УДК 621.311
doi:10.18720/SPBPU/2/id20-150

Шашихин Владимир Николаевич[1],
д-р техн. наук, профессор, профессор СПбПУ;
Будник Светлана Владимировна[2],
магистрант, бакалавр

СИНТЕЗ ДВУХУРОВНЕВОГО СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

[1,2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия,

[1] shashihin@bk.ru, [2] budnik.sveta@mail.ru

Аннотация. Синтез систем с робастными свойствами является одной из наиболее важных проблем теории автоматического управления. В докладе рассмотрены методы синтеза робастного управления для крупномасштабных систем с параметрическими возмущениями. Объекты управления с параметрами, заданными принадлежностью ограниченным множествам, моделируются дифференциальными уравнениями с интервальными коэффициентами. Решение проблемы синтеза робастного управления основано на втором методе Ляпунова, обобщенного с использованием функций Ляпунова, зависимых от параметров объекта. Параметры регулятора определяются решениями двум матричных уравнений типа Риккати.

Ключевые слова: робастное управление, двухуровневое управление, крупномасштабные системы, параметрические возмущения.

Vladimir N. Shashikhin[1],
Professor, Doctor of Technical Sciences;
Svetlana V. Budnik[2],
Master Student, BSc

DESIENG TWO-LEVEL STABILIZATION CONTROL FOR SYSTEMS UNDER PARAMETRIC PERTURBATIONS

[1,2] Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russia,
[1] shashihin@bk.ru, [2] budnik.sveta@mail.ru

Abstract. Design of systems with robust properties is one the most important problem in control theory. This paper describes technique to synthesize robust control for large-scale systems when their parameters deviate from the rated values. A plant with roughly defined parameters have mathematical model is given by the vector differential equation with interval coefficients. The problem is solved based on the Lyapunov direct method with parameter-depend Lyapunov function, generalized for systems stability with use of interval models. Parameters of robust control are defined solutions two Riccati equations.

Keywords: robust control, two-level control, large-scale systems, parametric perturbations.

Введение

Рассматривается стратегия управления, обеспечивающая робастную устойчивость динамических систем по отношению к неопределенности в задании параметров. Решение задачи робастной стабилизации получено в рамках двухуровневых структур управления на основе применения скалярно-оптимизационных функций и методов интервального анализа [1 – 3].

Требования к динамическим параметрам системы определяются заданной степенью устойчивости, которая характеризует, с одной стороны, расположение собственных значений матрицы замкнутой системы в открытой левой полуплоскости, а с другой стороны – затухание некоторой функции, характеризующей обобщенное расстояние от интегральных кривых системы до начала координат фазового пространства [7]. При этом необходимо обеспечить требуемую степень устойчивости в условиях наличия параметрических возмущений.

Условием эффективного применения прямого метода Ляпунова к задачам робастной устойчивости систем с интервальными коэффициентами является либо знание воронок $\{x_t\}$ – отрезков решений системы дифференциальных уравнений, которые приходят в эту точку и отвечают эквивалентным начальным условиям, удовлетворяющим соотношению $\left\|x_t(t_0, x_0, A, B)\right\| \le \varepsilon$, либо возможность построения оценок с использованием скалярно-оптимизационных функций множеств указанных воронок.

1. Постановка задачи

Пусть математическая модель объекта управления определяется системой векторных дифференциальных уравнений с неопределенными (неточно заданными) параметрами [8]

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u, \;\; x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$ – векторы фазовых координат и управляющих воздействий соответственно; $\tilde{A} \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ – интервальная матрица, определяющая динамические свойства системы, $\tilde{A} = \left(\tilde{a}_{ij}\right)_{i,j=1}^{n} = \left[\underline{A}; \overline{A}\right] \in \mathbf{IR}^{n\times n}$, $\tilde{a}_{ij} = \left[\underline{a}_{ij}; \overline{a}_{ij}\right]$; $\widetilde{B} \in \mathbf{IR}^{n\times m}$ – интервальная матрица, характеризующая влияние управляющих воздействий; $\widetilde{b}_{ij} = \left[\underline{b}_{ij}; \overline{b}_{ij}\right]$; $\mathbf{IR}$ – множество вещественных интервалов, включающее как правильные интервалы ($\underline{a} \le \overline{a}$), так и неправильные интервалы ($\underline{a} > \overline{a}$).

Используя центрированную форму представления интервальных матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, преобразуем систему (1) к виду

$$\dot{x} = \left(A_0 + \delta\tilde{A}\right)x + \left(B_0 + \delta\tilde{B}\right)u, \;\; x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $A_0 = \text{med}\,\tilde{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B_0 = \text{med}\,\tilde{B} \in \mathbf{R}^{n\times m}$ – матрицы медианных (номинальных) значений параметров исследуемой системы;
$\delta\tilde{A} = \left[-\text{rad}\,\tilde{A};+\text{rad}\,\tilde{A}\right] = \left[-1;+1\right]\text{rad}\,\tilde{A} \in \mathbf{IR}^{n\times n}$,
$\delta\tilde{B} = \left[-\text{rad}\,\tilde{B};+\text{rad}\,\tilde{B}\right] = \left[-1;+1\right]\text{rad}\,\tilde{B} \in \mathbf{IR}^{n\times m}$ – интервальные матрицы, характеризующие вариации параметров.

С учетом введенных определений цель робастной стабилизации системы может быть формализована следующим образом: в классе двухуровневых структур управления

$$u = -\tilde{K}x\,,\; \tilde{K} \in \mathbf{IR}^{m\times n}$$

синтезировать управление, при котором процессы в интервальной системе (2) удовлетворяют целевому неравенству при всех параметрических возмущениях из ограниченного множества: $A \in \tilde{A}$, $B \in \tilde{B}$.

2. Декомпозиция системы

При синтезе используется декомпозиция исходной крупномасштабной системы. Пусть система с параметрическими возмущениями представима в виде взаимодействующих подсистем

$$\dot{x}_i = \tilde{A}_{ii}x_i + \tilde{B}_{ii}u_i + \sum_{j=1,\; j\neq i}^{N} \tilde{A}_{ij}x_j\,, \quad x_i(0) = x_{i0}\,, \quad i = \overline{1,N}, \tag{3}$$

где $x_i \in \mathrm{R}^{n_i}$ – вектор фазовых координат, а $u_i \in \mathrm{R}^{m_i}$ – вектор управляющих воздействий i-й подсистемы; $\tilde{A}_{ii}$, $\tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_{ii}$ – интервальные матрицы, определяющие параметрические возмущения в подсистемах и функциях взаимного влияния.

Цель управления состоит в обеспечении степени устойчивости каждой изолированной подсистемы $\tilde{\alpha}_i = [\underline{\alpha_i}\,;\, \overline{\alpha_i}]$ и степени устойчивости взаимосвязанной системы $\tilde{\alpha}=[\underline{\alpha};\overline{\alpha}]$ при вариациях параметров, удовлетворяющих условиям

$$\forall A_{ii} \in \tilde{A}_{ii} = \left[\underline{A_{ii}}, \overline{A_{ii}}\right], \quad \forall A_{ij} \in \tilde{A}_{ij} = \left[\underline{A_{ij}}, \overline{A_{ij}}\right], \quad \forall B_{ii} \in \tilde{B}_{ii} = \left[\underline{B_{ii}}, \overline{B_{ii}}\right]$$

Управляющее воздействие будем формировать в классе двухуровневых структур

$$u_i(x_i) = u_i^{\,l}(x_i) + u_i^{\,g}(x_i), \quad i = \overline{1,N} \tag{4}$$

Робастное двухуровневое управление осуществляется локальными регуляторами, которые стабилизируют изолированные подсистемы, и координатором, обеспечивающим устойчивость всей взаимосвязанной системы.

3. Синтез локального управления

Управление, вырабатываемое локальным регулятором, определим соотношением

$$u_i^l(x_i) = -B_{ii}^{0T}\tilde{P}_{ii}x_i\,, \quad i=\overline{1,N} \tag{5}$$

где матрица $\tilde{P}_{ii} = P_{ii}^0 + \delta\tilde{P}_{ii}$ находится на основе решения P_{ii}^0 уравнения

$$\left(A_{ii}^0 + 0{,}5\alpha_{i0}I_{n_i}\right)^T P_{ii}^0 + P_{ii}^0\left(A_{ii}^0 + 0{,}5\alpha_{i0}I_{n_i}\right) - \\ - P_{ii}^0\left(14B_{ii}^0 B_{ii}^{0^T} - 8I_{n_i}\right)P_{ii}^0 + A_{ii}^{0^T}A_{ii}^0 = 0, \quad i=\overline{1,N}\,. \tag{6}$$

Уравнение (6) отвечает подсистеме с номинальными параметрами. Обобщенное решение $\delta\tilde{P}_{ii}$ является решением интервального матричного уравнения

$$\left(\delta A_{ii} + 0{,}5\tilde{\alpha}_i I_{n_i}\right)^T \delta\tilde{P}_{ii} + \delta\tilde{P}_{ii}\left(\delta A_{ii} + 0{,}5\tilde{\alpha}_i I_{n_i}\right) - 14P_{ii}^0\delta\tilde{B}_{ii}\delta\tilde{B}_{ii}^T P_{ii}^0 + \\ +2\delta\tilde{A}_{ii}^T\delta\tilde{A}_{ii} - \delta\tilde{P}_{ii}\left(14B_{ii}^0B_{ii}^{0T} + 14\delta\tilde{B}_{ii}\delta\tilde{B}_{ii}^T - 8I_{n_i}\right)\delta\tilde{P}_{ii} = 0,\ i=\overline{1,N}\,, \tag{7}$$

соответствующего вариациям параметров подсистем. Методика синтеза уравнений Риккати данного класса приведена в работах [4 – 6].

У каждой изолированной подсистемы существует интервальная функция Ляпунова:

$$\tilde{v}_i(x_i) = x_i^T\tilde{P}_{ii}x_i\,, \quad i=\overline{1,N}\,, \tag{8}$$

для которой справедливы оценки, характерные для квадратичных форм. Изолированные подсистемы удовлетворяют экспоненциальным оценкам с интервальным показателем $\tilde{\alpha}_i = [\underline{\alpha}_i; \overline{\alpha}_i]$.

4. Построение системы сравнения

Для определения вида координирующего управления построим интервальную систему сравнения, соответствующую исходной системе. С этой целью, используя правила дифференцирования интервальных функций, вычислим полную производную функции (8) в силу взаимодействующих подсистем (3), замкнутых локальным регулятором (5).

$$\dot{\tilde{v}}_i(x_i) = 2x_i^T\tilde{P}_{ii}\left[(\tilde{A}_{ii} - \tilde{B}_{ii}B_{ii}^{0T}\tilde{P}_{ii})x_{ii} + \sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}\tilde{A}_{ij}x_j + \tilde{B}_{ii}u_i^g(x_i)\right].$$

Для полной производной функции (8), с учетом неравенства

$$x^T D^T Cx \le x^T D^T Dx + x^T C^T Cx$$

справедлива следующая оценка

$$\dot{\tilde{v}}_i(x_i) \le 2x_i^T[\tilde{P}_{ii}\tilde{A}_{ii} + \tilde{A}_{ii}^T\tilde{P}_{ii} - 2\tilde{P}_{ii}(\tilde{B}_{ii}B_{ii}^{0T} - I_{n_i})\tilde{P}_{ii}]x_{ii} +$$

$$+\sum_{j=1,\ j\ne i}^{N}(\tilde{A}_{ij}x_j)^T(\tilde{A}_{ij}x_j) + 2x_i^T\tilde{P}_{ii}\tilde{B}_{ii}u_i^g(x_i), \quad i=\overline{1,N}\ . \tag{9}$$

Так как матрица $\tilde{P}_{ii}$ удовлетворяет уравнениям (6) и (7), то неравенство (9) принимает вид

$$\dot{\tilde{v}}_i(x_i) \le -\tilde{\alpha}_i\tilde{v}_i(x_i) + \sum_{j=1,\ j\ne i}^{N}(\tilde{A}_{ij}x_j)^T(\tilde{A}_{ij}x_j) + 2x_i^T\tilde{P}_{ii}\tilde{B}_{ii}u_i^g(x_i)\,.$$

Переходя к евклидовой норме вектора x_i и u_i^g, имеем

$$\dot{\tilde{v}}_i(x_i) \le -\tilde{\alpha}_i\tilde{v}_i(x_i) + \sum_{j=1,\ j\ne i}^{N}\tilde{\lambda}_M^{1/2}(\tilde{A}_{ij}^T\tilde{A}_{ij})^T\,\tilde{\lambda}_m^{-1}(\tilde{P}_{jj})\tilde{v}_j(x_j) +$$

$$+2\tilde{\lambda}_M(\tilde{P}_{ii})\tilde{\lambda}_M^{1/2}(\tilde{B}_{ii}^T\tilde{B}_{ii})\|x_i\|\left\|u_i^g(x)\right\|, \quad i=\overline{1,N}\,. \tag{10а}$$

Для получения линейной относительно глобального управления системы сравнения используем интервальную функцию Шильяка

$$\tilde{\upsilon}_i(x_i) = (x_i^T\tilde{P}_{ii}x_i)^{1/2}, \quad i=\overline{1,N}\,, \tag{10б}$$

которая является интервальным расширением степенной функции и определена выражением

$$\tilde{\upsilon}_i(x_i) = [\underline{\upsilon_i}(x_i)\ ;\ \overline{\upsilon_i}(x_i)] = [(x_i^T\underline{P_{ii}}x_i)^{1/2}\ ;\ (x_i^T\overline{P_{ii}}x_i)^{1/2}]\,.$$

Функция (10б) связана с функцией Ляпунова (8) соотношениями

$$\tilde{\upsilon}_i(x_i) = (\tilde{v}_i(x_i))^{1/2},\ \dot{\tilde{\upsilon}}_i(x_i) = 0{,}5\,\tilde{\upsilon}_i(x_i)\dot{\tilde{v}}_i(x_i) \tag{11}$$

и удовлетворяет линейным оценкам

$$\tilde{\lambda}_m^{1/2}(\tilde{P}_{ii})\|x_i\| \le \tilde{\upsilon}_i(x_i) \le \tilde{\lambda}_M^{1/2}(\tilde{P}_{ii})\|x_i\|$$

Из соотношения (10а) с учетом соотношений (11), связывающих функции $\tilde{\upsilon}_i$ и $\tilde{v}_i$, следует, что полная производная функции Ляпунова (10б) в силу подсистемы (3), замкнутой локальным регулятором (5), удовлетворяет неравенству

$$\dot{\tilde{\upsilon}}_i(x_i) \le -0.5\tilde{\alpha}_i\tilde{\upsilon}_i(x_i) +$$

$$+0{,}5\sum_{j=1,\ j\ne i}^{N}\lambda_M^{1/2}(\tilde{A}_{ij}^T\tilde{A}_{ij})\tilde{\lambda}_m^{-1}(\tilde{P}_{jj})\tilde{\upsilon}_i^{-1}(x_i)\tilde{\upsilon}_j(x_j) +$$

$$+\tilde{\lambda}_M(\tilde{P}_{ii})\tilde{\lambda}_M^{1/2}(\tilde{B}_{ii}^T\tilde{B}_{ii})\tilde{\upsilon}_i^{-1}(x_i)\|x_i\|\left\|u_i^g\right\|, \quad i=\overline{1,N}\,. \tag{12}$$

Так как исследование свойств подсистем проводиться в области $\Phi = \{(t,x) \mid t \geq 0,\ \|x_i\| \leq \eta_i\}$, то для производной функции $\tilde{\upsilon}_i(x_i)$ из неравенства (12) следует оценка

$$\dot{\tilde{\upsilon}}_i(x_i) \leq -0{,}5\tilde{\alpha}_i \tilde{\upsilon}_i(x_i) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} \lambda_M^{1/2}(\tilde{A}_{ij}^T \tilde{A}_{ij}) \tilde{\lambda}_M^{1/2}(\tilde{P}_{jj}) \eta_j \tilde{\lambda}_m^{-1/2}(\tilde{P}_{ii}) \tilde{\lambda}_m^{-1}(\tilde{P}_{jj}) \eta_i^{-1} \tilde{\upsilon}_j(x_j) +$$
$$+\lambda_M(\tilde{P}_{ii}) \tilde{\lambda}_M^{1/2}(\tilde{B}_{ii}^T \tilde{B}_{ii}) \tilde{\lambda}_m^{-1/2}(\tilde{P}_{ii}) u_i^g(x), \quad i = \overline{1,N}. \tag{13}$$

Введя векторную интервальную функцию $\tilde{V}(x) : \mathrm{IR}^n \to \mathrm{IR}^N$ с компонентами $\tilde{\upsilon}_i(x_i)$

$$\tilde{V}(x) = (\tilde{\upsilon}_1(x_1), \ldots, \tilde{\upsilon}_N(x_N))^T, \tag{14}$$

преобразуем систему скалярных дифференциальных неравенств (13) в векторное дифференциальное неравенство

$$\dot{\tilde{V}}(x) \leq \tilde{W}\tilde{V}(x) + \tilde{\Gamma}u^g. \tag{15}$$

Дифференциальному неравенству (15) с векторной функцией Ляпунова (14) отвечает система сравнения с интервальными коэффициентами

$$\dot{z} = \tilde{W}z + \tilde{\Gamma}u^g. \tag{16}$$

Здесь $\tilde{W},\ \tilde{\Gamma} \in \mathrm{IR}^{N\times N}$ – интервальные матрицы, элементы которых определены следующими соотношениями

$$\tilde{W} = (w_{ij})_1^N = \begin{cases} \tilde{w}_{ii} = -0{,}5\,\tilde{\alpha}_i, & i = j \\ \tilde{w}_{ij} = 0{,}5\dfrac{\lambda_M^{1/2}(\tilde{A}_{ij}^T \tilde{A}_{ij}) \tilde{\lambda}_M^{1/2}(\tilde{P}_{jj})\eta_j}{\tilde{\lambda}_m^{1/2}(\tilde{P}_{ii}) \tilde{\lambda}_m(\tilde{P}_{jj})\eta_i}, & i = j \end{cases} \tag{17}$$

$$\tilde{\Gamma} = \mathrm{diag}\{\tilde{\gamma}_i\}_1^N, \qquad \tilde{\gamma}_i = \frac{\tilde{\lambda}_M(\tilde{P}_{ii}) \tilde{\lambda}_M^{1/2}(\tilde{B}_{ii}^T \tilde{B}_{ii})}{\tilde{\lambda}_m^{1/2}(\tilde{P}_{ii})} \tag{18}$$

где $u_i^g \in \mathrm{R}^N$ – вектор координирующего управления; $z \in \mathrm{R}^N$ – вектор состояния системы сравнения.

В выражениях (17) и (18) оценки для минимальных и максимальных собственных значений $\tilde{\lambda}(\tilde{\Delta})$ интервальных матриц $\tilde{\Delta}$ могут быть получены на основе решения проблемы собственных значений симметричных матриц

$$\tilde{\lambda}_m(\tilde{\Delta}) = [\underline{\lambda_m}(\tilde{\Delta}), \overline{\lambda_m}(\tilde{\Delta})],\ \underline{\lambda_m}(\tilde{\Delta}) = \lambda_m(\mathrm{m}(\tilde{\Delta})) - \varepsilon_m,$$
$$\overline{\lambda_m}(\tilde{\Delta}) = \lambda_m(\mathrm{m}(\tilde{\Delta})) + \varepsilon_m,\ \varepsilon_m = \left\| \, | \tilde{\Delta} v_m - \lambda_m(\mathrm{m}(\tilde{\Delta})) v_m | \, \right\|_2 \tag{19}$$
$$\tilde{\lambda}_M(\tilde{\Delta}) = [\underline{\lambda_M}(\tilde{\Delta}), \overline{\lambda_M}(\tilde{\Delta})],\ \underline{\lambda_M}(\tilde{\Delta}) = \lambda_M(\mathrm{m}(\tilde{\Delta})) - \varepsilon_M,$$
$$\overline{\lambda_M}(\tilde{\Delta}) = \lambda_M(\mathrm{m}(\tilde{\Delta})) + \varepsilon_M,\ \ \varepsilon_M = \left\| \, | \tilde{\Delta} v_M - \lambda_M(\mathrm{m}(\tilde{\Delta})) v_M | \, \right\|_2, \tag{20}$$

где v_m, v_M – собственные векторы интервальной матрицы $\tilde{\Delta}$, отвечающие собственным числам $\tilde{\lambda}_m(\tilde{\Delta})$, $\tilde{\lambda}_M(\tilde{\Delta})$.

С учетом выражений (19) и (20) элементы матриц $\tilde{W}$ и $\tilde{\Gamma}$, принимают значения

$$\tilde{w}_{ii} = [\underline{w_{ii}}, \overline{w_{ii}}], \qquad \underline{w_{ii}} = -0{,}5\underline{\alpha_i}, \quad \overline{w_{ii}} = -0{,}5\overline{\alpha_i},$$

$$\tilde{w}_{ij} = [\underline{w_{ij}}, \overline{w_{ij}}], \quad \begin{aligned} \underline{w_{ij}} &= -0{,}5\frac{\underline{\lambda}_M^{1/2}(\tilde{A}_{ij}^T \tilde{A}_{ij})\underline{\lambda}_M^{1/2}(\tilde{P}_{jj})\eta_j}{\overline{\lambda}_m^{1/2}(\tilde{P}_{ii})\overline{\lambda}_m(\tilde{P}_{jj})\eta_i}, \\ \overline{w_{ij}} &= -0{,}5\frac{\overline{\lambda}_M^{1/2}(\tilde{A}_{ij}^T \tilde{A}_{ij})\overline{\lambda}_M^{1/2}(\tilde{P}_{jj})\eta_j}{\underline{\lambda}_m^{1/2}(\tilde{P}_{ii})\underline{\lambda}_m(\tilde{P}_{jj})\eta_i}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\tilde{\gamma}_i = [\underline{\gamma_i}, \overline{\gamma_i}], \quad \begin{aligned} \underline{\gamma_i} &= \underline{\lambda}_M(\tilde{P}_{ii})\underline{\lambda}_M^{1/2}(\tilde{B}_{ii}^T \tilde{B}_{ii})\overline{\lambda}_m^{-1/2}(\tilde{P}_{ii}), \\ \overline{\gamma_i} &= \overline{\lambda}_M(\tilde{P}_{ii})\overline{\lambda}_M^{1/2}(\tilde{B}_{ii}^T \tilde{B}_{ii})\underline{\lambda}_m^{-1/2}(\tilde{P}_{ii}). \end{aligned} \tag{22}$$

5. Синтез координирующего управления

Вектор координирующего управления определяется так, чтобы решения системы сравнения удовлетворяли соотношениям

$$\| z(t, t_0, z_0) \| = \tilde{M}_z \| z_0 \| \exp[-0{,}5\tilde{\alpha}(t - t_0)]. \tag{23}$$

Для выполнения этого требования координирующее управление должно иметь вид

$$u^g = -\tilde{\Gamma}^T \tilde{H} z, \tag{24}$$

где матрица $\tilde{H} = H^0 + \delta\tilde{H}$ является суммой матрицы H^0 – решения уравнения Риккати «второго уровня»

$$
\begin{aligned}
&(W^0+0{,}5\alpha^0 I_N)^T H_0 + H_0(W^0+0{,}5\alpha^0 I_N)^T - \\
&-H^0(10\Gamma^{0T}\Gamma^{0T}-2I_N)+2W^{0T}W^0=0,
\end{aligned} \tag{25}
$$

соответствующего номинальной системы сравнения, и матрицы $\delta\tilde{H}$ – обобщенного решения интервального матричного уравнения

$$
\delta\tilde{W}_\alpha{}^T\delta\tilde{H}+\delta\tilde{H}\delta\tilde{W}_\alpha-\delta\tilde{H}\,\tilde{D}\delta\tilde{H}+\tilde{G}=0\,, \tag{26}
$$

составленного для вариаций параметров системы сравнения.

Здесь $\tilde{D}=10\Gamma^0\Gamma^{0T}+4\delta\tilde{\Gamma}\delta\tilde{\Gamma}^T-2I_N$, $\tilde{G}=2\delta\tilde{W}\delta\tilde{W}^T+4H^0\delta\tilde{\Gamma}\delta\tilde{\Gamma}^T H^0$, $W^0=\mathrm{m}(\tilde{W})=0{,}5(\underline{W}+\overline{W})$, $\Gamma^0=\mathrm{m}(\tilde{\Gamma})=0{,}5\left(\underline{\Gamma}+\overline{\Gamma}\right)$, $\mathrm{w}(\tilde{W})=\overline{W}-\underline{W}$, $\delta\tilde{W}=[-0{,}5\,;0{,}5]\,\mathrm{w}(\tilde{W})$, $\delta\tilde{\Gamma}=[-0{,}5\,;0{,}5]\,w(\tilde{\Gamma})$, $w(\tilde{\Gamma})=\overline{\Gamma}-\underline{\Gamma}$.

Уравнение динамики системы с параметрическими возмущениями с двухуровневым стабилизирующим регулятором (4), параметры которого определяются решениями уравнений (25), (26) имеет вид

$$
\dot{x}=(\tilde{A}-\tilde{B}B^{0T}\tilde{P})x-\tilde{B}\,\tilde{\Gamma}^T\tilde{H}\,z \tag{27}
$$

или в форме взаимодействующих подсистем

$$
\dot{x}_i=(\tilde{A}_{ii}-\tilde{B}_{ii}B_{ii}^{0T}\tilde{P}_{ii})x_i+\sum_{j=1,\;j\neq i}^{N}\tilde{A}_{ij}\,x_j-\tilde{B}_{ii}\,\tilde{\gamma}_{ii}\sum_{j=1}^{N}\tilde{h}_{ij}\,z_j \tag{28}
$$

6. Свойства замкнутой системы

Свойства системы, замкнутой двухуровневым робастным регулятором, определяются следующей теоремой.

Теорема. Пусть в системе вариации параметров таковы, что:

1) выполнены соотношения

$$
0\le\underline{\Delta A_{ii}^T}\,\underline{\delta P_{ii}}+\underline{\delta P_{ii}}\,\underline{\Delta A_{ii}}\le\underline{\Omega_i}(\underline{\delta P_{ii}})=\underline{\delta P_{ii}}\,\overline{D_{ii}}\,\underline{\delta P_{ii}}+\underline{G_{ii}}
$$

$$
0\le\overline{\Delta A_{ii}^T}\,\overline{\delta P_{ii}}+\overline{\delta P_{ii}}\,\overline{\Delta A_{ii}}\le\overline{\Omega_i}(\overline{\delta P_{ii}})=\overline{\delta P_{ii}}\,\underline{D_{ii}}\,\overline{\delta P_{ii}}+\overline{G_{ii}}
$$

$$
0\le\overline{\Delta A_{ii}^T}\,\overline{\delta P_{ii}}+\overline{\delta P_{ii}}\,\overline{\Delta A_{ii}}\le\overline{\Omega_i}(\overline{\delta P_{ii}})=\overline{\delta P_{ii}}\,\underline{D_{ii}}\,\overline{\delta P_{ii}}+\overline{G_{ii}}\,;
$$

2) для матриц системы сравнения, определенных формулами (21) (22), справедливы следующие неравенства

$$
0\le\underline{\Delta W_\alpha}^T\,\underline{\delta H}+\underline{\delta H}\,\underline{\Delta W_\alpha}\le\underline{\Omega}(\underline{\delta H})=\underline{\delta H}\,\overline{D}\,\underline{\delta H}+\underline{G}\,,
$$

$$
0\le\overline{\Delta W_\alpha}^T\,\overline{\delta H}+\overline{\delta H}\,\overline{\Delta W_\alpha}\le\overline{\Omega}(\overline{\delta H})=\overline{\delta H}\,\underline{D}\,\overline{\delta H}+\overline{G}\,,
$$

где матрица $\underline{\delta H}$ – решение уравнения

$$
\underline{\delta W_\alpha}^T\,\underline{\delta H}+\underline{\delta H}\,\underline{\delta W_\alpha}-\underline{\delta H}\,\overline{D}\,\underline{\delta H}+\underline{G}=0\,,
$$

а матрица $\overline{\delta H}$ – решение уравнения

$$\overline{\delta W_\alpha}^T \overline{\delta H} + \overline{\delta H}\,\overline{\delta W_\alpha} - \overline{\delta H}\,\underline{D}\overline{\delta H} + \overline{G} = 0 .$$

Тогда система (27) или (28) с локальными регуляторами (5) и координатором (24) робастно устойчива с интервальным показателем $\tilde{\alpha} = [\underline{\alpha}\ ;\ \overline{\alpha}]$, то есть для решений замкнутой системы выполняются неравенства (23).

Доказательство утверждения теоремы основывается на использовании интервальной векторной функции Ляпунова (14) и системы сравнения (16).

Заключение

Рассмотренная процедура синтеза глобального (координирующего) управления основана на обращении задачи Ляпунова. При заданной структуре интервальной функции Ляпунова, отвечающей системе сравнения, ее параметры определяются из матричного уравнения Риккати, объединенное множество решений которого находится с помощью внешних оценок. Синтезированное двухуровневое управление позволяет придать проектируемой системе свойство робастной устойчивости с заданным показателем при всех параметрических возмущениях, удовлетворяющих условиям существования решения матричного уравнения типа Риккати (условия 1 и 2 теоремы).

Список литературы

1. Козлов В.Н., Шашихин В.Н. Синтез координирующего робастного управления взаимосвязанными синхронными генераторами // Электричество. 2009№ 9. С. 20–26.

2. Филиппова В.О. Задача оптимального управления с интервальным параметром // Дальневосточный математический журнал. 2017. Т. 17. № 1. С. 110–123.

3. Фрадков В.Л., Фуртат И.Б. Робастное управление сетью электрических генераторов // Автоматика и телемеханика. 2013. № 11. С. 100–113.

4. Dehghani-Madisen M. On the interval generalized coupled matrix equation, Electronic Journal of Linear Algebra. 2018. Vol. 34. No. 1. Pp. 695–717.

5. Dehghani-Madisen M., Dehghan M. Parametric AE-solutions set parametric matrix equation, Numerical Algorithms. 2016. Vol. 73. No. 1. Pp. 245–279.

6. Haqiri T., Morseni Moghadam M., Rivaz A. The united stable set of interval continuous-time algebraic Riccati equation and verified numerical computation of its outer estimation. Turkish Journal of Mathematics. 2018. Vol. 42. No. 3. Pp. 1130–1155.

7. Shashihin V.N. Guaranteed-result strategy to synthesize a decentralized control for system under parametric perturbations. Automatic Control and Computer Sciences. 2017. Vol. 51. No. 2. Pp. 75–84.

8. Shashihin V.N. Synthesis of control for nonlinear systems. Automatic Control and Computer Sciences. 2019. Vol. 53. No. 2. Pp. 97–106.