующее.

1. Безразмерные коэффициенты $\mu, g.\alpha, \lambda$ при компонентах матриц жесткости являются отношением гиперболических функций, например,

$$\mu = \frac{kl(kl\,ch(kl) - sh(kl))}{kl\,sh(kl) - 2ch(kl) + 2}, \tag{1}$$

знаменатель которых при определенных значениях параметров может быть вырожден.

2. Не решена задача учета деформаций сдвига при кручении в тонкостенных стержнях. Принимаемое в теории В.З. Власова [10] допущение о равенстве нулю угла сдвига $\gamma_{\omega} = 0$, автоматически влечет за собой зависимость между углом закручивания $\theta(x)$ и мерой депланации $\beta(x)$:

$$\theta' = \beta\,. \tag{2}$$

3. Метод тонкостенных конечных элементов неприменим для расчета тонкостенных стержней замкнутого профиля (коробчатый, составной и др.).

С другой стороны, в различных теориях тонкостенных стержней фигурирует понятие дополнительного силового фактора, ***бимомента***, отвечающего «седьмой степени свободы» – депланации тонкостенного стрежня [14, 18].

Следует отметить, что в инженерной практике бимомент является важной характеристикой, поскольку он напрямую влияет на нормальные напряжения [14, 18]:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{B_{\omega}}{W_{\omega}}\,. \tag{3}$$

Как известно, нормальные напряжения относятся к первой группе предельного состояния конструкции, нормируются строительными нормами, отвечают за прочность и устойчивость конструкции и, соответственно, нуждаются в точном вычислении.

Также следует отметить, что в новом СП 16.13330.2011 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*», введенного в действие с 20 мая 2011 г., бимомент как силовой фактор фигурирует наравне с остальными силовыми факторами: формула (43) для поперечно-изгибаемых элементов сплошного сечения; формулы (105) и (106) – для элементов, воспринимающих продольную силу с изгибом.

Формулы (43), (105) и (106) СП 16.13330.2011 по своей сути являются модификацией формулы (3), приведенной выше.

Согласно теоретическим и экспериментальным исследованиям [9, 14, 18, 19, 23, 24 и др.], в тонкостенных конструкциях, находящихся в условиях изгибного кручения, составляющая нормальных напряжений от бимомента может значительно превышать составляющую от изгибающего момента, а влияние касательных напряжений на напряженно-деформированное состояние мало по сравнению с влиянием нормальных напряжений.

Поэтому, с учетом того, что бимомент является производной некоторого порядка от функций перемещений, в данной статье рассмотрим различные способы аппроксимаций функций перемещений, влияющих на точность вычисления бимомента.

Итак, **целью работы** является разработка численного метода расчета тонкостенных стержневых систем по полусдвиговой и бессдвиговой теориям расчета. В данной статье рассмотрим первый этап разработки численного метода – построение тонкостенных конечных элементов различных типов в зависимости от способа аппроксимации функций деформаций (кручения и депланации): линейной, квадратичной и кубической.

1. Кубическая аппроксимация функции кручения для бессдвиговой теории тонкостенных стержней В.З. Власова

Согласно [24], выражение энергии деформации E тонкостенного стержня можно представить как функционал от функций перемещений ξ,θ,ζ,η, являющийся частью функционала Лагранжа:

$$E(\xi,\theta,\zeta,\eta)=\frac{1}{2}\int_0^l ((EA(\xi^{/})^2+EI_y(\zeta^{//})^2+EI_z(\eta^{//})^2+EI_\omega(\theta^{//})^2+GI_d(\theta^{/})^2)dx\,, \qquad (4)$$

где EA, EI_y, EI_y – жесткости на растяжение-сжатие и изгиб в двух плоскостях;

EI_ω и GI_d – жесткости на депланацию и кручение соответственно.

Поскольку функции $\xi=\xi(x),\zeta=\zeta(x),\eta=\eta(x)$ описывают деформации соответственно растяжения-сжатия и изгиба в двух направлениях и являются независимыми от функции кручения $\theta=\theta(x)$, то в дальнейшем будем опускать составляющие подынтегрального выражения с их участием и рассматривать только функцию кручения как независимую:

$$E(\theta)=\frac{1}{2}\int_0^l (EI_\omega(\theta^{//})^2+GI_d(\theta^{/})^2)dx\,. \qquad (5)$$

Разобьем тонкостенный стержень, имеющий длину L, на n двухузловых конечных элементов.

Рассмотрим *i*-й конечный элемент длиной l с 4 степенями свободы: два узловых поворота относительно оси *x*, отвечающих углам закручивания θ_i и θ_{i+1}; две меры депланации $\theta_i^{/}$ и $\theta_{i+1}^{//}$ (рис. 2).

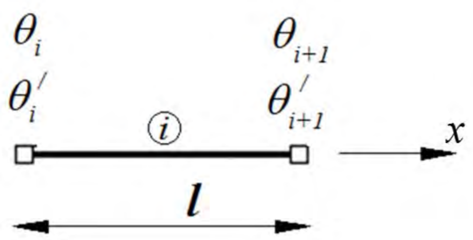

Рисунок 2. Двухузловой конечный элемент с 4 степенями свободы (по бессдвиговой теории)

Столбец узловых перемещений в пределах одного КЭ:

$$[U^{(i)}]=\begin{pmatrix}\theta_i\\ \theta_i^{/}\\ \theta_{i+1}\\ \theta_{i+1}^{/}\end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Для применения метода конечных элементов к теории тонкостенных стержней представим функцию кручения $\theta(x)$ в пределах одного конечного элемента с помощью кубических интерполяционных полиномов Эрмита $Э^{(i)}$ [25], умноженных на узловые неизвестные:

$$\theta(x)=Э_1^{(i)}\theta_i+Э_2^{(i)}\theta_i^{/}+Э_3^{(i)}\theta_{i+1}+Э_4^{(i)}\theta_{i+1}^{/}\,. \qquad (7)$$

Поскольку в выражении функционала (5) максимальная степень производной от входящей в него аппроксимируемой функции перемещений θ – вторая, то минимальной степенью интерполяционных полиномов будет третья степень.

Запишем в матричной форме функционал энергии деформации (4). Для этого функцию $\theta(x)$ представим в виде матричного произведения:

$$\theta(x)=[Э^{(i)}][U^{(i)}]\,, \qquad (8)$$

где $[Э^{(i)}]$ – матрица-строка, состоящая из 4 полиномов третьей степени, вид которых приводится, например, в [25]:

$$[Э^{(i)}]=[Э_1^{(i)}(x),Э_2^{(i)}(x),Э_3^{(i)}(x),Э_4^{(i)}(x)]. \tag{9}$$

Подставляя (8) в функционал (5), получим:

$$E=\frac{1}{2}[U^{(i)}]^T[K_\omega^{(i)}][U^{(i)}]+\frac{1}{2}[U^{(i)}]^T[K_d^{(i)}][U^{(i)}], \tag{10}$$

где введены обозначения:

$$[K_\omega^{(i)}]=EI_\omega\int_0^l[Э^{//}]^T[Э^{//}]dx\,;\ [K_d^{(i)}]=GI_d\int_0^l[Э^{/}]^T[Э^{/}]dx. \tag{11}$$

Матрицы $[K_\omega^{(i)}]$ и $[K_d^{(i)}]$, имеющие размер 4x4, являются соответственно ***депланационной*** и ***крутильной*** составляющими матрицы жесткости *i*-го элемента $[K^{(i)}]$:

$$[K^{(i)}]=[K_\omega^{(i)}]+[K_d^{(i)}]. \tag{12}$$

После подстановки (9) в (11) и проведения вычислительных операций дифференцирования, а затем – интегрирования, эти составляющие матрицы жесткости окажутся равными:

$$[K_\omega^{(i)}]=\begin{pmatrix} k_{11}^{(i)} & k_{12}^{(i)} & k_{13}^{(i)} & k_{14}^{(i)} \\ k_{21}^{(i)} & k_{22}^{(i)} & k_{23}^{(i)} & k_{24}^{(i)} \\ k_{31}^{(i)} & k_{32}^{(i)} & k_{33}^{(i)} & k_{34}^{(i)} \\ k_{41}^{(i)} & k_{42}^{(i)} & k_{43}^{(i)} & k_{44}^{(i)} \end{pmatrix}=EI_\omega\begin{pmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$[K_d^{(i)}]=\begin{pmatrix} k_{11}^{(i)} & k_{12}^{(i)} & k_{13}^{(i)} & k_{14}^{(i)} \\ k_{21}^{(i)} & k_{22}^{(i)} & k_{23}^{(i)} & k_{24}^{(i)} \\ k_{31}^{(i)} & k_{32}^{(i)} & k_{33}^{(i)} & k_{34}^{(i)} \\ k_{41}^{(i)} & k_{42}^{(i)} & k_{43}^{(i)} & k_{44}^{(i)} \end{pmatrix}=GI_d\begin{pmatrix} \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15}l & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30}l \\ -\frac{6}{5}l & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{30}l & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15}l \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Окончательно выражение для энергии деформации конечного элемента запишется как:

$$E=\frac{1}{2}[U^{(i)}]^T[K^{(i)}][U^{(i)}]. \tag{15}$$

Силовой потенциал, согласно [22], запишем в виде:

$$\Pi_S(u)=\frac{1}{2}\int_0^l(\xi p_x+\eta p_y+\zeta p_z+\theta m_x+\eta^{/}m_z-\zeta^{/}m_y-\theta^{/}m_B)dx, \tag{16}$$

где $p_x,p_y,p_z,m_x,m_z,m_y,m_B$ – распределенные по длине внешние силовые факторы соответственно: 3 силовых нагрузки вдоль осей *x,y* и *z*, далее 3 моментных нагрузки относительно осей *x,y* и *z*, и внешний распределенный бимомент.

Если выделить составляющие работы кручения и депланации, связанные только с функцией $\theta(x)$, то выражение (16) упростится до следующего:

$$\Pi_S(\theta) = \int_0^l (\theta m_x - \theta^{/} m_B)dx\,. \tag{17}$$

С учетом выражения (8):

$$\Pi_S(u) = \int_0^l ([Э^{(i)}][U^{(i)}]m_x - [Э^{(i)}][U^{(i)}]m_B)dx\,, \tag{18}$$

или:

$$\Pi_S(u) = [P^{(i)}][U^{(i)}]\,, \tag{19}$$

где $[P^{(i)}]$ – столбец узловых нагрузок, выражаемый равенством:

$$[P^{(i)}] = \int_0^l ([Э^{(i)}]m_x - [Э^{(i)}]m_B)dx\,. \tag{20}$$

Стоит отметить, что второе слагаемое подынтегрального выражения (20) практически может быть приравнено к нулю ввиду того, что внешней нагрузки в виде распределенного бимомента в инженерной практике не встречается.

Если обратиться к общей формуле для функционала Лагранжа $L(u)$ [14] в виде:

$$L(u) = E(u) - \Pi_S(u)\,, \tag{21}$$

то условие минимума лагранжиана на кинематически допустимых полях перемещений сводится к уравнениям Эйлера для этого функционала, являющимися в нашем случае уравнениями равновесия стержня:

$$[K^{(i)}][U^{(i)}] = [P^{(i)}]\,. \tag{22}$$

2. Полусдвиговая теория расчета. Линейная аппроксимация функций кручения и депланации

В книге Сливкера В.И. [24] предлагается особый вид функционала энергии деформации:

$$E(\theta,\beta) = \frac{1}{2}\int_0^l (EI_\omega(\beta^{/})^2 + GI_d(\theta^{/})^2 + \frac{GI_d}{\psi - 1}(\theta^{/} - \beta)^2)dx\,, \tag{23}$$

основанного на так называемой полусдвиговой теории тонкостенных стержней, в которой, в отличие от бессдвиговой теории, условие (2) не выполняется. Поэтому функции кручения и депланации ($\theta=\theta(x)$ и $\beta=\beta(x)$ соответственно) являются независимыми.

В формуле (23) введено обозначение ψ – параметр, определяемый коэффициентом влияния формы $\mu_{\omega\omega}$, вычисляемый на основе геометрических характеристик и эпюры секториальных координат.

Данная теория, учитывающая часть энергии сдвига (третье слагаемое подынтегрального выражения (23)) и подходящая для расчета тонкостенных стержней не только открытого, но и замкнутого профилей, в настоящее время не реализована.

Рассмотрим двухузловой *i*-й конечный элемент длиной l, имеющий 4 степени свободы: 2 поворота и 2 возможности депланировать из плоскости сечения в каждом узле (см. рис.3).

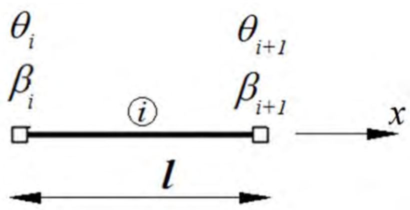

Рисунок 3. Двухузловой конечный элемент с 4 степенями свободы (по полусдвиговой теории)

Начало координат совместим с левым узлом *i*.

Функции перемещений представим в виде произведения суммы линейных полиномов и значений перемещений в узлах:

$$\theta(x)=Э_1^{(i)}\theta_i+Э_2\theta_{i+1}^{(i)}, \tag{24}$$

$$\beta(x)=Э_1^{(i)}\beta_i+Э_2^{(i)}\beta_{i+1}, \tag{25}$$

где $Э_1^{(i)},Э_2^{(i)}$ – линейные интерполяционные полиномы:

$$Э_1^{(i)}(x)=-\frac{1}{l}x+1, \tag{26}$$

$$Э_2^{(i)}(x)=\frac{1}{l}x. \tag{27}$$

Отметим, что в выражении функционала (23) обе функции θ и β имеют только первую производную. Поэтому минимальной степенью интерполяционных полиномов будет первая степень.

Столбец неизвестных представим в виде:

$$[U_d^{(i)}]=\begin{pmatrix}\theta_i\\ \beta_i\\ \theta_{i+1}\\ \beta_{i+1}\end{pmatrix}. \tag{28}$$

Запишем в матричной форме функционал энергии деформации (23).

Для этого выражения (24) и (25) для функций $\theta(x)$ и $\beta(x)$ перепишем в виде матричных произведений:

$$\theta(x)=[Э^{(i)}][U_d^{(i)}],\ \beta(x)=[Э^{(i)}][U_\omega^{(i)}], \tag{29}$$

где $[Э^{(i)}]$ – матрица-строка, состоящая из 2 полиномов (26) и (27):

$$[Э^{(i)}]=[Э_1^{(i)}(x),Э_2^{(i)}(x)]; \tag{30}$$

$[U_d^{(i)}]$ и $[U_\omega^{(i)}]$ – столбцы перемещений одного вида:

$$[U_d^{(i)}]=\begin{pmatrix}\theta_i\\ \theta_{i+1}\end{pmatrix};[U_\omega^{(i)}]=\begin{pmatrix}\beta_i\\ \beta_{i+1}\end{pmatrix}. \tag{31}$$

Разность ($\theta^/-\beta$) представим в виде:

$$\theta^/(x)-\beta(x)=[\Phi^{(i)}][U^{(i)}], \tag{32}$$

где $[\Phi^{(i)}]$ – матрица-строка, имеющая вид:

$$[\Phi^{(i)}]=[\frac{dЭ_1^{(i)}(x)}{dx},-Э_1^{(i)}(x),\frac{dЭ_2^{(i)}(x)}{dx},-Э_2^{(i)}(x)]. \tag{33}$$

Подставляя (29) и (32) в функционал (23), получим:

$$E=\frac{1}{2}[U^{(i)}]^T[K_\omega^{(i)}][U^{(i)}]+\frac{1}{2}[U^{(i)}]^T[K_d^{(i)}][U^{(i)}]+\frac{1}{2}[U^{(i)}]^T[K_{\omega d}^{(i)}][U^{(i)}], \qquad (34)$$

где введены обозначения:

$$[K_\omega^{(i)}]=EI_\omega\int_0^l[Э']^T[Э']dx\,;\;[K_d^{(i)}]=GI_d\int_0^l[Э']^T[Э']dx\,;[K_{\omega d}^{(i)}]=\frac{GI_d}{\psi-1}\int_0^l[\varPhi]^T[\varPhi]dx\,. \qquad (35)$$

Матрицы $[K_\omega^{(i)}]$ и $[K_d^{(i)}]$, имеющие размер 2х2, и матрица $[K_{\omega d}^{(i)}]$, имеющая размер 4х4, являются соответственно ***депланационной, крутильной*** и ***депланационно-крутильной*** составляющими матрицы жесткости *i*-го элемента $[K^{(i)}]$:

$$[K^{(i)}]=[K_\omega^{(i)}]+[K_d^{(i)}]+[K_{\omega d}^{(i)}]. \qquad (36)$$

После подстановки (30) и (33) в (35) и проведения вычислительных операций дифференцирования, а затем интегрирования, эти составляющие матрицы жесткости, с учетом перехода от размеров 2х2 к 4х4, окажутся равными:

$$[K_\omega^{(i)}]=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&k_{22}^{(i)}&0&k_{24}^{(i)}\\0&0&0&0\\0&k_{42}^{(i)}&0&k_{44}^{(i)}\end{pmatrix}=EI_\omega\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{l}&0&-\frac{1}{l}\\0&0&0&0\\0&-\frac{1}{l}&0&\frac{1}{l}\end{pmatrix}, \qquad (37)$$

$$[K_d^{(i)}]=\begin{pmatrix}k_{11}^{(i)}&0&k_{13}^{(i)}&0\\0&0&0&0\\k_{31}^{(i)}&0&k_{33}^{(i)}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=GI_d\begin{pmatrix}\frac{1}{l}&0&-\frac{1}{l}&0\\0&0&0&0\\-\frac{1}{l}&0&\frac{1}{l}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \qquad (38)$$

$$[K_{\omega d}^{(i)}]=\begin{pmatrix}k_{11}^{(i)}&k_{12}^{(i)}&k_{13}^{(i)}&k_{14}^{(i)}\\k_{21}^{(i)}&k_{22}^{(i)}&k_{23}^{(i)}&k_{24}^{(i)}\\k_{31}^{(i)}&k_{32}^{(i)}&k_{33}^{(i)}&k_{34}^{(i)}\\k_{41}^{(i)}&k_{42}^{(i)}&k_{43}^{(i)}&k_{44}^{(i)}\end{pmatrix}=\frac{GI_d}{\psi-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{l}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{l}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}l&-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}l\\-\frac{1}{l}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{l}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{6}l&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}l\end{pmatrix}. \qquad (39)$$

Силовой потенциал, согласно [24], запишем в виде:

$$\varPi_S(\theta,\beta)=\int_0^l(\theta m_x-\beta m_B)dx\,. \qquad (40)$$

С учетом выражений (29):

$$\varPi_S=\int_0^l([Э^{(i)}][U_d^{(i)}]m_x-[Э^{(i)}][U_\omega^{(i)}]m_B)dx\,, \qquad (41)$$

или:

$$\varPi_S=[P^{(i)}][U^{(i)}], \qquad (42)$$

где $[P^{(i)}]$ – столбец узловых нагрузок, выражаемый равенством:

$$[P^{(i)}]=\int_0^l([Э^{(i)}]m_x-[Э^{(i)}]m_B)dx\,. \qquad (43)$$

3. Линейная аппроксимация функции депланации и квадратичная аппроксимация функции кручения в полусдвиговой теории

Как показали численные эксперименты, скорость сходимости построенного линейного конечного элемента достаточно низка. Так, например, численное значение максимального угла закручивания 3-метровой швеллеровой балки под нагрузкой от распределенного крутящего момента имеет приемлемую 5%-ю погрешность лишь при разбиении стержня на 64 конечных элемента.

Возникает необходимость в более точной аппроксимации функций перемещения. В связи с этим перейдем к рассмотрению параболической аппроксимации функции кручения θ с сохранением линейной аппроксимации функции депланации β.

Рассмотрим трехузловой i-й конечный элемент длиной l, имеющий 5 степеней свободы: 3 поворота в каждом узле и 2 возможности депланировать из плоскости сечения в крайних узлах (рис. 4).

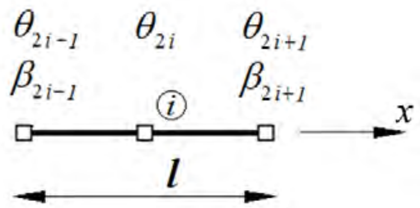

Рисунок 4. Трехузловой конечный элемент с 5 степенями свободы

Функции перемещений θ и β представим в виде произведения суммы полиномов и значений перемещений в узлах:

$$\theta(x) = Э_3^{(i)}\theta_{2i-1} + Э_4^{(i)}\theta_{2i} + Э_5^{(i)}\theta_{2i+1}, \tag{44}$$

$$\beta(x) = Э_1^{(i)}\beta_{2i-1} + Э_2^{(i)}\beta_{2i+1}, \tag{45}$$

где $Э_3^{(i)}$, $Э_4^{(i)}$, $Э_5^{(i)}$ – квадратичные интерполяционные полиномы:

$$Э_3^{(i)}(x) = \frac{2}{l_i^2}x^2 - \frac{3}{l_i}x + 1;\; Э_4^{(i)}(x) = -\frac{4}{l_i^2}x^2 + \frac{4}{l_i}x;\; Э_5^{(i)}(x) = \frac{2}{l_i^2}x^2 - \frac{1}{l_i}x. \tag{46}$$

Столбец неизвестных в таком случае будет выглядеть следующим образом:

$$[U^{(i)}] = \begin{pmatrix} \theta_{2i-1} \\ \beta_{2i-1} \\ \theta_{2i} \\ \theta_{2i+1} \\ \beta_{2i+1} \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Запишем в матричной форме функционал энергии деформации (23).

Для этого выражения (44) и (45) для функций $\theta(x)$ и $\beta(x)$ перепишем в виде матричных произведений:

$$\theta(x) = [Э_{кв}^{(i)}][U_d^{(i)}],\; \beta(x) = [Э^{(i)}][U_\omega^{(i)}], \tag{48}$$

где $[Э^{(i)}]$ – матрица-строка, состоящая из 2 полиномов (формула (30)), а $[Э_{кв}^{(i)}]$ – матрица-строка, состоящая из 3 полиномов (46):

$$[Э_{кв}^{(i)}] = [Э_3^{(i)}(x), Э_4^{(i)}(x), Э_5^{(i)}(x)]; \tag{49}$$

$[U_d^{(i)}]$ и $[U_\omega^{(i)}]$ – столбцы перемещений одного вида:

$$[U_d^{(i)}] = \begin{pmatrix} \theta_{2i-1} \\ \theta_{2i} \\ \theta_{2i+1} \end{pmatrix};\; [U_\omega^{(i)}] = \begin{pmatrix} \beta_{2i-1} \\ \beta_{2i+1} \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Разность ($\theta^{/} - \beta$) представим в виде:

$$\theta^{/}(x) - \beta(x) = [\Phi^{(i)}_{кв/лин}][U^{(i)}], \tag{51}$$

где $[\Phi^{(i)}_{кв/лин}]$ – матрица-строка, имеющая вид:

$$[\Phi^{(i)}_{кв/лин}] = [\frac{dЭ^{(i)}_3(x)}{dx}, -Э^{(i)}_1(x), \frac{dЭ^{(i)}_4(x)}{dx}, \frac{dЭ^{(i)}_5(x)}{dx}, -Э^{(i)}_2(x)]. \tag{52}$$

Подставляя (48) и (51) в функционал (23), получим формулу (34) для выражения энергии деформации, но уже для случая квадратичной аппроксимации функции кручения и линейной аппроксимации функции депланации.

Компоненты матрицы жесткости (36), имеющей размер 5x5, для данного случая будут следующими:

$$[K^{(i)}_{\omega}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(i)}_{22} & 0 & 0 & k^{(i)}_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(i)}_{52} & 0 & 0 & k^{(i)}_{55} \end{pmatrix} = EI_{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & -\frac{1}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} \end{pmatrix}, \tag{53}$$

$$[K^{(i)}_{d}] = \begin{pmatrix} k^{(i)}_{11} & 0 & k^{(i)}_{13} & k^{(i)}_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k^{(i)}_{31} & 0 & k^{(i)}_{33} & k^{(i)}_{34} & 0 \\ k^{(i)}_{41} & 0 & k^{(i)}_{43} & k^{(i)}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = GI_{d} \begin{pmatrix} \frac{7}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & \frac{1}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{16}{3l} & -\frac{8}{3l} & 0 \\ \frac{1}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & \frac{7}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{54}$$

$$[K^{(i)}_{\omega d}] = \begin{pmatrix} k^{(i)}_{11} & k^{(i)}_{12} & k^{(i)}_{13} & k^{(i)}_{14} & k^{(i)}_{15} \\ k^{(i)}_{21} & k^{(i)}_{22} & k^{(i)}_{23} & k^{(i)}_{24} & k^{(i)}_{25} \\ k^{(i)}_{31} & k^{(i)}_{32} & k^{(i)}_{33} & k^{(i)}_{34} & k^{(i)}_{35} \\ k^{(i)}_{41} & k^{(i)}_{42} & k^{(i)}_{43} & k^{(i)}_{44} & k^{(i)}_{45} \\ k^{(i)}_{51} & k^{(i)}_{52} & k^{(i)}_{53} & k^{(i)}_{54} & k^{(i)}_{54} \end{pmatrix} = \frac{GI_d}{\psi - 1} \begin{pmatrix} \frac{7}{3l} & \frac{5}{6} & -\frac{8}{3l} & \frac{1}{3l} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{l}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{l}{6} \\ \frac{8}{3l} & -\frac{2}{3} & \frac{16}{3l} & -\frac{8}{3l} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3l} & -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3l} & \frac{7}{3l} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{l}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{l}{3} \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Силовой потенциал $\Pi_S(\theta, \beta)$ и столбец узловых нагрузок$[P^{(i)}]$ можно выразить с помощью формул (40)-(43), но вкладывая в обозначения уже смысл, заключенный в формулах (49)-(50).

4. Квадратичная аппроксимация функций кручения и депланации в полусдвиговой теории

При использовании линейной аппроксимации функции депланации β на конечном элементе значение бимомента окажется постоянной величиной в пределах одного конечного элемента. Таким образом, эпюра бимоментов окажется ступенчатой в пределах длины стержня, если не производить никаких сглаживаний функций.

Рассмотрим трехузловой *i*-й конечный элемент длиной l, имеющий 6 степеней свободы: 3 поворота и 3 депланации из плоскости сечения в каждом узле (см. рис. 5).

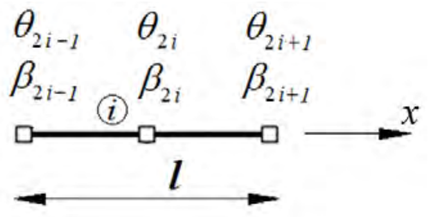

Рисунок 5. Трехузловой конечный элемент с 6 степенями свободы

Функции перемещений θ и β представим в виде произведения суммы квадратичных полиномов и значений перемещений в узлах:

$$\theta(x) = Э_3^{(i)}\theta_{2i-1} + Э_4^{(i)}\theta_{2i} + Э_5^{(i)}\theta_{2i+1}, \tag{56}$$

$$\beta(x) = Э_3^{(i)}\beta_{2i-1} + Э_4^{(i)}\beta_{2i} + Э_5^{(i)}\beta_{2i+1}, \tag{57}$$

где $Э_3^{(i)}, Э_4^{(i)}, Э_5^{(i)}$ – квадратичные интерполяционные полиномы (46).

Столбец неизвестных, по сравнению с формулой (47), дополнится еще одним компонентом и приобретет размер 6х6:

$$[U^{(i)}] = \begin{pmatrix} \theta_{2i-1} \\ \beta_{2i-1} \\ \theta_{2i} \\ \beta_{2i} \\ \theta_{2i+1} \\ \beta_{2i+1} \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Запишем в матричной форме функционал энергии деформации (23).

Для этого выражения (56) и (57) для функций $\theta(x)$ и $\beta(x)$ перепишем в виде матричных произведений:

$$\theta(x) = [Э_{кв}^{(i)}][U_d^{(i)}], \; \beta(x) = [Э_{кв}^{(i)}][U_\omega^{(i)}], \tag{59}$$

где $[Э_{кв}^{(i)}]$ – матрица-строка, состоящая из 3 полиномов (формула (49));

$[U_d^{(i)}]$ и $[U_\omega^{(i)}]$ – столбцы перемещений одного вида:

$$[U_d^{(i)}] = \begin{pmatrix} \theta_{2i-1} \\ \theta_{2i} \\ \theta_{2i+1} \end{pmatrix}; [U_\omega^{(i)}] = \begin{pmatrix} \beta_{2i-1} \\ \beta_{2i} \\ \beta_{2i+1} \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Разность ($\theta' - \beta$) представим в виде:

$$\theta'(x) - \beta(x) = [\Phi_{кв}^{(i)}][U^{(i)}], \tag{61}$$

где $[\Phi_{кв}^{(i)}]$ – матрица-строка, имеющая вид:

$$[\Phi_{кв}^{(i)}] = [\frac{dЭ_3^{(i)}(x)}{dx}, -Э_3^{(i)}(x), \frac{dЭ_4^{(i)}(x)}{dx}, -Э_4^{(i)}(x), \frac{dЭ_5^{(i)}(x)}{dx}, -Э_5^{(i)}(x)]. \tag{62}$$

Подставляя (59) и (61) в функционал (23), получим формулу (34) для выражения энергии деформации, но уже для случая квадратичной аппроксимации функции кручения и депланации.

Компоненты матрицы жесткости (36), имеющей размер 6х6, для рассматриваемого случая будут следующими:

$$[K_{\omega}^{(i)}]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^{(i)} & 0 & k_{24}^{(i)} & 0 & k_{26}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{42}^{(i)} & 0 & k_{44}^{(i)} & 0 & k_{46}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{62}^{(i)} & 0 & k_{64}^{(i)} & 0 & k_{66}^{(i)} \end{pmatrix}=EI_{\omega}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{1}{3l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{16}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{7}{3l} \end{pmatrix}, \tag{63}$$

$$[K_{d}^{(i)}]=\begin{pmatrix} k_{11}^{(i)} & 0 & k_{13}^{(i)} & 0 & k_{15}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^{(i)} & 0 & k_{33}^{(i)} & 0 & k_{35}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{51}^{(i)} & 0 & k_{53}^{(i)} & 0 & k_{54}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=GI_{d}\begin{pmatrix} \frac{7}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{1}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{16}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & 0 & \frac{7}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{64}$$

$$[K_{\omega d}^{(i)}]=\begin{pmatrix} k_{11}^{(i)} & k_{12}^{(i)} & k_{13}^{(i)} & k_{14}^{(i)} & k_{15}^{(i)} & k_{16}^{(i)} \\ k_{21}^{(i)} & k_{22}^{(i)} & k_{23}^{(i)} & k_{24}^{(i)} & k_{25}^{(i)} & k_{26}^{(i)} \\ k_{31}^{(i)} & k_{32}^{(i)} & k_{33}^{(i)} & k_{34}^{(i)} & k_{35}^{(i)} & k_{36}^{(i)} \\ k_{41}^{(i)} & k_{42}^{(i)} & k_{43}^{(i)} & k_{44}^{(i)} & k_{45}^{(i)} & k_{46}^{(i)} \\ k_{51}^{(i)} & k_{52}^{(i)} & k_{53}^{(i)} & k_{54}^{(i)} & k_{54}^{(i)} & k_{56}^{(i)} \\ k_{61}^{(i)} & k_{62}^{(i)} & k_{63}^{(i)} & k_{64}^{(i)} & k_{64}^{(i)} & k_{66}^{(i)} \end{pmatrix}=\frac{GI_d}{\psi-1}\begin{pmatrix} \frac{7}{3l} & \frac{1}{2} & -\frac{8}{3l} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3l} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{15}l & -\frac{2}{3} & \frac{1}{15}l & \frac{1}{6} & -\frac{1}{30}l \\ -\frac{8}{3l} & -\frac{2}{3} & \frac{16}{3l} & 0 & -\frac{8}{3l} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{15}l & 0 & \frac{8}{15}l & -\frac{2}{3} & \frac{1}{15}l \\ \frac{1}{3l} & \frac{1}{6} & -\frac{8}{3l} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3l} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{30}l & \frac{2}{3} & \frac{1}{15}l & -\frac{1}{2} & \frac{2}{15}l \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Выводы

В результате работы была построена матрица жесткости конечных элементов тонкостенных стержней открытого профиля по **бессдвиговой теории** посредством кубической аппроксимации функций кручения и депланации

Построены 3 типа матриц жесткости конечных элементов тонкостенных стержней открытого и закрытого профилей **по полусдвиговой теории**, основанные соответственно на 3 видах аппроксимаций функций деформаций:

1) линейная аппроксимация функций кручения 2-узлового конечного элемента с 4 степенями свободы;
2) квадратичная аппроксимация функции кручения и линейная аппроксимация функции депланации 3-узлового конечного элемента с 5 степенями свободы;
3) квадратичная аппроксимация функций кручения и депланации 3-узлового конечного элемента с 6 степенями свободы.

Предложенные матрицы жесткости являются универсальными для расчетов методом конечных элементов как тонкостенных стержней открытого профиля (на основе теорий В.З. Власова [18] и В.И. Сливкера [24]), так и закрытого профиля (на основе теории А.А. Уманского) ввиду схожести соответствующих дифференциальных уравнений кручения и функционалов энергии деформации.

Результаты работы наиболее применимы при проектировании строительных конструкций на основе холодногнутых оцинкованных тонкостенных стержневых элементов **открытого профиля** и при проектировании элементов **замкнутого профиля**.

Литература

1. Cheng Y., Schafer B.W. Simulation of cold-formed steel beams in local and distortional buckling with applications to the direct strength method // Journal of Constructional Steel Research. Volume 63, Issue 5. 2007. Pp. 581-590.
2. Sedlacek G., Bild J., Ungermann D. On the buckling of plates – Some recent developments in light weight structures // 4th international conference on aluminium weldments, Tokyo. 1988.
3. Альхименко А. И., Ватин Н. И., Рыбаков В. А. Технология легких стальных тонкостенных конструкций. СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2008. 27 с.
4. Назмеева Т. В. Обеспечение пространственной жесткости покрытия в зданиях из ЛСТК // Инженерно-строительный журнал. 2009. №6(8). С. 12-15.
5. Айрумян Э. Л., Каменщиков Н. И. Рамные конструкции стального каркаса из оцинкованных гнутых профилей для одноэтажных зданий различного назначения// Мир строительства и недвижимости. 2006. №36. С. 9-11.
6. Кузьменко Д. В., Ватин Н. И.. Ограждающая конструкция «нулевой» толщины – термопанель // Инженерно-строительный журнал. 2008. №1. С. 13-21.
7. Ватин Н. И., Попова Е. Н. Термопрофиль в легких стальных тонкостенных конструкциях. СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2006. 63 с.
8. Гордеева А. О., Ватин Н. И. Расчетная конечно-элементная модель холодногнутого перфорированного тонкостенного стержня в программно-вычислительном комплексе SCAD Office // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3(21). С. 36-46.
9. Смазнов Д. Н. Конечноэлементное моделирование работы жестких вставок тонкостенных холоднoформованных стальных профилей // Научный журнал КубГАУ. 2011. №67(03). С. 1-13.
10. Смазнов Д. Н. Устойчивость при сжатии составных колонн, выполненных из профилей из высокопрочной стали // Инженерно-строительный журнал. 2009. №3(5). С. 42-49.
11. Шатов Д. С. Конечноэлементное моделирование перфорированных стоек открытого сечения из холодногнутых профилей // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3(21). С. 32-35.
12. Юрченко В. В. Проектирование каркасов зданий из тонкостенных холодногнутых профилей в среде SCAD Office // Инженерно-строительный журнал. 2010. №8(18). С. 38-46.
13. Ватин Н. И., Рыбаков В. А. Расчет металлоконструкций: седьмая степень свободы. // СтройПРОФИль. 2007. № 2(56). С. 60-63.
14. Рыбаков В. А. Основы строительной механики легких стальных тонкостенных конструкций: учеб. пособие. СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2010. 206 с.
15. Рыбаков В. А. Применение метода конечных элементов для полусдвиговой теории тонкостенных стержней // Материалы Пятого Всероссийского форума студентов, аспирантов и молодых ученых. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2011. С. 30-32.
16. Недвига П. Н., Рыбаков В. А. Эмпирические методы оценки несущей способности стальных тонкостенных просечно-перфорированных балок и балок со сплошной стенкой // Инженерно-строительный журнал. 2009. №8(10). С. 27-30.
17. Бычков Д. В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. М. : Госстройиздат, 1962. 476 с.
18. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни (прочность, устойчивость, колебания). М. : Госстройиздат, 1940. 276 с.
19. Кузьмин Н. А., Лукаш П. А., Милейковский И. Е. Расчет конструкций из тонкостенных стержней и оболочек. М. : Госстройиздат, 1960. 264 с.
20. Белый Г. И. Расчет упругопластических тонкостенных стержней по пространственно-деформируемой схеме // Межвуз. темат. сб. тр. 1983. №42 (Строительная механика сооружений). С. 40-48.
21. Лалин В. В., Колосова Г. С. Численные методы в строительстве. Решение одномерных задач методом конечных элементов: Учеб.пособие. СПб. : Изд-во СПбГТУ, 2001. 72 с.
22. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред: Пер. с англ. М. : Недра, 1974. 239 с.
23. Туснин А. Р. Расчет и проектирование конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. д.т.н.: Спец. 05.23.01. М. , 2004. 37 с.
24. Сливкер В. И. Строительная механика. Вариационные основы. Учебное пособие. М. : Издательство ассоциации строительных вузов, 2005. 736 с.
25. Колосова Г. С. Решение одномерных задач строительной механики численными методами : учеб. пособие. СПб. : Изд-во СПбГТУ, 1993. 84 с.

Владимир Александрович Рыбаков, Санкт-Петербург, Россия

Тел. моб. +7(964)331-29-15; эл. почта: fishermanoff@mail.ru