Секция 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И УПРАВЛЕНИЯ

Председатель – ***Козлов Владимир Николаевич***,
д-р техн. наук, профессор СПбПУ,
заслуженный работник высшей школы РФ,
заместитель председателя СПб отделения МАН ВШ

Ученый секретарь – ***Ефремов Артём Александрович***,
канд. физ.-мат. наук, доцент СПбПУ

УДК 517.9
doi:10.18720/SPBPU/2/id20-149

Козлов Владимир Николаевич,
д-р техн. наук, профессор

ОПЕРАТОРЫ ПРОГРАММНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ОБЪЕКТОВ НА АФФИННО-ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Институт компьютерных наук и технологий,
Высшая школа киберфизических систем и управления
Санкт-Петербург, Россия,
kozlov_vn@spbstu.ru

Аннотация. Оптимальные управления дискретными объектами на счетных пересечениях линейных многообразий и эллипсоидов заданы проекторами для качественного анализа устойчивости программных движений.

Ключевые слова: операторы стабилизации, программная динамика объектов, обобщенные проекционные операторы.

Vladimir N. Kozlov,
Doctor of Technical Sciences, Professor

OPERATOR FOR SOFTWARE STABILIZATION OF OBJECTS ON AFFINE-ELLIPSOIDAL SETS

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
Institute of Computer Science and Technology, HigherSchool
of Cyber-Physical Systems and Control, St. Petersburg, Russia,
kozlov_vn@spbstu.ru

Abstract. Optimals controls of discrete objects on countable intersections jf linear manifolds and ellipsoids and are set by projectors of qualitative of program movements.
Keywords: stabilizations operator, program dynamics of object, generalized projection operator.

В настоящее время актуальными являются задачи дискретного оптимального управления на счетных «аффинно-эллипсоидальных» множествах в виде пересечений линейных многообразий и эллипсоидов ограничений для состояний и управлений. Методы конечномерной оптимизации динамических систем дополняют принцип максимума и динамическое программирование для дискретных систем [1 – 3]. Однако *численная форма* представления оптимальных управлений с обратной связью не позволяет качественно анализировать устойчивость систем данного класса. Далее получены операторные решения задач оптимизации на счетных пересечениях линейных многообразий и эллипсоидов на основе ортогональных проекторов [4 – 6].

Проекторы, синтезированные на основе необходимых условий оптимальности, задают квазианалитические операторы ограниченных управлений с обратной связью. Это позволяет анализировать устойчивость локально или интервально оптимальных систем с ограниченной обратной связью в конечномерных и функциональных пространствах на основе сжимающих отображений или методов функционального анализа [6 – 8].

Далее рассмотрен обобщенный проекционный базовый метод вычисления управлений, определяющий в явной форме операторы-проекторы для оптимальных или допустимых управлений с обратной связью на основе *программируемых ограничений.* Эти обобщенные операторы задают программные стабилизирующие управления для динамических объектов, дополняя известные базовые методы.

1. Постановка задачи

Задача минимизации нормы на пересечении линейного многообразия и эллипсоида имеет вид: вычислить вектор

$$x_* = \arg\min\left\{ \varphi(x) = \| x - C \|_2^2 \;\middle|\; Ax = b, A \in \mathbb{R}^{1\times 2},\ (x-d)^T Q(x-d) \le r^2 \right\} \in R^n, (1)$$

где линейное многообразие задает модели объектов и дополнительные требования, а эллипсоид – ограничения на координаты и управления.

Требуется преобразовать задачу (1) к *эквивалентной базовой задаче минимизации* на пересечении линейного многообразия и шара:

$$z_* = \arg\min\left\{ \varphi(z) = \| z - C_z \|_2^2 \;\middle|\; z \in D = \left[\bar{A}z = b_z,\ \bar{A} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ z^T z \le r^2 \right] \right\} \in R^{2n}, (2)$$

где z_* – образ проектора на элементе C_z определяет управления с обратной связью при линейных и эллипсоидальных ограничениях.

2. Проекционные операторы для задач обобщенной оптимизации с обратной связью

Задача (1) с линейным многообразием и эллипсоидом преобразуется к обобщенной базовой задаче (2) с линейным многообразием и ограничением-шаром на квадрат евклидовой нормы. Это реализуется введением дополнительного ограничения вида:

$$Q^{1/2}\left(x-d\right)=y \;\Rightarrow\; Q^{1/2}x-Q^{1/2}d=y \;\Rightarrow\; Q^{1/2}x-y=Q^{1/2}d. \qquad (3)$$

Линейное многообразие в задаче (2) формируется с учетом линейного многообразия в (1) и дополнительного ограничения (3). В результате обобщенное линейное многообразие в базовой задаче (2) примет следующий вид:

$$Ax=b_x, \qquad (4)$$

$$Q^{1/2}x-y=Q^{1/2}d. \qquad (5)$$

Эквивалентное линейное многообразие на основе уравнений (4), (5) в пространстве составных векторов $z\triangleq\left(x \mid y\right)^T \mathbb{R}^{2n}$ задается в форме:

$$\overline{A}z\triangleq\begin{bmatrix} A & 0 \\ Q^{1/2} & -E_n \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_x \\ Q^{1/2}d \end{bmatrix}\triangleq b_z. \qquad (6.а)$$

Ограничение-неравенство на норму составного вектора z примет вид:

$$\| z \|_2^2\le r^2,\; z\triangleq\left(x-C_x \mid y\right)^T\in R^{2n}. \qquad (6.б)$$

Преобразования (3) – (5), (6.а), (6.б) определяют задачу вычисления управлений на пересечении многообразия и шара в виде: вычислить

$$z_*\triangleq\begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix}=\arg\min\left\{\varphi(z)=\left\|z-C_z\right\|_2^2\triangleq\left\|\begin{matrix} x-C_x \\ y \end{matrix}\right\|_2^2 \mid \overline{A}z\triangleq b_z:\right.$$

$$\left.\overline{A}z\triangleq\begin{bmatrix} A & 0 \\ Q^{1/2} & -E_n \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_x \\ Q^{1/2}d \end{bmatrix}\triangleq b_z;\; \| z \|_2^2\le r^2\right\}\in R^{2n}. \qquad (7)$$

Таким образом, в результате математического обобщения исходная задача (1) сведена к задаче вычисления обобщенного вектора (7), который для линейного функционала задан не ортогональным (косым) проектором, а для функционала типа евклидовой нормы – базовыми ортогональными проекторами [5, 6].

Утверждение о квазианалитическом проекционном операторе оптимизации. Пусть (7) – корректная задача. Для того, чтобы решение корректной неклассической задачи (7) в силу «принципа граничных лагранжевых экстремумов», представлял *оператор минимизации* [5, 6]

$$z_* = P^+ b + P^0 C\theta_*, \tag{8.а}$$

необходимо и достаточно, чтобы параметры оператора (8.а) были определены равенствами

$$\theta_* = P(\theta_0) = 0,5\left(|\theta_0| - |\theta_0 - 1| + 1 \right) \in [0,\ 1], \tag{8.б}$$

$$\theta_0 = 0,5\left(1 - \eta^{-1}\right),\ \ \eta^{-1} = \sigma = \left(\rho / \alpha\right)^{1/2},\ \alpha = r^2 - b^T\left(AA^T\right)^{-1} b,\ \ \rho = C^T P^0 C.$$

Преобразования задач минимизации и их решения в этом утверждении в виде (8.а), (8.б) иллюстрируются применением в задаче управления. В операторе (8.б) использована частичная регуляризация с помощью негладких операторов, а полная регуляризация введена в [6].

3. Обобщенный оператор оптимизации управлений для программной стабилизации

Пусть разностный оператор линейного или линеаризованного динамического объекта имеет вид:

$$x_{k+1} = Hx_k + Fu_k,\quad x_{k0} = x^0.$$

Требуется определить проекционный оператор управления с обратной связью по состоянию динамической системы с линейным разностным оператором объекта, который минимизирует локальный функционал качества типа евклидовой нормы на пересечении обобщенного линейного многообразия

$$\overline{A} z_k \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ Q^{1/2} & -E_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ Q^{1/2} d \end{bmatrix} \triangleq \overline{b}_z,$$

и эллипсоида ограничений-неравенств, который имеет вид:

$$\left(s_k - d_k\right)^T Q\left(s_k - d_k\right) \le r^2.$$

В результате задача вычисления управлений для дискретного времени «погружается» в счетное число задач: вычислить семейство числовых векторов, которые являются решениями задач оптимизации

$$u_{k*} \triangleq T_u z_{k*} = T_u \begin{pmatrix} s_{k*} \\ y_{k*} \end{pmatrix} = \tag{9}$$

$$u_{k*} \triangleq T_u z_{k*} = T_u \begin{pmatrix} s_{k*} \\ y_{k*} \end{pmatrix} = \arg\min \left\{ \varphi(z_k) = \left\| z_k - C_z \right\|_2^2 \triangleq \left\| \begin{matrix} s_k - C_s \\ y_k \end{matrix} \right\|_2^2 \mid \bar{A} z_k = b_{zk} : \right.$$

$$\left. \begin{aligned} &\bar{A} z_k \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ Q^{1/2} & -E_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{xk} \\ Q^{1/2} d_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H x_k \\ Q^{1/2} d_k \end{bmatrix} \triangleq b_{zk};\ \bar{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ Q^{1/2} & -E_n \end{bmatrix} \\ &A \triangleq \left[E \middle| -F \right],\ z_k \triangleq \left[s_k \mid u_k \right]^T,\ s_k \triangleq \left[x_{k+1} \mid u_k \right]^T,\ z_k \triangleq \| z_k \|_2^2 \le r^2 \end{aligned} \right\}.$$

где параметры и векторы определены соответствующими равенствами, а программное воздействие может быть задано, например, вектором d_k.

4. Вычислительный эксперимент

Эксперимент иллюстрирует этапы вычислений с учетом преобразований. Пусть задача оптимизации имеет вид: вычислить вектор

$$z_* = \arg\min \left\{ \varphi(z) = \| z - C \|_2^2 \;\middle|\; \bar{A} z = b_z,\ \bar{A} \in R^{1\times 2}, (z-d)^T Q (z-d) \le r^2 \right\} \in R^2,$$

где R – диагональная матрица эллипсоида, а остальные параметры равны

$$C_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, Q^{1/2} = \left(Q^T\right)^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0,\ Az = \begin{bmatrix} 1 & | & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 1 = b,\ d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ r = 2.$$

Ограничения и параметры базовой задачи оптимизации (7) имеют следующий вид:

$$\bar{A} z \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ Q^{1/2} & -E_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ Q^{1/2} d \end{bmatrix} \triangleq b_z.$$

1). Вычисление ортогонального проектора на линейное многообразие: $P^0 = E_n - P^+ \bar{A} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & -6 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \times 1/7 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \times 1/7.$$

2). Вычисление вектора $P^{+}b_z = \overline{A}^T\left(\overline{A}\overline{A}^T\right)^{-1}b_z =$

$$=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&2\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\times\left(\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&-1&0\\0&2&0&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&2\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\right)^{-1}\times\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\3\\1\end{bmatrix}\times 1/7.$$

Вычисление квадрата евклидовой нормы этого вектора, который равен:

$$\left\|P^{+}b_z\right\|_2^2 \triangleq \left(P^{+}b_z\right)^T P^{+}b_z = \left\|\begin{bmatrix}3&4&3&1\end{bmatrix}\right\|_2^2\times 1/49 = \left(9+16+9+1\right) = 35/49.$$

3). Вычисление скалярного параметра $\rho = C^T P^0 C =$

$$=\begin{bmatrix}1&3&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&-1&1&-2\\-1&1&-1&2\\1&-1&1&-2\\-2&2&-2&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\3\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\2\\-2\\4\end{bmatrix}\times 1/7 = 1/7\left(-2+6\right)=4/7.$$

4). Вычисление функции ограничений с учетом результата шага 2:

$$\alpha_k = r^2 - \left\|P^{+}b\right\|_2^2 = r^2 - \left\|\overline{A}^T\left(\overline{A}\overline{A}^T\right)^{-1}b\right\|_2^2 = 4 - 35/49 = 4 - 0.71 = 3.29;$$

а также функции $\alpha_k^{1/2} = \left(r^2 - \left\|P^{+}b\right\|_2^2\right)^{1/2} = \left(4 - 23/7\right)^{1/2} = 1{,}8.$

5). Вычисление оптимального решения (8) для базовой задачи

$$z_* = P^{+}b + P^0 C\left(\alpha/\rho\right)^{1/2} =$$

$$=\begin{bmatrix}3\\4\\3\\1\end{bmatrix}\times 1/7+\begin{bmatrix}1&-1&1&-2\\-1&1&-1&2\\1&-1&1&-2\\-2&2&-2&4\end{bmatrix}\times 1/7\begin{bmatrix}1\\3\\0\\0\end{bmatrix}\times 3{,}17=\begin{bmatrix}-0.48\\1.47\\-0.48\\0.70\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\end{bmatrix},$$

где параметры имеют следующие числовые значения:

$$\alpha_k^{1/2} = \left(r^2 - \left\|P^{+}b\right\|_2^2\right)^{1/2} = 0.85;\ \rho = C^T P^0 C = 0.57;\ \eta^{-1} = \left(\rho/\alpha\right)^{1/2} = 0.06;$$

$$\theta_0 = 0{,}5\left(1-\eta^{-1}\right) = -7.5;\ \theta_* = P\left(\theta_0\right) = 0{,}5\left(\left|\theta_0\right| - \left|\theta_0 - 1\right| + 1\right) \in \left[0,\ 1\right] = 0.$$

В результате вектор

$$z_* = \begin{pmatrix}s_k & y_k\end{pmatrix}^T,\ s_k = \begin{pmatrix}x_{k+1,*} & u_{k,*}\end{pmatrix}^T,$$

вычисленный в п. 5), определяет вектор оптимального решения задачи синтеза (9), включающий локальный прогноз состояния объекта $x_{k+1,*}$ и управлений $u_{k,*}$ вида:

$$s_{k*} = T_u z_{k*} = \left(x_{k+1,*} \mid u_{k,*} \right)^T = \left(-0.48 \mid 1.47 \right)^T .$$

Таким образом, введенный оператор управления позволяет сформулировать управления с обратной связью и исследовать устойчивость динамических объектов с помощью методов, предложенных в [5, 6].

Выводы:

1. Задача условной минимизации квадрата евклидовой нормы вектора *на пересечении линейного многообразия и эллипсоида* преобразована к задаче условной минимизации нормы обобщенного вектора *на пересечении линейного многообразия и шара* в пространстве удвоенной размерности.
2. Преобразование позволяет исключить *проблему аналитического обращения оператора,* заданного суммой единичной матрицы и произведения симметричной и проекционной матриц.

Преобразование исходной задачи условной квадратичной оптимизации в задачу условной минимизации нормы в пространстве более высокого размера позволяет вычислить счетное число управлений на основе базовых проекционных операторов оптимальных или допустимых решений на основе ортогональных проекторов.

Список литературы

1. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
2. Kirk D.E. Optimal Control Theoriy. Mineola. New York: Dover Publications, 1998. 452 p.
3. Stengel R.F. Optimal Control and Estimation. New York, 1994. 639 p.
4. Kozlov V.N. The Method of Minimization of Linear Functionals Based on Compact Sets. Proceedings of the 12th International workshop on computer science and information technologies (CSIT 2010), Russia, Moscow – Saint Petersburg, Russia, 2010. Vol. 2. Pp. 157–159.
5. Козлов В.Н. Негладкие системы, операторы оптимизации и устойчивость энергообъединений. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского политехнического университета, 2012. 177 с.
6. Козлов В.Н. Проекционный метод оптимизации оптимальных ограниченных управлений динамических систем энергетики. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского политехн. университета Петра Великого, 2019. 170 с.
7. Козлов В.Н., Ефремов А.А. Введение в функциональный анализ. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского политехн. университета Петра Великого, 2019. 170 с.
8. Козлов В.Н. Функциональный анализ. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского политехн. университета Петра Великого, 2020. 450 с.