2. Грешилов А.А. Математические методы принятия решений. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 584 с.

3. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 2016. 308 с.

4. Карр Ч., Хоув Ч. Количественные методы принятия решений в управлении и экономике: моногр. М.: Мир, 2016. 464 с.

5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968.

6. Соколов А.В., Токарев В.В. Методы оптимальных решений. В 2 томах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 564 с.

7. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / пер. с англ. М., 1978.

8. Hestenes M. Calculus of variations and optimal control theory. N. Y., 1966.

9. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М., 1975.

10. Долятовский В.А. К вопросу создания оптимальной по быстродействию системы для управления процессом механической обработки с наложением ультразвуковых колебаний // Применение ультразвука в сельхозмашиностроении. Ростов-на-Дону: Изд РГУ, 1964. С. 97–101.

11. Bilombo R., Doliatovski V.Choix d'un regime optimal d'un systeme economique par le principe du maximum-Brazzaville: Universite Ngouabi, 1988.

УДК 519.71
doi:10.18720/SPBPU/2/id20-153

Чернышев Кирилл Романович,
канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.

СИММЕТРИЧНЫЕ МЕРЫ ДИВЕРГЕНЦИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Москва, Россия,
myau@ipu.ru

Аннотация. Предложен метод построения симметричных мер дивергенции вероятностных распределений и соответствующих им симметричных мер зависимости случайных векторов. Такие меры строятся на основе энтропии Цаллиса произвольного порядка. Построенная таким образом мера дивергенции положена в основу подхода к идентификации стохастических систем по теоретико-информационным критериям.

Ключевые слова: входо-выходное описание, дивергенция вероятностных распределений, идентификация стохастических систем, меры зависимости случайных векторов, теория информации, энтропия Цаллиса, ядерные оценки плотности.

Kirill R. Chernyshov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher

SYMMETRIC DIVERGENCE MEASURES OF PROBABILISTIC DISTRIBUTIONS AND SYSTEM IDENTIFICATION

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the RAS, Moscow, Russia,
myau@ipu.ru

Abstract. A technique to construct symmetric divergence measures of probabilistic distributions and corresponding measures of dependence of random vectors is proposed. Such measures are built on the basis of Tsallis entropy of an arbitrary order. The divergence measure constructed in accordance to the approach is a basis of system identification problems statement by use of information-theoretic criteria.

Keywords: input/output description, divergence of probabilistic distributions, stochastic system dentification, measures of dependence of random vectors, information theory, Tsallis entropy, kernel density estimation.

Введение

Традиционно решение задачи идентификации стохастических систем всегда подразумевает использование меры стохастической зависимости случайных величин как при представлении исследуемой системы на основе входо/выходного отображения, так и в рамках описания в пространстве состояний. Особенность метода, предложенного в работе, заключается в применении *состоятельных* мер зависимости. Следуя терминологии А.Н. Колмогорова, мера стохастической зависимости между двумя случайными величинами называется состоятельной, если она обращается в нуль тогда и только тогда, когда данные случайные величины являются стохастически независимыми [1].

Широкий класс мер зависимости строится с использованием соответствующих мер сравнения непрерывных многомерных вероятностных распределений, например, $g_1(z)$ и $g_2(z)$ k-мерного случайного вектора $\mathbf{Z}$, которые хорошо известны как меры дивергенции, среди которых дивергенция Кульбака-Лайблера является, очевидно, наиболее широко известной и применимой. В свою очередь, меры дивергенции можно рассматривать как критерий качества в рамках различных теоретических и практических задач. В частности, дивергенция Кульбака-Лайблера

$$D_{KL}(g_1 \| g_2) = \int_{R^k} g_1(z) \ln\left(\frac{g_1(z)}{g_2(z)}\right) dz \qquad (1)$$

приводит к соответствующему выражению для взаимной информации Шеннона $I\{Z_1, Z_2\}$ двух случайных векторов Z_1 и Z_2 размерностей k_1 и k_2 соответственно, когда одна плотность распределения вероятностей в (1), а именно $g_1(z) = g_{z_1 z_2}(z_1, z_2)$, является совместной плотностью распределения вероятностей этих случайных векторов, а вторая, $g_2(z) = g_{z_1}(z_1) g_{z_2}(z_2)$, является произведением маргинальных плотностей распределения вероятностей Z_1 и Z_2.

1. Симметричная дивергенция Цаллиса и симметричная взаимная информация Цаллиса

Как известно, взаимная информация Шеннона непосредственно связана с энтропией Шеннона. Между тем, существуют более общие подходы к определению энтропии случайной величины / вектора. Для *k*-мерного случайного вектора **Z**, имеющего плотность распределения вероятностей $f(z)$, энтропия Цаллиса порядка α [2] определяется как

$$T_\alpha(f) = \frac{1}{\alpha - 1}(1 - \int_{R^k} (f(z))^\alpha dz), \alpha > 0, \alpha \neq 1. \quad (2)$$

Между тем, при стремлении α к 1, $T_\alpha(f)$ стремится к выражению, определяющему энтропию Шеннона, которую, таким образом, можно рассматривать как предельный случай энтропии Цаллиса «1-го порядка».

С вычислительной точки зрения, особенно при необходимости оценивания с использованием выборочных данных, энтропия Цаллиса считается более удобной для применения, чем энтропия Шеннона, поскольку последняя включает в себя «интеграл логарифма», обладающий определенной вычислительной сложностью, в то время как энтропия Цаллиса не содержит логарифм вообще. Между тем, выбор конкретной величины порядка α имеет важное значение, поскольку чем больше порядок, тем сложнее становятся вычисления.

Кроме того, энтропия Цаллиса обладает внутренним свойством, связанным с теорией функциональных пространств. Пусть в пространстве интегрируемых со степенью α неотрицательных функций $f(z)$, $z \in R^k$, норма определяется выражением

$$\|f\|_\alpha = (\int_{R^k} (f(z))^\alpha dz)^{\frac{1}{\alpha}},$$

известным как α-норма. Тогда, если $f(z)$ есть плотность распределения вероятностей случайного вектора **Z**, энтропия Цаллиса может быть явно выражена через ее α-норму как

$$T_\alpha(f) = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \left(\|f(z)\|_\alpha\right)^\alpha\right). \quad (3)$$

С другой стороны, рассматривая плотности распределения вероятностей в качестве векторов соответствующего гильбертова пространства интегрируемых α раз функций со скалярным произведением $\langle \cdot,\cdot \rangle$ двух векторов, заданного в виде интеграла от произведения соответствующих функций, можно впоследствии переписать выражения (2) и (3) с помощью цепочки следующих эквивалентных выражений

$$
\begin{aligned}
T_\alpha(f) &= \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\left(\|f(z)\|_\alpha\right)^\alpha\right) = \\
&= \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\int_{R^k}(f(z))^{\alpha/2}(f(z))^{\alpha/2}\,dz\right) = \\
&= \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\left\langle (f(z))^{\alpha/2},(f(z))^{\alpha/2}\right\rangle\right).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Таким образом, последнее выражение в цепочке (4) позволяет интерпретировать энтропию Цаллиса порядка α плотности распределения вероятностей $f(z)$ как соответствующее аффинное преобразование скалярного квадрата функции $(f(z))^{\alpha/2}$.

Как прямое следствие, последнее позволяет рассмотреть возможность замены одной из плотностей $f(z)$ в скалярном произведении (4) другой плотностью распределения вероятностей, например, $g(z)$ из того же гильбертова пространства и в результате записать выражение

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha-1}\left(1-\left\langle (f(z))^{\alpha/2},(g(z))^{\alpha/2}\right\rangle\right) = \\
&= \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\int_{R^k}(f(z))^{\alpha/2}(g(z))^{\alpha/2}\,dz\right) = T_\alpha(f,g),
\end{aligned} \tag{5}
$$

которое естественно называть взаимной энтропией Цаллиса порядка α плотностей распределения вероятностей $g(z)$ и $f(z)$.

Именно взаимная энтропия Цаллиса $T_\alpha(g,f)$, в выражении (5) послужит в дальнейшем основой для построения соответствующей симметричной меры дивергенции $D_\alpha^T(f\,\|\,g)$, распределений вероятностей. А именно, $D_\alpha^T(f\,\|\,g)$ должна строиться в соответствии со следующими естественным условиями.

1) $D_\alpha^T(f\,\|\,g) \geq 0$ для любой $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ и любой плотности распределения вероятностей $f(z)$ и $g(z)$.

2) $D_\alpha^T(f\,\|\,g) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(z) \equiv g(z)$.

3) $D_\alpha^T(f\,\|\,g) = D_\alpha^T(g\,\|\,f)$.

Следует отметить, что последнее условие (симметрия) является значительным преимуществом по сравнению с дивергенцией Кульбака-

Лайблера (1), которая не является симметричной. В то же время в полной аналогии с разложением дивергенции Кульбака-Лайблера по соответствующей сумме трех слагаемых естественно ожидать, что $D_\alpha^T(f\,\|\,g)$ будет иметь аналогичный вид, а именно:

$$D_\alpha^T(f\,\|\,g)=\nu_{fg}T_\alpha(f,g)+\nu_f T_\alpha(f)+\nu_g T_\alpha(g), \tag{6}$$

где ν_{fg}, ν_f, ν_g – некоторые нормализующие коэффициенты, выбранные для соответствия вышеуказанным условиям 1) – 3).

Между тем, с учетом представления (5), для порядка $\alpha>1$ можно записать следующую цепочку:

$$\begin{gathered}T_\alpha(f,g)=\frac{1}{\alpha-1}\left(1-\left\langle (f(z))^{\alpha/2},(g(z))^{\alpha/2}\right\rangle\right)\geq\\ \geq\frac{1}{\alpha-1}\left(1-\sqrt{\left\langle (f(z))^{\alpha/2},(f(z))^{\alpha/2}\right\rangle\left\langle (g(z))^{\alpha/2},(g(z))^{\alpha/2}\right\rangle}\right)\geq\\ \geq\frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{2}\left(\left\langle (f(z))^{\alpha/2},(f(z))^{\alpha/2}\right\rangle+\left\langle (g(z))^{\alpha/2},(g(z))^{\alpha/2}\right\rangle\right)\right)=\\ =\frac{1}{2}T_\alpha(f)+\frac{1}{2}T_\alpha(g),\alpha>1.\end{gathered} \tag{7}$$

Далее, применяя те же рассуждения для $0<\alpha<1$, «обратная» цепочка будет иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}T_\alpha(f,g)=\frac{1}{\alpha-1}\left(1-\left\langle (f(z))^{\alpha/2},(g(z))^{\alpha/2}\right\rangle\right)\leq\\ \leq\frac{1}{\alpha-1}\left(1-\sqrt{\left\langle (f(z))^{\alpha/2},(f(z))^{\alpha/2}\right\rangle\left\langle (g(z))^{\alpha/2},(g(z))^{\alpha/2}\right\rangle}\right)\leq\\ \leq\frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{2}\left(\left\langle (f(z))^{\alpha/2},(f(z))^{\alpha/2}\right\rangle+\left\langle (g(z))^{\alpha/2},(g(z))^{\alpha/2}\right\rangle\right)\right)=\\ =\frac{1}{2}T_\alpha(f)+\frac{1}{2}T_\alpha(g),0<\alpha<1.\end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, выражения (7) и (8) подразумевают, что коэффициенты ν_{fg}, ν_f, ν_g в выражении (6) будут иметь в конечном итоге значения

$$\begin{cases}\nu_{fg}=1,\nu_f=\nu_g=-\dfrac{1}{2},\alpha>1\\ \nu_{fg}=-1,\nu_f=\nu_g=\dfrac{1}{2},\alpha<1\end{cases} \tag{9}$$

Оба выражения (7) и (8) с помощью коэффициентов (9) могут быть приведены к следующему унифицированному выражению для плотностей распределения вероятностей:

$$D_\alpha^T(f \| g) = \frac{1}{2 \cdot |\alpha - 1|} \int_{R^k} \left((f(z))^{\alpha/2} - (g(z))^{\alpha/2} \right)^2 dz. \tag{10}$$

Полученное таким образом выражение $D_\alpha^T(f \| g)$ естественно называть *симметричной* дивергенцией Цаллиса порядка α плотностей распределения вероятностей $f(z)$ и $g(z)$.

Далее, поскольку вышеупомянутый случайный вектор **Z** можно рассматривать в форме конкатенации двух случайных векторов $Z = \left(Z_1^T, Z_2^T\right)^T$, где $\dim Z_1 = k_1$ и $\dim Z_2 = k_2$, его плотность распределения вероятностей $f(z)$ рассматривается как совместная плотность распределения вероятностей $f_{Z_1 Z_2}\left(Z_1, Z_2\right)$ величин Z_1 и Z_2.

Одновременно, если в этих обозначениях плотность распределения вероятностей $g(z)$ рассматривается как произведение соответствующих маргинальных плотностей $g_{Z_1}\left(z_1\right)$ и $g_{Z_2}\left(z_2\right)$ этих случайных векторов Z_1 и Z_2, соответственно, то симметричная дивергенция Цаллиса

$$D_\alpha^T(f \| g) = D_\alpha^T(f_{Z_1 Z_2} \| g_{Z_1} g_{Z_2})$$

приобретает смысл меры зависимости случайных векторов Z_1 и Z_2. Соответственно, такую меру зависимости естественно называть *симметричной* взаимной информацией Цаллиса $I_\alpha^T\left(Z_1, Z_2\right)$ порядка α случайных векторов Z_1 и Z_2:

$$I_\alpha^T\left(Z_1, Z_2\right) = \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot |\alpha - 1|} \int_{R^{k_1}} \int_{R^{k_2}} \left((f_{z_1 z_2}(z_1, z_2))^{\alpha/2} - (g_{z_1}(z_1) g_{z_2}(z_2))^{\alpha/2} \right)^2 dz_1 dz_2.$$

2. Задача идентификации по теоретико-информационному критерию на основе симметричной взаимной информации Цаллиса

Рассмотрим широко используемый в теории и практике идентификации класс нелинейных систем с дискретным временем, описываемых преобразованием, линейным по параметрам.

$$\hat{Z}_{out}\left(t; \theta\right) = \theta^T Z_{inp}(t),$$

$$\theta = \left(\theta_1, ..., \theta_n\right)^T. \tag{12}$$

Компоненты вектор-столбца $Z_{inp}(t) = (z_1(t), ..., z_n(t))^T$ являются некоторыми известными функциями предшествующих значений входного процесса системы, и, как правило, предшествующих значений выходного процесса системы. В рамках постановки задачи параметры модели, которые являются компонентами вектор-столбца θ, подлежат идентификации в соответствии с теоретико-информационным критерием.

$$I_\alpha^T\left(Z_{out}(t),\widehat{Z}_{out}(t;\theta)\right)\underset{\theta}{\rightarrow}\sup, \tag{13}$$

с одновременной заменой аналитического выражения для симметричной взаимной информации Цаллиса $I_\alpha^T\left(Z_{out}(t),\widehat{Z}_{out}(t;\theta)\right)$ порядка α ее подходящей оценкой

$$\widehat{I}_\alpha^T\left(Z_{out}^{(1)},...,Z_{out}^{(N)};Z_{inp}^{(1)},...,Z_{inp}^{(N)};\theta\right)=f(\theta), \tag{14}$$

полученной на основе наблюдений выборочных данных $Z_{inp}^{(1)},...,Z_{inp}^{(N)},Z_{out}^{(1)},...,Z_{out}^{(N)}$, (обобщенных) входных, $Z_{inp}(t)$, и выходных, $Z_{out}(t)$, процессов системы. Здесь и далее верхний индекс (N) используется для соответствующей оценки функции по выборке длины N. В свою очередь, в выражении (14), $Z_{inp}^{(i)}=(z_1^{(i)},...,z_n^{(i)})^T$, $i=1,...,N$.

Тогда в рамках данного подхода начальная задача идентификации модели стохастической системы (12) по информационно-теоретическому критерию (13), (14) при наличии выборочных значений входного и выходного процессов приводит к необходимости решения задачи конечномерной оптимизации

$$f(\theta)\underset{\theta}{\rightarrow}\sup. \tag{15}$$

Для решения задачи оптимизации (15) необходимо получить явное аналитическое выражение для функции $f(\theta)$ в выражении (14). В свою очередь, такой вывод основан на применении соответствующей методики оценки симметричной взаимной информации Цаллиса (11).

Пусть: $p_{SM}(z_1,z_2)$ – плотность совместного распределения вероятностей выходных переменных системы, $Z_{out}(t)$, и модели, $\widehat{Z}_{out}(t;\theta)$; $p_S(z_1)$ – плотность частного распределения вероятностей выходной переменной системы $Z_{out}(t)$; $p_M(z_2)$ – плотность частного распределения вероятностей выходной переменной системы $\widehat{Z}_{out}(t;\theta)$.

В связи с условиями, налагаемыми на симметричную дивергенцию Цаллиса в разделе 2, соответствующая симметричная взаимная информация Цаллиса о выходной переменной системы $Z_{out}(t)$ и выходной переменной модели $\widehat{Z}_{out}(t;\theta)$ выражается через их значения маргинальных и взаимных энтропий Цаллиса следующим образом (выражения (6), (9)):

$$\begin{aligned}&I_\alpha^T\left(Z_{out}(t),\widehat{Z}_{out}(t;\theta)\right)=\\&=\nu_{12}T_\alpha(p_{SM},p_S\cdot p_M)+\nu_1T_\alpha(p_{SM})+\nu_2T_\alpha(p_S\cdot p_M),\end{aligned}$$

где, в соответствии с выражениями (6), (9),

$$\begin{cases} v_{12} = 1, c_1 = c_2 = -\dfrac{1}{2}, \alpha > 1 \\ v_{12} = -1, c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}, \alpha < 1 \end{cases} \tag{16}$$

Тогда, следуя подходу [3], предложенному в свое время для оценки взаимной информации Шеннона, получение оценки (14) симметричной взаимной информации Цаллиса $I_\alpha^T\left(Z_{out}(t), \widehat{Z}_{out}(t;\theta)\right)$, с использованием N пар выборочных данных по выходным и входным переменным, $Z_{out}(t)$ и $Z_{inp}(t)$, естественным образом основывается на применении следующих соотношений с использованием ядерных оценок соответствующих плотностей распределения вероятностей. Прежде всего, необходимо представить выражение (14) следующим образом:

$$\begin{aligned} &\widehat{I}_\alpha^T\left(Z_{out}^{(1)}, ..., Z_{out}^{(N)}; Z_{inp}^{(1)}, ..., Z_{inp}^{(N)}; \theta\right) = \\ &= v_{12} T_\alpha^{(N)}(p_{SM}, p_S \cdot p_M) + v_1 T_\alpha^{(N)}(p_{SM}) + v_2 T_\alpha^{(N)}(p_S \cdot p_M), \end{aligned} \tag{17}$$

где коэффициенты v_{12}, v_1, v_2 определяются выражением (16). В свою очередь, в (17)

$$T_\alpha^{(N)}(p_{SM}) = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(p_{SM}^{(N)}(z_1, z_2)\right)^\alpha dz_1 dz_2\right), \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &T_\alpha^{(N)}(p_S \cdot p_M) = \\ &= \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \int_{-\infty}^{\infty}\left(p_S^{(N)}(z_1)\right)^\alpha dz_1 \int_{-\infty}^{\infty}\left(p_M^{(N)}(z_2)\right)^\alpha dz_2\right), \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &T_\alpha^{(N)}(p_{SM}, p_S \cdot p_M) = \\ &= \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(p_{SM}^{(N)}(z_1, z_2) p_S^{(N)}(z_1) p_M^{(N)}(z_2)\right)^{\alpha/2} dz_1 dz_2\right), \end{aligned} \tag{20}$$

$$p_S^{(N)}(z_1) = \frac{1}{Nh_N}\sum_{i=1}^N K_1\left(\frac{z_1 - z_{out}^{(i)}}{h_N}\right), \tag{21}$$

$$p_M^{(N)}(z_2) = \frac{1}{Nh_N}\sum_{i=1}^N K_2\left(\frac{z_2 - \theta^T z_{inp}^{(i)}}{h_N}\right), \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &p_{SM}^{(N)}(z_1, z_2) = \\ &= \frac{1}{Nh_N^2}\sum_{i=1}^N K_1\left(\frac{z_1 - z_{out}^{(i)}}{h_N}\right) K_2\left(\frac{z_2 - \theta^T z_{inp}^{(i)}}{h_N}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

В выражениях (21) – (23) $\{h_N\}$ – убывающая к нулю последовательность положительных чисел; $K_j(\cdot)$, $j=1,2$ – положительно ограниченные ядра в R^1, которые удовлетворяют обычным условиям при непараметрической оценке плотности ядра.

С учетом предположений, что $Z_{out}(t)$, $\hat{Z}_{out}(t;\theta)$ удовлетворяют условию сильного перемешивания, и при соответствующих условиях относительно интегрируемости, налагаемых на ядра $K_j(\cdot)$, $j=1,2$, и плотности $p_S(z_1)$, $p_M(z_2)$, $p_{SM}(z_1,z_2)$ (формулы (3) – (7) в [3]), оценка (17) состоятельна в среднеквадратическом смысле. Между тем, следует отметить, что выражения (18) – (20) значительно проще, чем выражения, используемых в работе [3] для оценки энтропии Шеннона.

Таким образом, в конечном итоге требуемый критерий качества $f(\theta)$ теоретико-информационного вида, подлежащий максимизации по θ, определяется путем последующей подстановки выражений (18) – (23) в выражение (17).

Конечно, с аналитической точки зрения выражение (17) для функции $f(\theta)$ выглядит довольно сложным, при этом данная функция может иметь несколько локальных максимумов; поэтому естественным способом решения такой задачи оптимизации является применение генетических алгоритмов, являющихся эффективным инструментом численной оптимизации функций.

Заключение

Цель, которой следует данная работа, двойная. С одной стороны, была предложена симметричная мера дивергенции вероятностных распределений. При этом, данная мера строится на применении энтропии Цаллиса произвольного порядка α. С другой стороны, полученная таким образом симметричная мера дивергенции была применена для построения соответствующего теоретико-информационного критерия при постановке задачи идентификации систем.

Основная особенность представленного подхода заключается в применении именно состоятельной меры зависимости случайных величин в качестве критерия идентификации совместно с конструктивным методом его оптимизации, что не предполагает использования специальных знаний о вероятностных характеристиках переменных системы. В свою очередь, состоятельность меры зависимости в качестве предлагаемого теоретико-информационного критерия обеспечивает исчерпывающий учет идентифицируемости системы, которая понимается как возможность выявления и количественного описания взаимосвязи между входными и выходными переменными системы. Последнее эквивалентно невозможности получения модели системы в том и только в том случае, если этот теоретико-информационный критерий обращается в нуль, что явно указывает на взаимную стохастическую независимость входных и выходных переменных исследуемой системы.

Список литературы

1. Сарманов О.В., Захаров В.К. Меры зависимости между случайными величинами и спектры стохастических ядер и матриц // Математический сборник. 1960. Т. 52(94). № 4. С. 953–990.

2. Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer Science+Business Media, 2009. 388 p.

3. Mokkadem A. Estimation of the entropy and information of absolutely continuous random variables // IEEE Transactions on Information Theory. 1989. Vol. IT-35. Pp. 193–196.

УДК 681.5
doi:10.18720/SPBPU/2/id20-154

Ильясов Барый Галеевич[1],
д-р техн. наук, профессор, профессор;
Саитова Гузель Асхатовна[2],
канд. техн. наук, доцент, доцент;
Елизарова Анастасия Валерьевна[3],
аспирант

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ АДАПТИВНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ

[1,2,3] Уфимский государственный авиационный технический университет,
Уфа, Россия,
[1] ilyasov@tc.ugatu.ac.ru, [2] saitova@bk.ru, [3] elizarovaanastasia@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается класс адаптивных многосвязных систем, в которой могут происходить как плавные, так и внезапные структурные изменения в каждой из подсистем. Задача управления заключается в формировании таких управляющих связей между подсистемами, которые восстанавливают требуемые свойства системы в целом. Предлагается оценка устойчивости адаптивной многосвязной системы управления сложным динамическим объектом при изменении структуры системы.

Ключевые слова: многосвязные системы, устойчивость, частотные методы, структурные изменения, адаптивные системы.