

4. Козлов В.Н. Управление энергетическими системами и объединениями. СПб.: Изд-во СПб. политехн. ун-та, 2008. 350 с.

5. Козлов В.Н., Куприянов В.Е. Вычислительные методы синтеза систем автоматического управления. Л.: Изд-во ЛГУ им. А.А. Жданова, 1989. 220 с.

6. Козлов В.Н., Ефремов А.А. Введение в функциональный анализ. СПб.: Изд-во СПб. политехн. ун-та, 2019. 90 с.

УДК 618.2

doi:10.18720/SPBPU/2/id20-152

*Долятовский Валерий Анастасиевич*<sup>1</sup>,  
Заслуженный деятель науки РФ,  
д-р экон. наук, профессор, член МАН ВШ;  
*Биломбо Рауль*<sup>2</sup>,  
доктор математики, профессор

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

<sup>1</sup> Ростовский государственный экономический университет,  
Ростов-на-Дону, Россия, <sup>1</sup> dvaleri@inbox.ru

<sup>2</sup> Университет М. Нгуаби, Браззавиль, ДРК

*Аннотация.* Рассмотрена задача оптимального управления по возмущениям динамическим объектом с переменной массой, движущимся по пути с изменяющимся профилем. Задача формализована на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина, выведены условия переключения управлений, разработан алгоритм численного решения задачи. Приведены результаты программных расчетов, показавшие значительную экономию энергии при оптимальном управлении.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, динамический объект, принцип максимума, эффективность.

*Valery A. Dolyatovsky*<sup>1</sup>,  
Honour. Scientist of the Russian Federation,  
Dr. Math. Econ. Sci., Professor, IHANS member;  
*Raul Bilombo*<sup>2</sup>,  
Doctor of Mathematics, Professor

## OPTIMUM CONTROL OF THE DYNAMIC OBJECT ON THE BASIS OF THE MAXIMUM PRINCIPLE

<sup>1</sup> Rostov State Economic University, Rostov-on-Don, Russia,  
<sup>1</sup> dvaleri@inbox.ru,

<sup>2</sup> Marien Ngouabi University, Brazzaville, Republic of Congo

**Abstract.** The problem of optimum control of indignations of the dynamic object with a variable weight moving on the way with the changing profile is considered. The task is formalized on the basis of the maximum principle of L.S. Pontryagin, conditions of switching of managements are removed, the algorithm of the numerical solution of a task is developed. The results of program calculations which showed considerable economy of energy at optimum control are given.

**Keywords:** optimum control, dynamic object, maximum principle, efficiency.

В практике управления динамическим объектом необходимо учитывать внешние возмущения и экономические показатели управления. Существуют два основных вида управления системами: по отклонениям от заданной траектории и по возмущениям. Во втором случае имеет место адаптация динамического объекта к изменяющейся среде на основе учета воздействия возмущений. Возмущения могут носить регулярный характер (когда они изменяются в ограниченном диапазоне значений) или сингулярный. Основы теории оптимального управления динамическими объектами заложены Л.С. Понтрягиным и его школой [1 – 3], оптимизация экономических решений рассматривалась Ч. Карром [4], А.В. Соколовым [5], Н.Н. Красовским [6], Флемингом и Рашелом [8]. Практические методы расчета оптимальных управлений разработаны М. Хистенсом [9]. Практическое применение оптимального управления ультразвуковым вибратором в процессах мехобработки рассмотрено в работе [10]. В статье рассмотрена постановка и практическое решение задачи оптимизации управления поездом по возмущениям.

### 1. Постановка задачи

Динамический объект с переменной массой, которым является поезд, имеет определенную мощность двигателя и движется по траектории, характеризующейся спусками, подъемами и ровными участками. В зависимости от профиля движения (изменения профиля являются возмущениями) и массы потребление энергии из сети будет разным, при спусках будет режим рекуперации энергии. Если использовать управление по возмущениям, то возможно экономить энергию и получить существенный экономический эффект. Тем более можно на основе решения задачи оптимизации можно минимизировать потребление энергии. Задачу оптимизации потребления энергии поездом при управлении по возмущениям можно представить следующим образом. Пусть объект управления описывается дифференциальным уравнением:

$$x''(t) + g(x'(t)) + f(x(t)) = u(t), \quad (1)$$

где вектор  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  – вектор управляющих переменных;  $u \in C1$  (класс допустимых управлений);  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  – переменные состояния объекта,  $x_i(0) = x_i^0$ ;  $x_i(T) = x_i^f$ ;  $i = 1, \dots, m$ .

Приведенные соотношения характеризуют условия управляемости динамического объекта  $x^o$  по отношению к конечной цели  $x^f$ . Обозначим  $\Gamma$  множество состояний управляемости:  $U(x_0, x^f) : \Gamma$ . На управления накладывается ограничение  $u \in V_{\text{доп}}$ . Требуется определить оптимальное управление  $u^*(t)$  и оптимальную траекторию движения  $x^*(t)$  из условия обеспечения минимизации функционала качества:

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_x} f_0(x, u) dt = \min. \quad (2)$$

Функционал качества (2) в процессе решения должен принимать минимальное значение. Далее составляется функция Гамильтона (гамильтониан):

$$H(\psi, x, u) = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) f_i(x, u, t), \quad (3)$$

где  $\psi_i(t)$  – некоторые вспомогательные функции, которые должны удовлетворять сопряженным уравнениям:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = - \frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial x_i} = - \sum_{k=0}^n \psi_k(t) \frac{\partial f_k(x, u, t)}{\partial x_i} \quad (4)$$

$$H(\psi^*, x^*, u^*) = \max_{u \in y} (\psi^*, x^*, u^*), \quad (5)$$

при условии  $y > 0$ .

Применение принципа максимума заменяет вариационную задачу отыскания экстремума функционала качества  $J(x, u)$  по управлению  $u$  более простой задачей определения параметра  $u$ , обеспечивающего максимум функции  $H(\psi_i, x, u)$ . Задача решается в несколько этапов:

- вначале определяется максимум функции Гамильтона  $H(\psi_i, x, u)$  относительно управления  $u(t)$ ;
- затем отыскивается оптимальное управление как функция от вспомогательной функции  $y$ :  $u = j(y)$ ;
- после этого выражение для управления  $u = j(y)$  подставляется в исходную и сопряженную системы дифференциальных уравнений для вычисления  $x(t)$ ,  $y(t)$ ;
- находят  $u(t)$  как функцию времени.

Если обозначить  $E_c$ : кинетическая энергия и  $E_p$ : энергия потенциальная; то целевая функция потребления энергии поездом будет иметь вид:

$$J(u^*) = \min J[u] = E_c + E_p + \min \int_{x_0}^{x^f} (g(x)) dx. \quad (6)$$

Фактически нужно с помощью управлений  $u^*(t)$  минимизировать выражение:

$$Eg = \int_{x_0}^{x_f} g(y(x))dx. \quad (7)$$

В окрестности точки  $y_0$  получим:

$$g(y) = g(y_0) + (y - y_0)g'(y_0) + 0,5(y - y_0)^2g''(C), \quad (8)$$

$C$  – фиксированная величина.

Интегрируя выражение (8), получим:

$$\int_{x_0}^{x_f} g(y(x))dx > \int_{x_0}^{x_f} g(y_0(x))dx + \int_{x_0}^{x_f} (y(x) - y_0(x))g'(y_0)dx \quad (9)$$

необходимые и достаточные условия оптимальности движения. Если  $u^*(t)$  – оптимальное управление для всех  $u \in C_i$  (подмножество допустимых управлений), получаем:

$$J[u^*] < J[u]. \quad (10)$$

Поведение этого динамического объекта с переменными параметрами будет следствием изменений потребления энергии под влиянием оптимального управления  $u^*(t)$ .

Условие оптимальности соответствует условию:

$$\int_{x_0}^{x_f} (g(y(x)) - g(y_0(x)))dx > 0.$$

Из соотношения (9) имеем

$$g(y(x)).g'(y(x)) > 0.$$

Есть две возможности получения значений этой функции в зависимости от расстояния  $x$  и условий движения, формализация которых определяет моменты переключения управляющих воздействий. Получив формальные выражения, управление поездом будет определяться допустимыми управлениями, определенными во времени:

$$U_i(t) = u^*(t) + du \quad \text{для } 0 < t < T.$$

В соответствии с принципом максимума, существуют  $x_{ij}$ , соответствующие  $u_i$ , такие, что:

$$x'(t) = x^*(t) + dx.$$

Построенная модель позволяет рассчитать оптимальные значения управлений для разных режимов движения поезда в определенные моменты времени на основе алгоритма выбора переключений. В зависимости от условий движения алгоритм выбирает моменты переключений  $t_i, t_2, \dots$ , мощности двигателя в зависимости от угла наклона пути  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ ,

что позволит минимизировать затраты энергии (9). При этом потребляемая энергия пропорциональна массе поезда (рис. 1) и нелинейно зависит от угла направления движения (рис. 2).

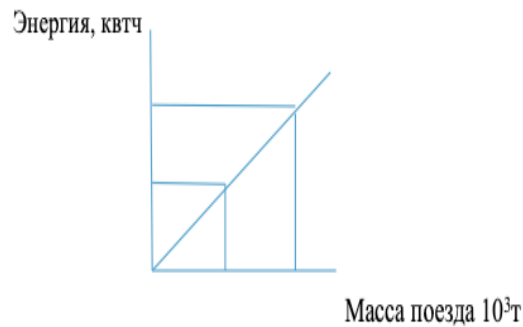


Рис. 1. Зависимость потребления энергии от массы поезда

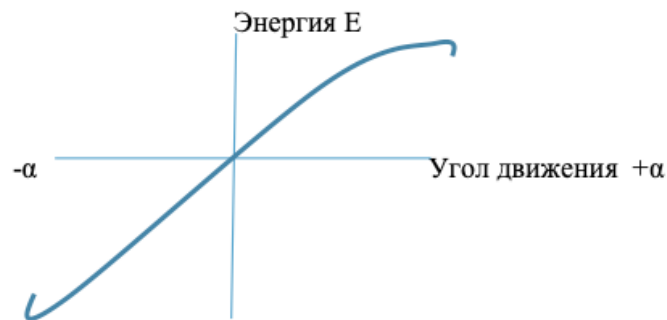


Рис. 2. Зависимость потребления энергии от угла движения

## 2. Формализация задачи оптимального управления

В процессе управления необходимо выбрать моменты переключения двигателя, чтобы минимизировать функционал  $J[u]$  при условии:

$$J[u^*] = \min J[u] = \min \int g(y(x)) dx. \quad (11)$$

Легко показать, что если  $u^*$  оптимальное управление, то

$$J[u^*] < J[u], \quad (12)$$

где  $u \in C$ ;  $C$  – подмножество допустимых управлений.

Пусть  $g(y)$  является целевой функцией, удовлетворяющей следующим условиям:

$$g(y(x)) > 0; g'(y(x)) > 0; g''(y(x)) > 0. \quad (13)$$

Пусть  $+1$  или  $-1$  – переключения, позволяющие увеличить или уменьшить потребление энергии поездом (которая является интегралом потребляемой мощности двигателя) в зависимости от профиля пути. По-

ложим, что в области допустимых траекторий движения имеем значения переключающей функции:

$$\begin{cases} +1, \text{ если } f(x) - g(y) > 0 \\ -1, \text{ если } f(x) - g(y) < 0. \end{cases} \quad (14)$$

Основное уравнение  $z = u$  у движения можно преобразовать:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = u(t) - f(x, y). \end{cases}$$

Для простого случая:  $|u| < 1$ ;  $f(0,0) = 0$ ;  $x(0) = x^*$ ;  $y(0) = y^*$ .

Построим вспомогательную функцию Гамильтона:

$$H = w_1(x' - y)(t) + w_2(y' - u + f(x, y))(t) + w_3(z' - u.y)(t). \quad (15)$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} w_2 \cdot f'_x(x, y) - dw_1 / dt = 0 \\ -w_1 + w_2 f'_y(x, y) - w_3 u - dw_2 / dt = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Преобразовав систему (15) и считая  $u^*(t)$  оптимальными командами,  $x^*(t)$ ,  $y^*(t)$ ,  $z^*(t)$  – координатами оптимальной траектории, получим набор значений  $(w_1^*(t); w_2^*(t); C_3^*)$  такой, что:

$$\begin{aligned} & w_1^*(x' - y)(t) + w_2^*(y' - u + f(x, y))^*(t) + C_3(z' - uy)^*(t) = \\ & \max [w_1^*(x' - y)(t) + w_2^*(y' - u + f(x, y))^*(t) + C_3(z' - uy)^*(t)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда следуют команды управления:

$$\begin{cases} u^*(t) = +1, \text{ если } w_2^*(t) + C_3^* y^*(t) < 0 \\ u^*(t) = -1, \text{ если } w_2^*(t) + C_3^* y^*(t) > 0. \end{cases}$$

Из условия (17) рассчитаем условия переключения команд:

$$\begin{cases} u^*(t) = +1, \text{ если } w_2^*(t) + C_3^* y^*(t) < 0 \\ u^*(t) = f(x^*(t), y^*(t)), \text{ если } w_2^*(t) + C_3^* y^*(t) = 0 \\ u^*(t) = -1, \text{ если } w_2^*(t) + C_3^* y^*(t) > 0 \end{cases} \quad (18)$$

Изучим взаимосвязи энергии, массы и угла направления движения. Увеличение массы поезда ведет к росту потребляемой энергии, та же зависимость от угла направления движения: больше угол подъема, больше потребление энергии. По-видимому, можно рассматривать отношения замещения этих величин

$$E_{E/M} = \left(\frac{\partial E}{\partial E}\right) / \left(\frac{\partial M}{\partial M}\right), \quad E_{E/Q} = \left(\frac{\partial E}{\partial E}\right) / \left(\frac{\partial Q}{\partial Q}\right) \quad (19)$$

Эти величины эластичностей близки к единице и показывают пропорциональную зависимость энергии от массы и угла. Если ввести показатель относительного изменения массы или угла  $r$ , то в оптимальном режиме движения:

$$\frac{\partial M}{\partial r} = -H'_r / H'_M . \quad (20)$$

Рост массы поезда ведет к росту  $r$ ,  $H'_r(M, r) \rightarrow$  когда  $r \rightarrow r^*$ . При росте массы потребляемая мощность и энергия одновременно растут. Когда  $r$  мало, влияние массы будет небольшим. В равновесии оптимальное потребление энергии позволяет определить параметры движения, соответствующие экономическому оптимуму:

$$\begin{cases} H(M, r) - kU_0 = 0 \\ G(M, r) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Из реальной статистики рассчитаны зависимости прироста энергии от прироста массы поезда:

$$dE = 911,9 + 23,59 dM, \quad R^2 = 0,98. \quad (22)$$

### 3. Результаты моделирования

Расчеты переключений для оптимального управления поездом выполнены программой, логика которой представлена на рисунке 3. Вводятся данные о текущем угле движения и массе, программа рассчитывает значение управляющей переменной и потребляемую мощность. Таким образом, имитируется управление процессом движения.

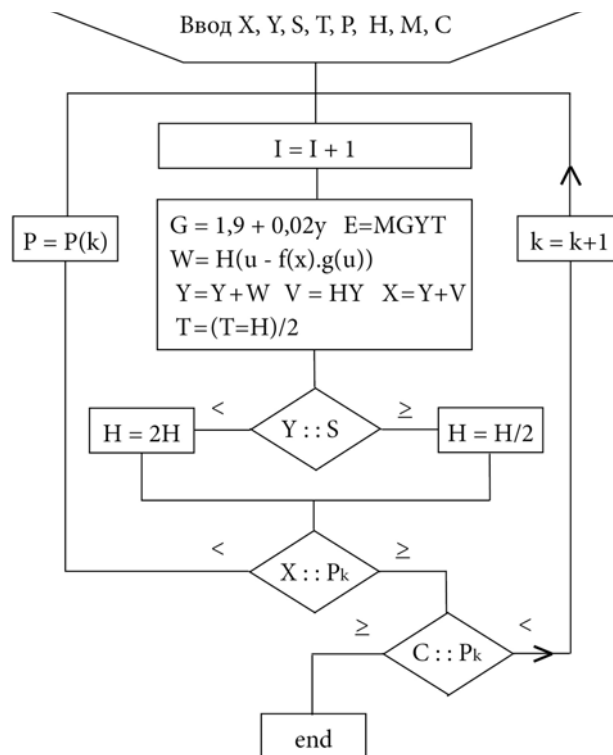


Рис. 3. Логика программы расчетов оптимальных команд

В таблице 1 приведен фрагмент оптимальной траектории движения поезда.

Таблица 1

Расчеты показателей оптимального управления движением

$X(m)$ , км	$u^*(t)$	$\Delta E$ , кВт
74	-0,05	1044
142	+0,07	1884
154	+0,05	1320
348	+0,1	1577
479	-0,05	1653

Фазовые траектории движения приведены на рисунке 4.

Для двигателей поездов разных мощностей были рассчитаны экономические показатели оптимального управления и проведено сравнение с реальными показателями потребления энергии. Экономия энергии на выбранном 500-километровом маршруте составила для двигателей разной мощности от 38 % до 42 %, что показывает высокую эффективность решения задачи оптимизации.

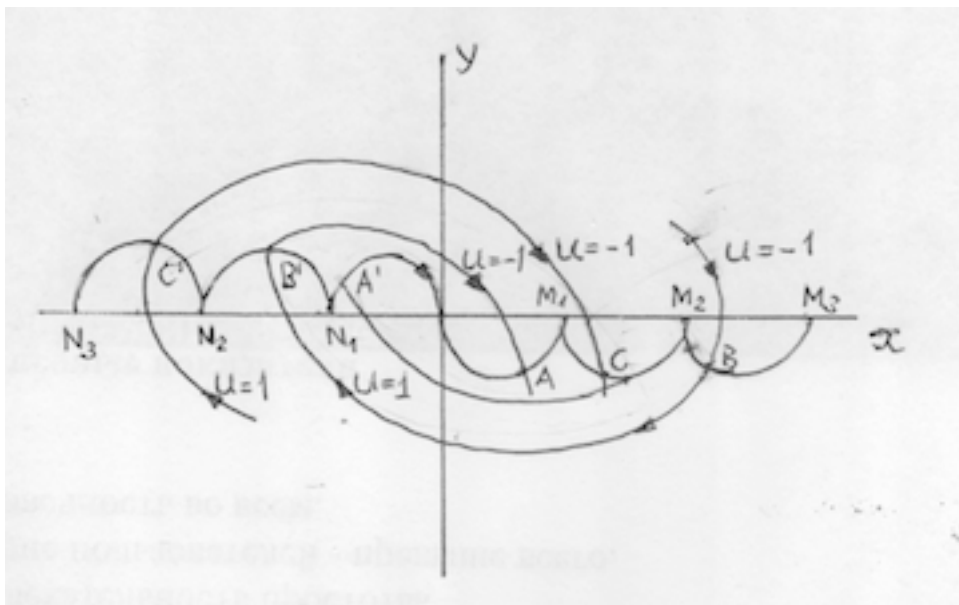


Рис. 4. Фазовые траектории движения

Применение разработанного алгоритма дало возможность имитации оптимального управления поездом при движении на 500 км пути разного профиля. Расчеты показали, что переключения в зависимости от профиля дают возможности экономии энергии при разных мощностях двигателей.

#### Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 4.е изд. М: «Наука», 1983. 392 с.



2. Грешилов А.А. Математические методы принятия решений. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 584 с.
3. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 2016. 308 с.
4. Карр Ч., Хоув Ч. Количественные методы принятия решений в управлении и экономике: моногр. М.: Мир, 2016. 464 с.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968.
6. Соколов А.В., Токарев В.В. Методы оптимальных решений. В 2 томах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 564 с.
7. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / пер. с англ. М., 1978.
8. Hestenes M. Calculus of variations and optimal control theory. N. Y., 1966.
9. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М., 1975.
10. Долятовский В.А. К вопросу создания оптимальной по быстродействию системы для управления процессом механической обработки с наложением ультразвуковых колебаний // Применение ультразвука в сельхозмашиностроении. Ростов-на-Дону: Изд РГУ, 1964. С. 97–101.
11. Bilombo R., Doliatovski V. Choix d'un regime optimal d'un systeme economique par le principe du maximum-Brazzaville: Universite Ngouabi, 1988.

УДК 519.71

doi:10.18720/SPBPU/2/id20-153

*Чернышев Кирилл Романович*,  
канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.

## **СИММЕТРИЧНЫЕ МЕРЫ ДИВЕРГЕНЦИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ**

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
Москва, Россия,  
myau@ipu.ru

**Аннотация.** Предложен метод построения симметричных мер дивергенции вероятностных распределений и соответствующих им симметричных мер зависимости случайных векторов. Такие меры строятся на основе энтропии Цаллиса произвольного порядка. Построенная таким образом мера дивергенции положена в основу подхода к идентификации стохастических систем по теоретико-информационным критериям.

**Ключевые слова:** входо-выходное описание, дивергенция вероятностных распределений, идентификация стохастических систем, меры зависимости случайных векторов, теория информации, энтропия Цаллиса, ядерные оценки плотности.