Секция 4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Председатель – ***Фирсов Андрей Николаевич***,
д-р техн. наук, профессор СПбПУ Петра Великого

Ученый секретарь – ***Сорокина Наталья Владимировна***,
ассистент СПбПУ Петра Великого

УДК 517.958
doi:10.18720/SPBPU/2/id20-157

Фирсов Андрей Николаевич[1],
доктор техн. наук, профессор СПбПУ;
Сорокина Наталья Владимировна[2],
ассистент СПбПУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ О ФИЛЬТРАЦИИ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА

[1,2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия,
[1] anfirs@yandex.ru, [2] sorokinaspbpu@gmail.com

Аннотация. В данной статье решается задача фильтрации пуассоновского случайного процесса. Строится аналитическое решение задачи фильтрации, которое сводит решение задачи к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Ключевые слова: фильтрация, Пуассоновский процесс, винеровский процесс, стохастическое исчисление.

Andrey N. Firsov[1],
Doctor of Technical Sciences, Professor;
Natalia V. Sorokina[2],
Assistant

MATHEMATICAL MODELS AND SOLUTION OF PROBLEMS OF THE TRANSFER THEORY IN TECHNICAL SYSTEMS BASED ON THE PROBLEM OF FILTRATION OF THE POISSON PROCESS

[1,2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russia, [1] anfirs@yandex.ru, [2] sorokinaspbpu@gmail.com

Abstract. In this paper the problem of the filtration of a Poisson random process is solved. An analytical solution of the filtration problem is constructed, which reduces the solution of the problem to the solution of a system of ordinary differential equations of the first order.
Keywords: filtration, Poisson process, Wiener process, stochastic calculus.

Введение

Под фильтрацией случайных процессов понимается, как правило, задача об оценке значения случайного процесса в текущий момент по каким-либо значениям другого, связанного с ним случайного процесса. Теория фильтрации (и оценивания) имеет богатую историю, но именно в последние десятилетия она заняла почетное место в рамках кибернетики науки, которая «занимается изучением систем любой природы, способных воспринимать, хранить и перерабатывать информацию и использовать ее для управления и регулирования» (А.Н. Колмогоров).

Постоянно возрастающее значение методов теории фильтрации обусловлено, в первую очередь, запросами современного производства, авиации, ракетно-космической техники и т. п., требующих быстрого развития и широкого внедрения сложных систем управления и связи. Сложность этих систем обусловлена необходимостью работать в широко изменяющихся диапазонах, при заранее непредсказуемых условиях, в режимах, затрудняющих или делающих невозможным контроль со стороны человека. Теория фильтрации, наряду с другими математическими теориями, обеспечивает базу для создания такого рода систем.

С математической точки зрения, для решения задач фильтрации и оценивания чаще всего используются методы математической статистики, подкрепленные мощными вычислительными средствами, поскольку задачи обнаружения сигнала сводятся, как правило, к задачам анализа и синтеза алгоритмов. Эти вопросы достаточно полно изложены в хорошо известных учебных пособиях и монографиях отечественных [1, 2, 6 – 10] и зарубежных [3, 4] авторов. Аналитические же методы, с прикладной точки зрения, не столь популярны в виду весьма высокой сложности соответствующих математических моделей [11 – 14]. С другой стороны, аналитическое решение задачи фильтрации представляет самостоятельный интерес и для практического использования, если такое решение позволяет достаточно просто получить конкретный ответ на конкретно поставленную прикладную задачу. Понятно, что при этом приходится делать некоторые упрощающие предположения, но это не беда, если такие предположения естественны с инженерной точки зрения. Настоящая статья посвящена построению аналитического решения задачи фильтрации, которое сводит эту задачу к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Постановка задачи

Далее в этой работе будут использоваться некоторые понятия и термины стохастического исчисления. Подробности можно найти, например, в книге [6].

Пусть $\lambda(t)$, $\upsilon(t)$ – случайные процессы, $f(x,t)$, $g(x,t)$ – неслучайные достаточно гладкие функции своих аргументов.

Определим выражение

$$\int_{t_0}^{t} f\left(\lambda(\tau),\tau\right) d\upsilon(\tau)$$

следующим образом. Возьмем разбиение T_n отрезка $[t_0,t]$: $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t$ и составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\lambda(t_i),t_i\right)\left(\upsilon(t_{i+1}) - \upsilon(t_i)\right).$$

Положим по определению

$$\int_{t_0}^{t} f\left(\lambda(\tau),\tau\right) d\upsilon(\tau) \triangleq \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu_n \to 0}} \sigma_n,\ \mu_n = \max_{0\le i\le n-1}\left(t_{i+1} - t_i\right),$$

если этот предел существует (в среднем квадратичном) и не зависит от выбора разбиения T_n (стохастический интеграл Ито).

Уравнение

$$d\lambda = f(\lambda,t)dt + g(\lambda,t)d\upsilon(t),\quad \lambda(t_0) = \lambda_0$$

следует понимать в смысле

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\lambda(\tau),\tau\right)d\tau + \int_{t_0}^{t} g\left(\lambda(\tau),\tau\right)d\upsilon(\tau).$$

Для малого $\triangle t$

$$\triangle\lambda(t) \equiv \lambda(t+\triangle t) - \lambda(t) = f\left(\lambda(t),t\right)\triangle t + g\left(\lambda(t),t\right)\triangle\upsilon(t) + O\left(\left(\triangle t\right)^2\right),$$

$$\triangle\upsilon(t) \equiv \upsilon(t+\triangle t) - \upsilon(t).$$

Если $\upsilon(t)$ – винеровский процесс, то $E\left[\triangle\upsilon(t)\right] = 0$ и $E\left[\left(\triangle\upsilon(t)\right)^2\right] = \frac{1}{2}N_0\cdot\triangle t$ (здесь E обозначает математическое ожидание).

Общая схема рассматриваемой задачи может быть изображена следующим образом:

$$\vec{x}(t) \to \lambda\left(t,\vec{x}(t)\right) \to N_\lambda(t) \to \overset{\textit{фильтр}}{\square} \to z(t) \to \overset{\downarrow\eta(t)}{\oplus} \to y(t).$$

Здесь $y(t)$ – наблюдаемая функция, $\eta(t)$ – гауссов шум с известными вероятностными характеристиками; $\vec{x}(t)$ – марковский процесс (векторный, размерности n), *характеристики которого нас в конечном ито-*

ге интересуют; $\lambda\left(t,\vec{x}(t)\right)$ – интенсивность пуассоновского процесса N_λ (известная функция t и $\vec{x}(t)$). Процесс $N_\lambda(t)$ фильтруется (фильтр задан, в частности, известна его переходная функция) и преобразуется в сигнал $z(t)$, который после усиления и смешения с шумом $\eta(t)$ является наблюдаемой величиной $y(t)$.

Сигнал $y(t)$ связан с выходным сигналом фильтра $z(t)$ дифференциальным уравнением

$$dy(t)=\tilde{z}(t)dt+R^{\frac{1}{2}}(t)d\eta(t),\quad \tilde{z}(t)=C(t)z(t), \tag{1}$$

где $R^{\frac{1}{2}}(t)$, $C(t)$ – заданные неслучайные функции.

Действие фильтра описывается дифференциальным уравнением

$$dz(t)=A(t)z(t)dt+b(t)dN_\lambda(t) \tag{2}$$

где $A(t)$ и $b(t)$ – известные (неслучайные) функции. Уравнения (1), (2) дают, таким образом, возможность связать наблюдаемые $y(t)$ с процессом $N_\lambda(t)$.

Относительно процесса $\vec{x}(t)$ предполагается, что он задан стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\begin{aligned} &d\vec{x}(t)=\vec{f}\left(t,\vec{x}(t)\right)dt+\overleftrightarrow{G}\left(t,\vec{x}(t)\right)d\vec{\chi}(t),\\ &\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\vec{\chi}(t)$ – винеровский процесс, а вектор-функция $\vec{f}\left(t,\vec{x}(t)\right)$ и матрица $\overleftrightarrow{G}\left(t,\vec{x}(t)\right)$ – заданы. Из уравнения (3) можно стандартным путем вывести уравнение для плотности вероятности $p(t,\vec{x})$:

$$P\left\{\vec{x}(t)\in D\subset\mathbb{R}^n\right\}=\int\limits_D p(t,\vec{x})d\vec{x}\,.$$

Нам, однако, нужна не эта априорная плотность, а условная (апостериорная) плотность вероятности $p\left(t,\vec{x}\middle|N_t\right)$, которая учитывала бы известную реализацию $N(t)$ (или, в более общем случае, реализацию $y(t)$).

2. Построение математической модели фильтрации пуассоновского процесса

Для дальнейшего понадобится следующая функция

$$\psi_t\left(\vec{v}\middle|N(t),\vec{x}(t)\right)\equiv\psi\left(t,\vec{v}\middle|N(t),\vec{x}(t)\right)\triangleq\lim_{\triangle t\to 0}\frac{1}{\triangle t}E\left\{\left(\exp\left[i\left\langle\vec{v},\triangle\vec{x}(t)\right\rangle-1\right)\middle|N(t),\vec{x}(t)\right\},$$

где $\triangle\vec{x}(t)=\vec{x}(t+\triangle t)-\vec{x}(t),\ i=\sqrt{-1}$, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение.

Вычислим эту функцию при условии, что $\vec{x}(t)$ удовлетворяет уравнению (3). Имеем с точностью до малых порядка $o(\triangle t)$:

$$\begin{aligned} &e^{i\langle\vec{v},\triangle\vec{x}(t)\rangle}-1=i\left\langle\vec{v},\triangle\vec{x}(t)\right\rangle-\frac{1}{2}\left\langle\vec{v},\triangle\vec{x}(t)\right\rangle^{2}\overset{(3)}{=}\\ &=i\left\langle\vec{v},\vec{f}\left(t,\vec{x}(t)\right)\right\rangle\triangle t+i\left\langle\vec{v},\overleftrightarrow{G}\cdot\triangle\chi\right\rangle-\frac{1}{2}\left\langle\vec{v},\vec{f}\cdot\triangle t+\overleftrightarrow{G}\cdot\triangle\chi\right\rangle^{2}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Так как $\chi=\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \vdots\\ \chi_n\end{pmatrix}$ - по условию стандартный винеровский процесс, то $\langle\triangle\chi_i\rangle\equiv\mathrm{E}(\triangle\chi_i)=0$ и $\mathrm{E}\left(\left[\triangle\chi_i\right]^2\right)=\triangle t.$ Кроме того, поскольку при $i\neq j$ $\triangle\chi_i$ и $\triangle\chi_j$ независимы, то $\mathrm{E}\left(\triangle\chi_i\triangle\chi_j\right)=\mathrm{E}(\triangle\chi_i)\mathrm{E}\left(\triangle\chi_j\right)=0$.

Таким образом, после усреднения (при фиксированных $\vec{x}(t),\ N(t)$) в $(*)$ второе слагаемое пропадет, а первое останется без изменений. Обратимся к третьему слагаемому.

Пусть g_{ij} - элементы матрицы $\overleftrightarrow{G}$. Тогда

$$\begin{aligned} &\left\langle\vec{v},\vec{f}\cdot\triangle t+\overleftrightarrow{G}\cdot\triangle\chi\right\rangle^{2}=\left[\sum_i v_i\left(f_i\triangle t+\sum_j g_{ij}\triangle\chi_j\right)\right]^2=\\ &=\left[\triangle t\sum_i f_i v_i+\sum_{ij}v_i g_{ij}\triangle\chi_j\right]^2=\\ &=(\triangle t)^2\left(\sum_i f_i v_i\right)+2\triangle t\left(\sum_i f_i v_i\right)\left(\sum_{ij}v_i g_{ij}\triangle\chi_j\right)+\left(\sum_{ij}v_i g_{ij}\triangle\chi_j\right)^2. \end{aligned}$$

Первое слагаемое здесь имеет порядок $(\triangle t)^2$, второе слагаемое после усреднения пропадет (так как $\triangle\chi_j$ входят линейно), в третьем слагаемом после усреднения пропадут члены, содержащие $\triangle\chi_i\triangle\chi_j$ при $i\neq j$. В итоге, после усреднения останется выражение, которое в компактной форме можно записать в виде:

$$\mathrm{E}\left[\left\langle\vec{v},\vec{f}\cdot\triangle t+\overleftrightarrow{G}\cdot\triangle\chi\right\rangle^{2}\Big|N(t),\vec{x}(t)\right]=\left\langle\vec{v},\overleftrightarrow{G}\overleftrightarrow{G}'\vec{v}\right\rangle\triangle t+o(\triangle t).$$

Таким образом,

$$E\left[e^{i\langle \vec{v},\triangle\vec{x}(t)\rangle}-1\right]=i\left\langle \vec{v},\vec{f}\left(t,\vec{x}(t)\right)\right\rangle\triangle t-\frac{1}{2}\left\langle \vec{v},\vec{G}\vec{G}'\vec{v}\right\rangle\triangle t+o(\triangle t).$$

Деля на $\triangle t$ и полагая $\triangle t\to 0$, получим

$$\Psi\left(t,\vec{v}\middle|N(t),\vec{x}(t)\right)=i\left\langle \vec{v},\vec{f}\left(t,\vec{x}(t)\right)\right\rangle-\frac{1}{2}\left\langle \vec{v},\vec{G}\vec{G}'\vec{v}\right\rangle. \qquad (4)$$

Введем теперь условную характеристическую функцию процесса $\vec{x}(t)$ при заданном $N(t)$:

$$C_t\left(\vec{v}\middle|N(t)\right)=\mathrm{E}\left\{\exp\left[i\left\langle \vec{v},\vec{x}(t)\right\rangle\right]\middle|N(t)\right\}=$$

$$=\int_{R^n} e^{i\langle \vec{v},\vec{x}\rangle}p\left(\vec{x},t\middle|N(t)\right)d\vec{x}\equiv F[p](\vec{v}),$$

которая представляет собой преобразование Фурье (по $\vec{x}$) функции $p\left(t,\vec{x}\middle|N(t)\right)$.

Уравнение для $C_t\left(\vec{v}\middle|N(t)\right)$ имеет вид:

$$dC_t\left(\vec{v}\middle|N(t)\right)=\mathrm{E}\left\{\exp\left[i\left\langle \vec{v},\vec{x}(t)\right\rangle\right]\left(\lambda\left(t,\vec{x}(t)\right)-\hat{\lambda}(t)\right)\middle|N(t)\right\}\cdot$$

$$\cdot\left[\hat{\lambda}(t)\right]^{-1}\left(dN(t)-\hat{\lambda}(t)dt\right)+ \qquad (5)$$

$$+E\left\{\exp\left[i\left\langle \vec{v},\vec{x}(t)\right\rangle\right]\psi(t,\vec{v})\middle|N(t),\vec{x}(t)\middle|N(t)\right\}dt$$

Здесь

$$\triangle C_t\left(\vec{v}\middle|N(t)\right)=C_{t+\triangle t}\left(\vec{v}\middle|N(t+\triangle t)\right)-C_t\left(\vec{v}\middle|N(t)\right),$$

$$\triangle N(t)=N(t+\triangle t)-N(t),$$

$$\hat{\lambda}(t)=\mathrm{E}\left[\lambda\left(t,\vec{x}(t)\right)\middle|N(t)\right]=\int_{R^n}\lambda(t,\vec{x})p\left(t,\vec{x}\middle|N(t)\right)d\vec{x}.$$

Запишем (5) в терминах преобразования Фурье:

$$E\left\{\exp\left[i\left\langle \vec{v},\vec{x}(t)\right\rangle\right]\psi(t,\vec{v})\middle|N(t),\vec{x}(t)\middle|N(t)\right\}dt=$$

$$=\int_{R^n} e^{i\langle \vec{v},\vec{x}\rangle}\left[i\left\langle \vec{v},\vec{f}(t,\vec{x})\right\rangle-\frac{1}{2}\left\langle \vec{v},\vec{G}(t,\vec{x})\vec{G}'(t,\vec{x})\vec{v}\right\rangle\right]\cdot p\left(\vec{x},t\middle|N(t)\right)d\vec{x}=$$

$$=i\left\langle \vec{v},F\left[\vec{f}\,p\right](\vec{v})\right\rangle-\frac{1}{2}\left\langle \vec{v},F\left[\vec{G}\vec{G}'p\right](\vec{v})\right\rangle,$$

$$\mathrm{E}\left\{\exp\left[i\left\langle \vec{v},\vec{x}(t)\right\rangle\right]\left(\lambda\left(t,\vec{x}(t)\right)-\hat{\lambda}(t)\right)\middle|N(t)\right\}=F[\lambda p]-\hat{\lambda}F[p].$$

По свойствам преобразования Фурье

$$F^{-1}\left[\left\langle \vec{v}, F[\vec{\varphi}](\vec{v})\right\rangle\right] = i\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\vec{x}} \equiv i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_j},$$

$$F^{-1}\left[\left\langle \vec{v}, F\left[\overleftrightarrow{A}\vec{f}\right](\vec{v})\right\rangle\right] = -\sum_{j,k}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\left(a_{jk}f_k\right),$$

где a_{jk} - элементы матрицы $\overleftrightarrow{A}$.

Применяя теперь в (5) обратное преобразование Фурье, получим уравнение для $p\left(\vec{x},t\middle|N(t)\right)$:

$$dp\left(t,\vec{x}\middle|N(t)\right) =$$

$$= \left\{-\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left[f_j(t,\vec{x})\right]p\left(t,\vec{x}\middle|N(t)\right) + \frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\left[q_{jk}(t,\vec{x}), p\left(t,\vec{x}\middle|N(t)\right)\right]\right\}dt + \qquad (6)$$

$$+p\left(t,\vec{x}\middle|N(t)\right)\left\{\lambda(t,\vec{x}) - \hat{\lambda}(t)\right\}\left[\hat{\lambda}(t)\right]^{-1}\left\{dN(t) - \hat{\lambda}(t)dt\right\}.$$

Здесь q_{jk} - элементы матрицы $\overleftrightarrow{G}\cdot\overleftrightarrow{G}'$.

Оценим далее величину $\hat{\vec{x}}(t)$, где

$$\hat{\vec{x}}(t) = E\left[\vec{x}(t)\middle|N(t)\right] = \int_{\mathbb{R}^n}\vec{x}p\left(t,\vec{x}\middle|N(t)\right)d\vec{x}.$$

Чтобы получить уравнение для $\hat{\vec{x}}(t)$, помножим (6) на $\vec{x}$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^n$ относительно $\vec{x}$, имеем:

$$\int_{\mathbb{R}^n}x_k\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left[f_j(t,\vec{x})\right]p\left(t,\vec{x}\middle|N(t)\right)\ \ ]d\vec{x} = \sum_j\int_{\mathbb{R}^n}x_k\frac{\partial}{\partial x_j}\left[f_j\cdot p\right]d\vec{x}.$$

Рассмотрим отдельно:

$$\int_{\mathbb{R}^n}x_k\frac{\partial}{\partial x_j}\left[f_jp\right]d\vec{x} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x_k\frac{\partial}{\partial x_j}\left[f_jp\right]\right]dx_1...dx_{j-1}dx_j...dx_n$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x_k\frac{\partial}{\partial x_j}\left[f_jp\right]dx = \begin{cases} x_k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[f_jp\right]dx_j = x_kf_j(\vec{x}), p(\vec{x})_{k\neq j}\Big|_{x_j=-\infty}^{+\infty} = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left[f_jp\right]dx_j \overset{(\text{по частям})}{=} \left(x_jf_jp\right)\Big|_{x_j=-\infty}^{+\infty} - \end{cases}$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_jp\right]dx_j = -\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_jp\right]dx_j$$

(здесь использован тот факт, что $p(\vec{x}) \underset{|\vec{x}|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ быстрее, чем $\dfrac{1}{|\vec{x}|}$, а $f_j(\vec{x})$ ограничены; достаточно требовать, чтобы $f_j p \underset{|\vec{x}|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ быстрее, чем $\dfrac{1}{|\vec{x}|}$).

Таким образом,

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \vec{x} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[f_j p\right] d\vec{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \vec{f}\,(t,\vec{x})\, p\left(t,\vec{x}\,\middle|\,N(t)\right) d\vec{x}$$

Далее

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_l \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\left[q_{jk} p\right] d\vec{x} = 0 \text{ для всех } j,\, k,\, l.$$

Действительно, например при $l=j=k$ имеем:

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left[q_{jj} p\right] d\vec{x} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left[q_{jj} p\right] d\vec{x}_j\right] dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_j \ldots dx_n;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left[q_{jj} p\right] dx_j \overset{\text{по частям}}{=}$$

$$= x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[q_{jj} p\right]\Big|_{x_j=-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[q_{jj} p\right] dx_j = 0 - q_{jj} p\Big|_{x_j=-\infty}^{+\infty} = 0$$

Вычислим далее

$$\int_{\mathbb{R}^n} \vec{x}\, p\left(t,\vec{x}\,\middle|\,N(t)\right) \lambda(t,\vec{x})\, d\vec{x} = E\left\{\vec{x}(t)\lambda\left(t,\vec{x}(t)\right)\middle|\,N(t)\right\},$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \vec{x}\, p\left(t,\vec{x}\,\middle|\,N(t)\right) \hat{\lambda}(t)\, d\vec{x} = \hat{\vec{x}}(t)\hat{\lambda}(t) = \hat{\vec{x}}(t) \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(t,\vec{x}) p\left(t,\vec{x}\,\middle|\,N(t)\right) d\vec{x} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\vec{x}}(t) \lambda(t,\vec{x}) p\left(t,\vec{x}\,\middle|\,N(t)\right) d\vec{x} = E\left\{\vec{x}(t)\lambda\left(t,\vec{x}(t)\right)\middle|\,N(t)\right\}$$

Таким образом, помножая (6) на $\vec{x}$ и интегрируя по $\mathbb{R}_x^n$, получим уравнение для $\hat{\vec{x}}(t)$:

$$\begin{gathered} d\hat{\vec{x}}(t) = E\left[\vec{f}\left(t,\vec{x}(t)\right)\middle|\,N(t)\right] dt + \\ + E\left[\left(\vec{x}(t) - \hat{\vec{x}}(t)\right)\lambda\left(t,\vec{x}(t)\right)\middle|\,N(t)\right] \cdot \hat{\lambda}(t)^{-1} \cdot \left[dN(t) - \hat{\lambda}(t)\,dt\right] \\ \hat{\vec{x}}(t_0) = E\left(\vec{x}(t_0)\right) \end{gathered} \qquad (7)$$

Предположим теперь, что $\vec{f}\left(t,\vec{x}(t)\right)$ и $\lambda\left(t,\vec{x}(t)\right)$ - достаточно гладкие функции по $\vec{x}$. Тогда:

$$\vec{f}\left(t,\vec{x}(t)\right)=\vec{f}\left(t,\hat{\vec{x}}(t)\right)+\left[\partial\vec{f}\left(t,\hat{\vec{x}}(t)\right)/\partial\hat{\vec{x}}\right]^{T}\cdot\left(\vec{x}(t)-\hat{\vec{x}}(t)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(x_i-\hat{x}_i\right)\left(x_j-\hat{x}_j\right)\partial^2\vec{f}\left(t,\hat{\vec{x}}(t)\right)/\partial\hat{x}_i\partial\hat{x}_j+\ldots$$
$$\lambda\left(t,\vec{x}(t)\right)=\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}(t)\right)+\left[\partial\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}(t)\right)/\partial\hat{\vec{x}}\right]^{T}\left(\vec{x}(t)-\hat{\vec{x}}(t)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(x_i-\hat{x}_i\right)\left(x_j-\hat{x}_j\right)\partial^2\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}(t)\right)/\partial\hat{x}_i\partial\hat{x}_j+\ldots \tag{7'}$$

Подставим эти разложения в (7); при этом учтем, что

$$E\left\{\vec{x}(t)-\hat{\vec{x}}(t)\mid N(t)\right\}=0.$$

Получим:

$$d\hat{\vec{x}}(t)=\vec{f}\left(t,\hat{\vec{x}}(t)\right)dt+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\sigma_{ij}\left(\partial^2\vec{f}\left(t,\hat{\vec{x}}(t)\right)/\partial\hat{x}_i\partial\hat{x}_j\right)dt+$$
$$+\overleftrightarrow{\sum}_t\left[\partial\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}(t)\right)/\partial\hat{\vec{x}}(t)\right]\hat{\lambda}(t)^{-1}\left[dN(t)-\hat{\lambda}(t)dt\right]+o\left(\vec{x}-\hat{\vec{x}}\right), \tag{8}$$

где

$$\overleftrightarrow{\sum}_t=\left(\sigma_{ij}\right);\;\; \sigma_{ij}=E\left\{\left(x_i(t)-\hat{x}_i(t)\right)\left(x_j(t)-\hat{x}_j(t)\right)\mid N(t)\right\}. \tag{9}$$

Уравнение (8) для $\hat{\vec{x}}$ точное; однако решить его в таком виде вряд ли возможно. Поэтому сделаем некоторые упрощающие предположения. Основное предположение состоит в малости величины $\vec{x}(t)-\hat{\vec{x}}(t)\equiv\vec{\varepsilon}(t)$ (точнее предполагается малость дисперсии $D\left(\vec{\varepsilon}(t)\right)$), что дает возможность пренебречь величинами третьего и более порядков относительно $\left\|\vec{\varepsilon}\right\|$.

Прежде всего, напишем уравнение для $\overleftrightarrow{\sum}_t$. Для этого мы используем уравнение (6), помножив его на $\left(x_i-\hat{x}_i(t)\right)\left(x_j-\hat{x}_j(t)\right)$ и интегрируя по $dx_1dx_2\ldots dx_n$.

Вычислим:

$$\mathrm{I}_{ij}=\int_{\mathbb{R}^n}p\left(t,\vec{x}\right)\left(x_i-\hat{x}_i(t)\right)\left(x_j-\hat{x}_j(t)\right)d\vec{x}.$$

Имеем для подынтегрального выражения (для краткости опускаем у $p(t,\vec{x})$ аргумент $\vec{x}$):

$$\left[p(t+dt)-p(t)\right]\left(x_i-\hat{x}_i(t)\right)\left(x_j-\hat{x}_j(t)\right)=$$

$$=p(t+dt)\left[\left(x_i-\hat{x}_i(t+dt)\right)+\left(\overbrace{\hat{x}_i(t+dt)-\hat{x}_i(t)}^{=d\hat{x}_i}\right)\right]\left[\left(x_j-\hat{x}_j(t+dt)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\overbrace{\hat{x}_j(t+dt)-\hat{x}_j(t)}^{=d\hat{x}_j}\right)\right]-p(t)\left(x_i-\hat{x}_i(t)\right)\left(x_j-\hat{x}_j(t)\right)= \qquad (*)$$

$$=p(t+dt)\left[\left(x_i-\hat{x}_i(t+dt)\right)\left(x_j-\hat{x}_j(t+dt)\right)+d\hat{x}_i\left(x_j-\hat{x}_j(t+dt)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(x_i-\hat{x}_i(t+dt)\right)d\hat{x}_j\right]-p(t)\left(x_i-\hat{x}_i(t)\right)\left(x_j-\hat{x}_j(t)\right)+p(t+dt)d\hat{x}_i d\hat{x}_j$$

Далее

$$d\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(t+dt)-\sigma_{ij}(t)=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(x_i-\hat{x}_i(t+dt)\right)\left(x_j-\hat{x}_j(t+dt)\right)p(t+dt,\vec{x})d\vec{x}-\right.$$

$$\left.-\left(x_i-\hat{x}_i(t)\right)\left(x_j-\hat{x}_j(t)\right)p(t,\vec{x})d\vec{x}.\right.$$

Сравнивая с $(*)$, имеем, таким образом, для I_{ij}:

$$\mathrm{I}_{ij}=d\sigma_{ij}+d\hat{x}_i d\hat{x}_j\overbrace{\int_{\mathbb{R}^n}p(t+dt,\vec{x})d\vec{x}}^{=1}+d\hat{x}_i\overbrace{\int_{\mathbb{R}^n}p(t+dt,\vec{x})\left(x_j-\hat{x}_j(t+dt)\right)d\vec{x}}^{=\hat{x}_j(t+dt)-\hat{x}_j(t+dt)=0}+$$

$$+d\hat{x}_j\overbrace{\int_{\mathbb{R}^n}p(t+dt,\vec{x})\left(x_i-\hat{x}_i(t+dt)\right)d\vec{x}}^{=0}=d\sigma_{ij}+d\hat{x}_i d\hat{x}_j. \qquad (10)$$

Если ввести обозначение $d\vec{x}d\vec{x}^T\equiv\left(d\hat{x}_i d\hat{x}_j\right)$ (матрица размером $n\times n$), то в матричной форме можно записать:

$$\overleftrightarrow{\mathrm{I}}=\left(\mathrm{I}_{ij}\right)=d\overleftrightarrow{\sum}_t+d\vec{x}d\vec{x}^T. \qquad (10')$$

(Вообще, если $\vec{a}$ - вектор-столбец, то $\vec{a}^T$ - соответственно вектор-строка, а выражение $\vec{a}\vec{b}^T$ означает матрицу с элементами $a_i b_j$.)

Обратимся к правой части (6). После умножения ее на $\left(x_i-\hat{x}_i(t)\right)\left(x_j-\hat{x}_j(t)\right)$ и интегрирования по $d\vec{x}$, получим:

$$\mathrm{I}_{ij}=\left\{-\sum_k\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[f_k(t,\vec{x})\,p(t,\vec{x})\right]\left(x_i-\hat{x}_i(t)\right)\left(x_j-\hat{x}_j(t)\right)d\vec{x}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{k,l}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}\left[q_{kl}(t,\vec{x})\,p(t,\vec{x})\right]\left(x_i-\hat{x}_i(t)\right)\left(x_j-\hat{x}_j(t)\right)d\vec{x}\right\}+$$

$$+\left\{\int_{\mathbb{R}^n}p(t,\vec{x})\left[\lambda(t,\vec{x})-\hat{\lambda}(t)\right]\left(x_i-\hat{x}_i(t)\right)\left(x_j-\hat{x}_j(t)\right)d\vec{x}\right\}\left[\hat{\lambda}(t)\right]^{-1}\left\{dN_t-\hat{\lambda}dt\right\}.$$

Первое слагаемое, если $k\neq i,j,$ дает:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_k}[f_k p]\left(x_i-\hat{x}_i(t)\right)\left(x_j-\hat{x}_j(t)\right)d\vec{x}\overset{(\text{по частям})}{=}$$

$$=f_k(t,\vec{x})\,p(t,\vec{x})\,\varepsilon_i\varepsilon_j\Big|_{x_k=-\infty}^{x_k=+\infty}=0$$

Интеграл в правой части обращается в 0, так как

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(x_i-\hat{x}_i\right)\left(x_j-\hat{x}_j\right)\right]=0,\ \text{ибо}\ k\neq i,j\,.$$

Если $k=i\neq j$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}[f_i p]\left(x_i-\hat{x}_i\right)\left(x_j-\hat{x}_j\right)d\vec{x}\overset{(\text{по частям})}{=}$$

$$=-\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_i p\,dx_i\right]\left(x_j-\hat{x}_j\right)dx_1\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_n=$$

$$=-\int_{\mathbb{R}^n}f_i(t,\vec{x})\left(x_j-\hat{x}_j\right)p(t,\vec{x})\,d\vec{x}.$$

Аналогично, если $k=j\neq i$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[f_j p\right]\left(x_i-\hat{x}_i\right)\left(x_j-\hat{x}_j\right)d\vec{x}=-\int_{\mathbb{R}^n}\left(x_i-\hat{x}_i\right)f_j(t,\vec{x})\,p(t,\vec{x})\,d\vec{x}$$

Наконец, если $k=i=j$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}[f_i p]\left(x_i-\hat{x}_i\right)^2d\vec{x}=-2\int_{\mathbb{R}^n}\left(x_i-\hat{x}_i\right)f_j(t,\vec{x})\,p(t,\vec{x})\,d\vec{x}$$

В матричной форме:

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\mathbb{R}^n}\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\vec{f}\,(t,\vec{x})\,p(t,\vec{x})\vec{\varepsilon}(t)\vec{\varepsilon}(t)^T\,d\vec{x} = \\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\left[\vec{f}\,(t,\vec{x})\vec{\varepsilon}(t)^T+\vec{\varepsilon}(t)\vec{f}\,(t,\vec{x})^T\right]p(t,\vec{x})d\vec{x}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Вычислим далее выражение

$$
\mathrm{I}_1^{ijkl}=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}\left[q_{kl}(t,\vec{x})\,p(t,\vec{x})\right]\left(x_i-\hat{x}_i(t)\right)\left(x_j-\hat{x}_j(t)\right)d\vec{x}
$$

Заметим, что если ***не выполнено*** условие ($k=i,\ l=j$) или ($k=j,\ l=i$), то $I_1=0$. Действительно, пусть, например, $k\neq i,j$:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}[q_{kl}p](x_i-\hat{x}_i)\left(x_j-\hat{x}_j\right)d\vec{x}_k d\vec{x}_l \overset{\text{по частям относ.}x_k}{=}
$$

$$
=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\overbrace{\frac{\partial}{\partial x_l}[q_{kl}p](x_i-\hat{x}_i)\left(x_j-\hat{x}_j\right)\Big|_{x_k=-\infty}^{x_k=+\infty}}^{=0}-\right.
$$

$$
\left.-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x_l}[q_{kl}p]\overbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i-\hat{x}_i)}^{=0}\left(x_j-\hat{x}_j\right)dx_k\right]dx_l=0\,.
$$

Если же $k=i,\ \ l=j$, то

$$
\mathrm{I}_1^{ijij}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[q_{ij}p\right](x_i-\hat{x}_i)\left(x_j-\hat{x}_j\right)dx_i dx_j=
$$

$$
=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left[q_{ij}p\right](x_i-\hat{x}_i)\left(x_j-\hat{x}_j\right)\Big|_{x_i=-\infty}^{x_i=+\infty}-\right.
$$

$$
\left.-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[q_{ij}p\right]\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i-\hat{x}_i)\left(x_j-\hat{x}_j\right)dx_i\right]dx_j=
$$

$$
=-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[q_{ij}p\right]\left(x_j-\hat{x}_j\right)d\vec{x}_j d\vec{x}_i=
$$

$$
=-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[q_{ij}p\left(x_j-\hat{x}_j\right)\Big|_{x_j=-\infty}^{x_j=+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}q_{ij}p\,dx_j\right]dx_i=\int_{-\infty}^{+\infty}q_{ij}(t,\vec{x})\,p(t,\vec{x})dx_i dx_j
$$

Выше учтено, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[q_{ij}p\right]\left(x_i-\hat{x}_i\right)\left(x_j-\hat{x}_j\right)\Big|_{x_i=-\infty}^{x_i=+\infty}=0.$$

Если же $k=j,\ \ l=i$, то аналогично

$$\mathrm{I}_1^{jiij}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[q_{ij}p\right]\left(x_i-\hat{x}_i\right)\left(x_j-\hat{x}_j\right)d\vec{x}_i d\vec{x}_j=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}q_{ij}\left(t,\vec{x}\right)p\left(t,\vec{x}\right)dx_i dx_j.$$

$\mathrm{I}_1^{ijij}=\mathrm{I}_1^{jiij}$ и т. д. (так как $q_{ij}=q_{ji}$, поскольку матрица $\overleftrightarrow{G}\cdot\overleftrightarrow{G}^T$ симметрична).

В матричной форме:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{k,l}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}\left[q_{kl}p\right]\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}^T d\vec{x}=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\overleftrightarrow{G}\overleftrightarrow{G}^T p\left(t,\vec{x}\right)d\vec{x} \tag{12}$$

Итак, для $\overleftrightarrow{\sum}_t$ имеем следующее уравнение:

$$\begin{aligned}d\overleftrightarrow{\sum}_t+d\hat{\vec{x}}d\hat{\vec{x}}^T=&\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\vec{f}\left(t,\vec{x}\right)\vec{\varepsilon}^T+\vec{\varepsilon}\vec{f}\left(t,\vec{x}\right)^T+\overleftrightarrow{G}\overleftrightarrow{G}^T\right]p\left(t,\vec{x}\right)d\vec{x}dt+\\&+\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}^T\left[\lambda\left(t,\vec{x}\right)-\hat{\lambda}\left(t\right)\right]p\left(t,\vec{x}\right)d\vec{x}\right]\left[\hat{\lambda}\left(t\right)\right]^{-1}\left[dN_t-\hat{\lambda}dt\right]\end{aligned} \tag{13}$$

Разлагая теперь $\vec{f}$ и λ в ряд по степеням $\left(x_i-\hat{x}_i\right)$, удерживая члены не выше 3-го порядка относительно $\left(\vec{x}-\hat{\vec{x}}\right)$ и полагая $\hat{\lambda}=\lambda\left(\hat{\vec{x}}\right)$, получим из (13):

$$\begin{aligned}d\overleftrightarrow{\sum}_t+d\hat{\vec{x}}d\hat{\vec{x}}^T=&\left[\frac{\partial\vec{f}\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}{\partial\vec{x}}\right]^T\overleftrightarrow{\sum}_t dt+\overleftrightarrow{\sum}_t\left[\frac{\partial\vec{f}\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}{\partial\hat{\vec{x}}}\right]dt+\\&+\overleftrightarrow{G}\overleftrightarrow{G}^T dt+\overleftrightarrow{\sum}_t\left[\frac{\partial^2\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}{\partial\hat{\vec{x}}^2}\right]\overleftrightarrow{\sum}_t\lambda^{-1}\left(t,\hat{\vec{x}}\right)\left[dN_t-\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)dt\right]\end{aligned} \tag{14}$$

(здесь принимается предположение о том, что центральные моменты 4-го порядка равны произведению центральных моментов 2-го порядка – см. по этому поводу [11]).

Заметим далее, что

$$\frac{\partial\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}{\partial\hat{\vec{x}}}\left[\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)\right]^{-1}=\frac{\partial}{\partial\hat{\vec{x}}}\ln\left[\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)\right]$$

и из (8) найдем $d\hat{\vec{x}}d\hat{\vec{x}}^T$, удерживая только члены, линейные по dt:

$$d\hat{\vec{x}}d\hat{\vec{x}}^T=\overleftrightarrow{\Sigma}_t\left[\frac{\partial}{\partial\hat{\vec{x}}}\ln\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)\right]\left[\frac{\partial}{\partial\hat{\vec{x}}}\ln\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)\right]^T\overleftrightarrow{\Sigma}_t\,dN(t).$$

Отметим тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial\hat{\vec{x}}^2}\ln\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)=-\left[\frac{\partial}{\partial\hat{\vec{x}}}\ln\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)\right]\left[\frac{\partial}{\partial\hat{\vec{x}}}\ln\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)\right]^T+\left[\frac{\partial^2}{\partial\hat{\vec{x}}^2}\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)\right]\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)^{-1}.$$

Учитывая два последних равенства, из (14) получаем для $\overleftrightarrow{\Sigma}_t$ приближенное уравнение

$$\begin{gathered}d\overleftrightarrow{\Sigma}_t=\left[\frac{\partial}{\partial\hat{\vec{x}}}\vec{f}\left(t,\hat{\vec{x}}\right)\right]^T\overleftrightarrow{\Sigma}_t\,dt+\overleftrightarrow{\Sigma}_t\left[\frac{\partial}{\partial\hat{\vec{x}}}\vec{f}\left(t,\hat{\vec{x}}\right)\right]dt+\overleftrightarrow{G}\overleftrightarrow{G}^T dt-\\-\overleftrightarrow{\Sigma}_t\left[\frac{\partial^2\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}{\partial\hat{\vec{x}}^2}\right]\overleftrightarrow{\Sigma}_t\,dt+\overleftrightarrow{\Sigma}_t\left[\frac{\partial^2}{\partial\hat{\vec{x}}^2}\ln\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)\right]\overleftrightarrow{\Sigma}_t\,dN_t\\\overleftrightarrow{\Sigma}_{t_0}=cov\left(\vec{x}_o\right).\end{gathered}\tag{15}$$

Вместе уравнения (8) и (15) дают замкнутую систему приближенных уравнений для отыскания $\hat{\vec{x}}$ и $\overleftrightarrow{\Sigma}_t$ (всего $n(n+3)/2$ уравнений и неизвестных).

Отметим, что одним из основных допущений является замена $\hat{\lambda}(t)$ на $\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)$, что справедливо с точностью $\left|\vec{x}-\hat{\vec{x}}\right|^2$.

Замечание. Уравнение (8) удобно записать еще в такой форме:

$$\begin{gathered}d\hat{\vec{x}}=\vec{f}\left(t,\hat{\vec{x}}\right)dt+\\+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\sigma_{ij}\frac{\partial^2\vec{f}\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}{\partial\hat{\vec{x}}_i\hat{\vec{x}}_j}dt-\overleftrightarrow{\Sigma}_t\left[\frac{\partial\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}{\partial\hat{\vec{x}}}\right]dt+\overleftrightarrow{\Sigma}_t\left[\frac{\partial\ln\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}{\partial\hat{\vec{x}}}\right]dN_t\\\hat{\vec{x}}(t_0)=\mathrm{E}\left[\vec{x}_0\right].\end{gathered}\tag{8'}$$

Вернемся к задаче, сформулированной вначале п. 2. Сразу сделаем некоторые упрощающие предположения. В качестве фильтра возьмем RC-цепочку; переходная функция $h(t,\tau,g)$ в этом случае имеет вид

$$h(t,\tau,g)=\begin{cases} g\cdot b\cdot\exp\left[-A(t-\tau)\right], t\ge\tau,\\ 0, \quad t<\tau. \end{cases}$$

Здесь b, A - постоянные, g - вообще говоря, случайная переменная (соответственно, в (2) $A(t)=A$, $b(t)=b$). Распределение $g: p_g(g)$ предполагается известным.

Ниже процесс $\vec{x}(t)$ в (3), определяющий интенсивность $\lambda(t,\vec{x})$, будем обозначать $\vec{x}_\lambda(t)$; через $\vec{x}(t)$ обозначим вектор

$$\vec{x}(t)=\left(\vec{x}_\lambda(t),z(t)\right)=\left[x^{(1)}{}_\lambda,x^{(2)}{}_\lambda,\dots,x^{(n)}{}_\lambda,z\right]^T;\ \ \dim\vec{x}_\lambda=n,$$

$$\dim\vec{x}=n+1$$

Далее для краткости обозначим плотность вероятности

$$p\left(\vec{x}_\lambda,z,t\mid y(t)\right)\equiv p\left(\vec{x}_\lambda,z\right)\equiv p\left(\vec{x}\right)$$

Введем характеристическую функцию

$$C\left(\vec{\upsilon},t\mid y_t\right)=\int e^{i\langle\vec{\upsilon},\vec{x}\rangle}p\left(\vec{x}\right)d\vec{x},\quad \vec{\upsilon}=\left(\vec{\upsilon}_1,\upsilon_2\right),\quad \dim\vec{\upsilon}_1=n.$$

Для нее имеет место уравнение

$$\begin{aligned} dC\left(\vec{\upsilon},t\mid y_t\right)=\mathrm{E}\left\{\psi\left(\vec{\upsilon},t\mid y_t,\vec{x}(t)\right)e^{i\langle\vec{\upsilon}\cdot\vec{x}(t)\rangle}\mid y_t\right\}dt+\\ +\mathrm{E}\left\{e^{i\langle\vec{\upsilon},\vec{x}(t)\rangle}\left[\tilde{z}(t)-\hat{\tilde{z}}(t)\right]\right\}R(t)^{-1}\left[dy_t-\hat{\tilde{z}}(t)dt\right], \end{aligned}\tag{16}$$

где

$$\psi\left(\vec{\upsilon},t\mid y_t,\vec{x}(t)\right)=\psi_\lambda\left(\vec{\upsilon}_1,t\mid\vec{x}_\lambda\right)+i\left\langle\upsilon_2,Az(t)\right\rangle+\lambda\left(t,\vec{x}_\lambda(t)\right)E_g\left\{e^{i\langle\upsilon_2,g\rangle b}-1\right\},\tag{17}$$

$$\psi_\lambda\left(\vec{\upsilon}_1,t\mid\vec{x}_\lambda(t)\right)=i\left\langle\vec{\upsilon}_1,\vec{f}\left(t,\vec{x}_\lambda(t)\right)\right\rangle-\frac{1}{2}\left\langle\vec{\upsilon}_1,\vec{\vec{G}}\vec{\vec{G}}^T\vec{\upsilon}_1\right\rangle \text{ (см. (4)).}$$

Вычислим:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left\{\psi\left(\vec{\upsilon},t\mid y_t,\vec{x}(t)\right)e^{i\langle\vec{\upsilon},\vec{x}(t)\rangle}\mid y_t\right\}=\int i\left\langle\vec{\upsilon}_1,\vec{f}\left(t,\vec{x}_\lambda\right)\right\rangle p\left(\vec{x}_\lambda,z\right)e^{i\langle\vec{\upsilon},\vec{x}\rangle}d\vec{x}-\\ -\frac{1}{2}\left\langle\vec{\upsilon}_1,\vec{\vec{G}}\vec{\vec{G}}^T\vec{\upsilon}_1\right\rangle\int p\left(\vec{x}_\lambda,z\right)e^{i\langle\vec{\upsilon},\vec{x}\rangle}d\vec{x}+i\int\left(\upsilon^2Az\right)p\left(\vec{x}_\lambda,z\right)e^{i\langle\vec{\upsilon},\vec{x}\rangle}d\vec{x}+\\ +\int\lambda\left(t,\vec{x}_\lambda\right)\left\{\left[e^{i\upsilon_2gb}-1\right]p_g(g)dg\right\}p\left(\vec{x}_\lambda,z\right)e^{i\langle\vec{\upsilon},\vec{x}\rangle}d\vec{x}= \end{aligned}$$

$$= -i\vec{\upsilon}_1 \cdot F\left[\vec{f}\left(t,\vec{x}_\lambda\right)p\left(\vec{x}_\lambda,z\right)\right]\left(\vec{\upsilon}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,\mathrm{j}}\upsilon_{1i}\upsilon_{1j}F\left[p\left(\vec{x}_\lambda,z\right)\right]\left(\vec{\upsilon}\right) +$$

$$+i\upsilon_2 F\left[Azp\left(\vec{x}_\lambda,z\right)\right]\left(\vec{\upsilon}\right) + \int\left[e^{i\langle\upsilon_2 g\rangle b} - 1\right]F\left[\lambda\left(t,\vec{x}_\lambda\right)p\left(\vec{x}\right)\right]\left(\vec{\upsilon}\right)p_g\left(g\right)dg;$$

$$\mathrm{E}\left\{e^{i\langle\vec{\upsilon},\vec{x}(t)\rangle}\left[\tilde{z}(t) - \hat{\tilde{z}}(t)\right] \mid y_t\right\} = c\int\left[z - \hat{z}\right]e^{i\langle\vec{\upsilon},\vec{x}\rangle}p\left(\vec{x}_\lambda,z\right)d\vec{x} =$$

$$\left[\begin{array}{c}\hat{z}(t) = \int zp(z)dz = \int\int zp\left(\vec{x}_\lambda,z\right)d\vec{x}_\lambda dz \\ \text{ибо } p(z) = \int p\left(\vec{x}_\lambda,z\right)d\vec{x}_\lambda\end{array}\right]$$

$$= c\left\{F\left[zp\left(\vec{x}\right)\right]\left(\vec{\upsilon}\right) - F\left[p\left(\vec{x}\right)\right]\left(\vec{\upsilon}\right)\cdot\hat{z}\right\}.$$

Здесь $F\left(\cdot\right)\left(\vec{\upsilon}\right) = \int\left(\cdot\right)e^{i\langle\vec{\upsilon},\vec{x}\rangle}d\vec{x}$ - преобразование Фурье.

Переходя к обратному преобразованию Фурье в (16), получим:

$$dp\left(t,\vec{x} \mid y_t\right) = \left[-\frac{\partial}{\partial\vec{x}_\lambda}\left[\vec{f}\left(t,\vec{x}_\lambda\right)p\left(\vec{x}_\lambda,z\right)\right] + \frac{1}{2}\sum_{j,k}q_{jk}\frac{\partial^2}{\partial x_{\lambda j}\partial x_{\lambda k}}p\left(\vec{x}_\lambda,z\right) -\right.$$

$$\left. -\frac{\partial}{\partial z}\left(Azp\left(\vec{x}_\lambda,z\right)\right) - \lambda\left(t,\vec{x}_\lambda\right)p\left(\vec{x}_\lambda,z\right) + \int\lambda\left(t,\vec{x}_\lambda\right)p\left(\vec{x}_\lambda,z-gb\right)p_g(g)dg\right]dt + \tag{18}$$

$$+c\left[z - \hat{z}\left(t\right)\right]p\left(\vec{x}_\lambda,z\right)R\left(t\right)^{-1}\left[dy\left(t\right) - c\hat{z}\left(t\right)dt\right].$$

3. Вывод основных уравнений

Для $\lambda\left(t,\vec{x}\right)$ используются различные модели. Их следует оценивать не только с физической, но и со «статистической» точки зрения. В качестве критерия статистической оптимальности той или иной модели возьмем условие наименьшей дисперсии. Чтобы, однако, сравнивать по этому критерию различные модели $\lambda\left(t,\vec{x}\right)$, надо из уравнений (8), (15) исключить процесс dN_t. Мы воспользуемся тем фактом, что $\left\langle dN_t\right\rangle = \lambda\left(t,\vec{x}\left(t\right)\right)dt$, и усредним уравнение (6):

$$dp\left(t,\vec{x} \mid N(t)\right) = \left\{\begin{array}{l}-\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left[f_j\left(t,\vec{x}\right)p\left(t,\vec{x} \mid N(t)\right)\right] + \\ +\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial\vec{x}_i\partial\vec{x}_j}\left[q_{ij}\left(t,\vec{x}\right)p\left(t,\vec{x} \mid N(t)\right)\right]\end{array}\right\}dt + \tag{19}$$

$$+p\left(t,\vec{x} \mid N(t)\right)\left[\lambda\left(t,\vec{x}\right) - \hat{\lambda}(t)\right]^2\left[\hat{\lambda}(t)\right]^{-1}dt.$$

Далее действуем так же, как в п. 3, берем за основу вместо уравнения (6) уравнение (19).

Помножим (19) на $\vec{x}$ и проинтегрируем по $d\vec{x}$; при этом по сравнению с п. 3 изменится лишь интеграл от третьего слагаемого.

Имеем:

$$\int \vec{x}p(\vec{x})\left[\lambda(\vec{x})-\hat{\lambda}\right]^2 \frac{1}{\hat{\lambda}}d\vec{x} = \frac{1}{\hat{\lambda}}\int \vec{x}p(\vec{x})\lambda\left(\lambda-\hat{\lambda}\right)d\vec{x} - \int \vec{x}p(\vec{x})\left(\lambda-\hat{\lambda}\right)d\vec{x}.$$

Используем разложение $(7')$ для $\lambda\left(t,\vec{x}\right)$, удерживая члены до 2-го порядка относительно $\left(\vec{x}-\hat{\vec{x}}\right)$ включительно, будем иметь:

$$\frac{1}{\hat{\lambda}}\lambda\left(\lambda-\hat{\lambda}\right) = \frac{1}{\hat{\lambda}}\left[\lambda\left(\hat{\vec{x}}\right) + \sum_i \frac{\partial\lambda\left(\hat{\vec{x}}\right)}{\partial\hat{x}_i}(x_i-\hat{x}_i) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\hat{x}_i\partial\hat{x}_j}(x_i-\hat{x}_i)\left(x_j-\hat{x}_j\right) + \ldots\right]\left(\lambda-\hat{\lambda}\right) =$$

$$= \left(\lambda-\hat{\lambda}\right) + \frac{1}{\hat{\lambda}}\left(\sum_i \frac{\partial\lambda}{\partial\hat{x}_i}(x_i-\hat{x}_i)+\ldots\right)\left(\sum_i \frac{\partial\lambda}{\partial\hat{x}_i}(x_i-\hat{x}_i)+\ldots\right),$$

где мы использовали также предположение $\hat{\lambda}=\lambda\left(\hat{x}\right)$.

Таким образом, с рассматриваемой степенью точности

$$\int x_k p(\vec{x})\left[\lambda-\hat{\lambda}\right]\frac{1}{\hat{\lambda}}d\vec{x} = \int x_k p(\vec{x})\sum_{i,j}\frac{\partial\lambda}{\partial\hat{x}_i}\frac{\partial\lambda}{\partial\hat{x}_j}(x_i-\hat{x}_i)\left(x_j-\hat{x}_j\right)\frac{1}{\hat{\lambda}}d\vec{x} =$$

$$= \int \hat{x}_k p(\vec{x})\sum_{i,j}..d\vec{x} + \int (x_k-\hat{x}_k)p(\vec{x})\sum_{i,j}..d\vec{x} =$$

$$= \int \hat{x}_k p(\vec{x})\sum_{i,j}..d\vec{x} + o\left(\left(\vec{x}-\hat{\vec{x}}\right)^2\right).$$

Следовательно, для $d\hat{\vec{x}}$ получаем уравнение:

$$d\hat{\vec{x}}_t = \vec{f}\left(t,\hat{\vec{x}}_t\right)dt + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\sigma_{ij}\left(\frac{\partial^2\vec{f}\left(t,\hat{\vec{x}}_t\right)}{\partial\hat{\vec{x}}_i\partial\hat{\vec{x}}_j}\right)dt + \hat{\vec{x}}_t\frac{1}{\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}\sum_{i,j}\sigma_{ij}\frac{\partial\lambda}{\partial\hat{\vec{x}}_i}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\hat{\vec{x}}_j}dt \qquad (20)$$

Уравнение для $\overleftrightarrow{\Sigma}_t = (\sigma_{ij})$ получим аналогично. Помножим (19) на $(x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_j)$ и проинтегрируем по $d\vec{x}$. Как и выше, отличие от п. 3 состоит в вычислении

$$\int \vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}^T \left[\lambda(t,\vec{x}) - \hat{\lambda}(t)\right]^2 \frac{1}{\hat{\lambda}} p(t,\vec{x}) d\vec{x}.$$

Рассмотрим этот интеграл подробнее. Обозначим

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} \int (x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_j)\left[\lambda - \hat{\lambda}\right]^2 p(\vec{x}) d\vec{x} \equiv \mathring{I}_{ij}.$$

Имеем (напомним, что принимается $\hat{\lambda} = \lambda(\hat{x})$):

$$\left[\lambda - \hat{\lambda}\right]^2 = \left[\sum_k \frac{\partial}{\partial \hat{x}_k}(x_k - \hat{x}_k) + \sum_{m,s} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_m \partial \hat{x}_s}(x_m - \hat{x}_m)(x_s - \hat{x}_s) + \ldots\right]^2 =$$

$$= \left[\sum_k \frac{\partial}{\partial \hat{x}_k}(x_k - \hat{x}_k)\right]^2 + \ldots = \sum_{k,l} \frac{\partial \lambda}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial \lambda}{\partial \hat{x}_l}(x_k - \hat{x}_k)(x_l - \hat{x}_l) + \ldots$$

(сохраняем члены до 2-го порядка включительно относительно $(x - \hat{x})$).

Принимая, наконец, предположение о том, что центральные моменты 4-го порядка раскладываются в произведение соответствующих центральных моментов 2-го порядка [11, с. 98], получим:

$$\mathring{I}_{ij} = \frac{1}{\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)} \sigma_{ij} \sum_{k,l} \frac{\partial \lambda}{\partial \hat{x}_k} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \hat{x}_l} \sigma_{kl} = \frac{1}{\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)} \sum_{k,l} \sigma_{il} \frac{\partial \lambda}{\partial \hat{x}_k} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \hat{x}_l} \sigma_{kj}.$$

Отметим далее, что слагаемым $d\hat{\vec{x}} d\hat{\vec{x}}^T$ (см. (13)) здесь можно пренебречь, так как в рассматриваемом случае оно имеет порядок $(dt)^2$ (см. (20)). Обозначая через $\overleftrightarrow{\lambda}$ матрицу

$$\overleftrightarrow{\lambda} \equiv (\lambda_{ij}) \equiv \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \hat{x}_i} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \hat{x}_l}\right),$$

получим для $\overleftrightarrow{\Sigma}_t = (\sigma_{ij})$ следующее уравнение:

$$d\overleftrightarrow{\Sigma}_t = \left[\frac{\partial \vec{f}\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}{\partial \hat{\vec{x}}}\right]^T \overleftrightarrow{\Sigma}_t dt + \overleftrightarrow{\Sigma}_t \left[\frac{\partial \vec{f}\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}{\partial \hat{\vec{x}}}\right] dt + \overleftrightarrow{G}\overleftrightarrow{G}^T dt + \overleftrightarrow{\Sigma}_t \overleftrightarrow{\lambda} \overleftrightarrow{\Sigma}_t \lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)^{-1} dt. \quad (21)$$

Деля (20) и (21) на dt, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $\hat{x}_i$, σ_{ij}:

$$\frac{d\hat{x}_i}{dt} = f_i\left(t,\hat{\vec{x}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k,l}\sigma_{kl}\frac{\partial^2 f_i\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}{\partial\hat{x}_k\partial\hat{x}_l} + \frac{\hat{x}_i}{\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}\sum_{k,l}\sigma_{kj}\frac{\partial\lambda}{\partial\hat{x}_k}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\hat{x}_l},\quad i=1,2,...n,$$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{ij}}{dt} &= \sum_k\frac{\partial f_k}{\partial\hat{x}_i}\sigma_{kj} + \sum_k\sigma_{ik}\frac{\partial f_k}{\partial\hat{x}_j} + \sum_k g_{ik}g_{jk} + \\ &+ \frac{1}{\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}\sum_{k,l}\sigma_{il}\frac{\partial\lambda}{\partial\hat{x}_l}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\hat{x}_k}\sigma_{kj},\quad i,j=1,2,...n\end{aligned} \tag{22}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}\hat{x}_i\left(t_0\right) &= \mathrm{E}\left[x_{i0}\right] = \overline{x}_{i0},\ i=1,2,...,n,\\ \sigma_{ij}\left(t_0\right) &= \mathrm{E}\left[\left(x_{i0}-\overline{x}_{i0}\right)\left(x_{j0}-\overline{x}_{j0}\right)\right],\ i,j=1,2,...n\end{aligned} \tag{23}$$

4. Уравнения для простейших моделей фильтрации

1) $\vec{f}\equiv\vec{0},\quad \overleftrightarrow{G}\equiv\overleftrightarrow{0},\quad \lambda\left(t,x\right)=A\exp\left(-xt\right),\quad A=const>0$,

где x - одномерная случайная величина (с.в.), принимающая положительные значения, и с известными средним $\overline{x}_0$ и дисперсией σ_0.

В этом случае уравнения (22) дают:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x}t^2e^{-\hat{x}t}\sigma,\quad \frac{d\sigma}{dt} = A\sigma^2t^2e^{-\hat{x}t},\quad t\geq 0,$$

$$\hat{x}(0)=\overline{x}_0,\quad \sigma(0)=\sigma_0.$$

2) $\vec{f}\equiv\vec{0},\quad \overleftrightarrow{G}\equiv\overleftrightarrow{0},\quad \lambda\left(t,x_1,x_2\right)=x_1\exp\left(-x_2t\right),\quad t\geq 0$

где x_1,x_2 - независимые положительные случайные величины с известными средними $\overline{x}_1,\overline{x}_2$ и дисперсиями σ_1 и σ_2.

$$\frac{d\hat{x}_i}{dt} = \hat{x}_i\left[\frac{\sigma_{11}}{\hat{x}_1}e^{-\hat{x}_2t} + \sigma_{22}\hat{x}_1t^2e^{-\hat{x}_2t} - 2\sigma_{12}te^{-\hat{x}_2t}\right],$$

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = \frac{1}{\hat{x}_1}\left[\sigma_{i1}\sigma_{1j}e^{-\hat{x}_2t} + \sigma_{i2}\sigma_{2j}\hat{x}_1^2t^2e^{-\hat{x}_2t} - \sigma_{i1}\sigma_{2j}\hat{x}_1te^{-\hat{x}_2t} - \sigma_{i2}\sigma_{1j}\hat{x}_1te^{-\hat{x}_2t}\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{\hat{x}_1}\sigma_{i1}\sigma_{1j} + \sigma_{i2}\sigma_{2j}\hat{x}_1t^2 - \sigma_{i1}\sigma_{2j}t - \sigma_{i2}\sigma_{1j}t\right]e^{-\hat{x}_2t},\quad i,j=1,2$$

$$\left(\sigma_{ij}=\sigma_{ji}\right)$$

$$\hat{x}_i(0)=\overline{x}_i,\quad \sigma_{ij}(0)=\sigma_i\delta_{ij},\quad i,j=1,2$$

3) $\vec{f}\equiv\vec{0},\quad \overleftrightarrow{G}\equiv\overleftrightarrow{0},\quad \lambda\left(t,\vec{x}\right)=x_1e^{-x_2t}/t^{x_3}$,

где x_1, x_2, x_3 - положительные взаимно независимые случайные величины с известными средними $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ и дисперсиями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ соответственно.

$$\frac{d\hat{x}_i}{dt} = \hat{x}_i \left[\frac{\sigma_{11}}{\hat{x}_1} + \sigma_{22}\hat{x}_1 t^2 + \sigma_{33}\hat{x}_1 \ln^2 t - 2\sigma_{12} t - 2\sigma_{13} \ln t + 2\sigma_{23}\hat{x}_1 t \ln t \right] \frac{e^{-\hat{x}_2 t}}{t^{\hat{x}_3}}, i = 1,2,3$$

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = \left[\frac{\sigma_{i1}\sigma_{1j}}{\hat{x}_1} + \sigma_{i2}\sigma_{2j}\hat{x}_1 t^2 + \sigma_{i3}\sigma_{3j}\hat{x}_1 \ln^2 t + \left(\sigma_{i2}\sigma_{3j} + \sigma_{i3}\sigma_{2j}\right)\hat{x}_1 t \ln t - \right.$$

$$\left. -\left(\sigma_{i1}\sigma_{2j} + \sigma_{i2}\sigma_{1j}\right) t - \left(\sigma_{i1}\sigma_{3j} + \sigma_{i3}\sigma_{1j}\right) \ln t \right] \frac{e^{-\hat{x}_2 t}}{t^{\hat{x}_3}}, \quad i, j = 1,2,3$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji},$$

$$\hat{x}_i(t_0) = \overline{x}_i, \quad \sigma_{ij}(t_0) = \sigma_i \delta_{ij}, \quad i, j = 1,2,3, \quad t_0 > 0.$$

5. Результаты и выводы

В настоящей работе предложен и строго обоснован алгоритм аналитического решения задачи определения параметров неизвестного векторного марковского процесса, влияющего на интенсивность наблюдаемого пуассоновского процесса. В результате, построен алгоритм, позволяющий свести задачу определения математического ожидания и элементов ковариационной матрицы искомого марковского процесса к решению определённой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Именно, решена задача фильтрации пуассоновского случайного процесса в следующем смысле. Пусть $N_\lambda(t)$ - пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda\left(t, \vec{x}(t)\right)$, зависящей от некоторого (неизвестного) векторного марковского процесса $\vec{x}(t)$. Процесс $N_\lambda(t)$ фильтруется (фильтр задан, в частности, известна его переходная функция) и преобразуется в сигнал $z(t)$, который, после усиления и смешения с шумом $\eta(t)$, является наблюдаемой величиной $y(t)$. Требуется определить характеристики процесса $\vec{x}(t)$, а именно математические ожидания $\hat{x}_i(t)$ и элементы $\sigma_{ij}(t)$ ковариационной матрицы. Задача сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (22), решения которой и дают искомые величины.

Список литературы

1. Фомин В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984.
2. Сосулин Н.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. Радио, 1980.
3. Сэйдж Э., Мэлс Дж. Теория оценивания и её применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
4. Браммер К. Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. М.: Наука, 1982.

5. Миллер Г.Б., Панков А.Р. Фильтрация случайного процесса в статистически неопределенной линейной стохастической дифференциальной системе // Автомат. и телемех. 2005. № 1. С. 59–71.

6. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990.

7. Богданович В.А., Вострецов А.Г. Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов. М.: Физматлит, 2004.

8. Шмелев А.Б. Основы марковской теории нелинейной обработки случайных полей. М.: Изд-во МФТИ, 1998.

9. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазико-герентный прием сигналов. М.: Сов. радио, 1975.

10. Граничин О.Н. Введение в методы стохастической оптимизации и оценивания. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003.

11. Фирсов А.Н. Аналитическое решение нестационарного уравнения Колмогорова-Феллера с нелинейным коэффициентом сноса // Сборник трудов XXIII Международ. научно-практической конференции «Системный анализ в проектировании и управлении». Ч. 2. СПб.: Изд-во Политех-Пресс, 2019. С. 9–73.

12. Firsov A.N., Zhilenkov A.A. Mathematical analysis of transport systems modeled by the stationary Kolmogorov-Feller equation with a nonlinear drift coefficient // Vibroengineering Procedia (ISSN Print 2345-0533; ISSN online 2538-8479). June 2019. Vol. 25. Pp. 166–170.

13. Козлов В.Н. Управление энергетическими системами. СПб: Издательство Политехн. ун-та, 2008.

14. Snyder D.L. Filtering and Detection for Doubly Stochastic Poisson Processes // IEEE Transactions on Information Theory. IT-19. Jan. 1972. Pp. 91–103.

УДК 004.827
doi:10.18720/SPBPU/2/id20-158

Кулик Борис Александрович,
д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., вед. науч. сотр.

ЛОГИКО-ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ АЛГЕБРЫ КОРТЕЖЕЙ

Институт проблем машиноведения РАН,
Санкт-Петербург, Россия,
ba-kulik@yandex.ru

Аннотация. Предлагается новый подход к логической составляющей интервального анализа, в котором вместо минимаксных операций и сравнений интервалов по величине используются операции и сравнения алгебры множеств. Полученная модель позволяет моделировать и анализировать объекты, у которых имеются не только измеримые, но и не имеющие меры упорядоченные атрибуты, при этом для них можно помимо логического анализа объектов применять методы упорядочения и кластеризации.