3. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: Изд-во “XYZ”, 2019. 629 с.
4. Городецкий А.Е., Тарасова И.Л. Нечеткое математическое моделирование плохо формализуемых процессов и систем. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 335 с.
5. Городецкий А.Е., Тарасова И. Л., Шкодырев В. П. Математическое моделирование интеллектуальных систем управления: Моделирование детерминированных интеллектуальных систем управления. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. 181 с.
6. Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space IR // Fundamentals of numerical computation (Computer-oriented numerical analysis) / Alefeld G., Grigorieff R.D. (eds.) Wien: Springer, 1980. Pp. 33–49.
7. Левин В.И. Интервальная логика и некоторые ее применения // Логические исследования. 2004. № 1. С. 174–188.
8. Allen J.A. Maintaining knowledge about temporal intervals // Communications of the ACM. 1983. Vol. 20 (11). Pp. 832–843.
9. McNaughton R. A theorem about infinite-valued sentential logic // J. Symb. Logic, 1951. Vol. 16 (1). Pp. 1–13.
10. Гинзбург С.А. Математическая непрерывная логика и изображение функций. М.: Энергия, 1968. 136 с.
11. Плесневич Г.С., Нгуен Тхи Минь Ву. Алгоритмы дедукции для некоторых расширений интервальной логики Аллена // Искусственный интеллект и принятие решений. 2016. № 1. С. 75–88.
12. Кулик Б.А. Вероятностная логика на основе алгебры кортежей // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 118–127.
13. Кулик Б.А., Зуенко А.А., Фридман А.Я. Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 235 с.
14. Kulik B., Fridman A. Algebra of clusterizable relations // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2019. Vol. 836. Pp. 295–304.
15. Everitt B. Cluster analysis. Chichester, West Sussex, UK: Wiley, 2011. 330 p.
16. Журавлев Ю.И., Рязанов В.В., Сенько О.В. Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения. М: Фазис, 2006. 176 с.

УДК 531.001.362
doi:10.18720/SPBPU/2/id20-159

Фирсов Андрей Николаевич[1],
доктор техн. наук, профессор СПбПУ;
Журавская Анжелика[2],
аспирант

О МЕТОДАХ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТИ

[1,2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия, [1] anfirs@yandex.ru, [2] hella94@mail.ru

Аннотация. Предлагаемая работа знакомит читателя с проблематикой теории подобия и размерности и подчеркивает её важность при решении прикладных инженерно-технических задач. Статья носит методический характер и, в первую очередь, рассчитана на читателей, знакомых со стандартными курсами общей физики и высшей математики технического вуза.

Ключевые слова: теория подобия и размерности, методология анализа физико-технических процессов.

Andrey N. Firsov[1],
Professor, Doctor of Technical Science;
Anzelika Zuravska[2],
Postgraduate

ABOUT METHODS OF THE THEORY OF SIMILARITY AND DIMENSION

[1,2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia,
[1] anfirs@yandex.ru, [2] hella94@mail.ru

Abstract. In this paper is acquaints the reader with the problems of the theory of similarity and dimension and emphasize its importance in solving applied engineering problems. This article is methodological in nature and, first of all, is intended for readers who are familiar with standard courses in general physics and higher mathematics of a technical university.

Keywords: theory of similarity and dimension, methodology of analysis of physical and technical processes.

Исследования физических и технологических процессов, установление закономерностей их протекания, нахождение зависимостей, необходимых для их анализа и расчета, можно проводить разными методами: *теоретическим, экспериментальным, подобия.*

Теоретический метод основан на составлении и решении системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс. Дифференциальные уравнения описывают целый класс однородных по своей сущности явлений (процессов), поэтому для выделения конкретного явления необходимо ввести определенные ограничения, которые однозначно будут характеризовать данное явление. Эти дополнительные условия называются условиями однозначности. Условия однозначности включают в себя: геометрическую форму и размеры системы, т. е. аппарата, канала и т. д.; физические свойства веществ, участвующих в процессе; начальные условия (начальную температуру, начальную скорость и т. д.); граничные условия, например скорость жидкости у стенок канала.

Однако многие физические и технологические процессы настолько сложны, что удается, в лучшем случае, лишь составить соответствующую систему дифференциальных уравнений и установить условия однозначности. Аналитически решить эти уравнения известными методами часто не представляется возможным.

Экспериментальный метод позволяет на основе опытных данных получить эмпирические уравнения, описывающие данный процесс. Сложности экспериментального метода заключаются в необходимости проведения большого количества опытов на реальных технологических установках. Это связано с большими затратами средств и времени. Вместе с тем, результаты проведенных экспериментов будут справедливы только для тех условий, в которых они получены, и не могут быть с достаточной надежностью перенесены на процессы, аналогичные изученным, но протекающие в других условиях.

Метод теории подобия позволяет с достаточной для практики точностью изучать сложные процессы на более простых моделях, обобщать результаты опытов и получать закономерности, справедливые не только для данного процесса, но и для всей группы, так называемых *подобных процессов*. При моделировании процессов можно вместо дорогостоящих трудоемких опытов на промышленных установках проводить исследования на моделях значительно меньших размеров, а вместо зачастую опасных и вредных веществ использовать безопасные модельные вещества, опыты проводить в относительно комфортных условиях. Кроме того, материальную модель можно заменить физической схемой (моделью), отражающей существенные особенности данного процесса.

Таким образом, говоря о моделировании процессов, происходящих в живой и неживой природе, нельзя обойти молчанием вопросы, касающиеся самого понятия подобия различных явлений и, тесно связанные с теорией подобия, вопросы теории размерностей. Цель настоящего параграфа – очертить круг вопросов, в которых возникает потребность применения этих теорий, и, по возможности, дать читателю представление о математических методах, которые здесь используются. Более полное и подробное изложение, описание конкретных приложений, а также ссылки на соответствующую литературу можно найти, например, в классических книгах М.В. Кирпичева [1, 2], Л.И. Седова [3], П. Бриджмена [4], а также в учебных пособиях В.А. Веникова [5] и А.А. Гухмана [6].

Не вдаваясь в исторический экскурс, укажем лишь, что наброски теории подобия встречаются еще у И. Ньютона, но первое серьезное исследование по этой теории было представлено в 1848 г. членом французской академии наук Ж. Бертраном, который впервые указал на основное свойство подобных явлений, сформулировав теорему о существовании инвариантов подобия. Этот год, видимо, можно считать годом рождения теории подобия.

Следует подчеркнуть, что трактовка понятия подобия физических (и технологических) процессов и явлений не однозначна, и связана, как правило, с целями и характером исследования. Мы здесь коснемся двух подходов к понятию подобия процессов и явлений. Более полный и подробный обзор можно найти в указанной выше литературе.

Определение 1 (геометрическое подобие процессов). Явления и процессы, происходящие в геометрически подобных системах (объектах), называются (*геометрически*) *подобными*, если в этих системах (объектах) во всех геометрически сходственных точках отношения соответствующих одноименных величин, характеризующих эти явления и процессы, представляют собой тождественные постоянные. Эти отношения называются *константами подобия*.

Иными словами, пусть, например, в двух геометрически подобных объектах, заданных соответственно в системах координат x, y, z и x', y', z', наблюдается некоторое явление или процесс. Пусть данное явление (процесс) описывается в этих объектах парами одноименных величин

$$(f, f'), (g, g'), \ldots,$$

причем $f(x, y, z, t)$, $f'(x', y', z', t)$, $g(x, y, z, t)$, $g'(x', y', z', t), \ldots$ – значения этих величин в геометрически сходственных точках (x, y, z) и (x', y', z') рассматриваемых объектов соответственно. Тогда данные явления (процессы) мы называем (*геометрически*) *подобными*, если отношения

$$\frac{f(x, y, z, t)}{f'(x', y', z', t)} = c_f \equiv const, \; \frac{g(x, y, z, t)}{g'(x', y', z', t)} = c_g \equiv const, \ldots, \qquad (1)$$

причем постоянные величины $c_f, c_g, \ldots$(*константы подобия*) могут, вообще говоря, различаться между собой.[1]

Таким образом, при этом подходе подобные явления (процессы) характеризуются наборами соответствующих констант подобия. Этот факт и определяет, в частности, большую практическую значимость теории подобия.[2] Предположим, что нам надо спроектировать самолет, океанский лайнер или небоскреб. Ясно, что одних теоретических расчетов (прочности, устойчивости, управляемости и т. п.) будет недостаточно, ибо никакая теория не может учесть всех факторов, воздействующих на объект при его реальной эксплуатации. Требуется эксперимент. Но ставить эксперимент «в натуральную величину» для упомянутых объектов практически невозможно как с технической, так и с экономической точки зрения. Поэтому эксперименты ставятся с моделями реальных объектов в существенно уменьшенном масштабе, например, в аэродинамической трубе, бассейне и т. п. Но при этом возникает естественный вопрос: ка-

---

[1] Следует различать геометрическое подобие *объектов* (например, модели и натурного изделия) и геометрическое подобие *процессов* (*явлений*), к которому и относится приведенное определение.
[2] Заметим, кстати, что теорию подобия, видимо сам того не подозревая, замечательно использовал Даниэль Дэфо в своих «Путешествиях Гулливера».

ковы должны быть условия проведения эксперимента (силовая нагрузка на модель, скорость, плотность, температура потока воздуха, вязкость и коэффициент сопротивления жидкости, прочность корпуса модели и т. п.), чтобы полученные в эксперименте данные можно было, в той или иной форме, использовать для «натурных» объектов в реальных условиях. Вот здесь-то и выступает на сцену теория подобия.

Прежде всего, модели должны быть геометрически подобными соответствующим реальным объектам. Далее, *если нам известны константы подобия* тех явлений (процессов), которые подлежат анализу, то полученные в эксперименте количественные характеристики изучаемых явлений нетрудно будет пересчитать «на натуру», используя соотношения (1). Мы видим, таким образом, что одной из ключевых задач теории подобия является вывод соотношений, из которых могут быть найдены константы подобия для исследуемых процессов. Понятно также, что в основу такого вывода должны быть положены уравнения, описывающие соответствующие физические явления и процессы в различных средах (уравнения механики, электродинамики, распространения тепла и т. п.). Не менее важным вопросом является также вопрос принципиального *существования* констант подобия для тех или иных классов задач. К сожалению, определить константы подобия (и даже доказать их существование) удается далеко не всегда.

Другой подход к понятию подобия явлений и процессов основан на следующих соображениях. Всякий реальный процесс, происходящий в природе или технической конструкции может быть представлен своей математической моделью[1], представляющей собой уравнение или систему уравнений (конечных, дифференциальных, интегральных и т.п.), содержащих в качестве неизвестных величин функции, описывающие основные количественные характеристики исследуемого процесса или явления. При этом, – и это крайне важно, – *вид* уравнений и соответствующих им начальных и граничных условий, если они описывают одни и те же явления (т. е. опираются на одни и те же законы физики), будет одинаков независимо от масштабов изучаемых явлений. Поскольку переменные, входящие в уравнения (как известные, так и подлежащие отысканию), в большинстве своем представляют собой размерные величины в соответствии с выбранной системой единиц измерения (СИ, СГС и т. п.), то с масштабами изучаемого процесса (например, движение океанского лайнера в реальной обстановке или его модели в бассейне) будут связаны лишь порядки этих величин (размеры, масса, скорость, сила сопротивле-

---

[1] В некотором смысле, это утверждение можно рассматривать как аксиому, поскольку те процессы, для которых такое представление пока не найдено, следует, как нам представляется, отнести к малоизученным и недоступным для полноценного анализа.

ния среды и т. п.) в соответствующей системе единиц измерения. Если теперь в любой из рассматриваемых координатных систем (натурной или лабораторной) привести уравнения, описывающие исследуемый процесс, к безразмерной форме, выбрав соответствующие и согласованные (сходственные) характерные величины, полученные безразмерные уравнения будут в обеих координатных системах иметь совершенно одинаковый вид. Сказанное дает основание для следующего определения подобия явлений или процессов, происходящих в различных геометрически подобных системах.

Определение 2. Если некоторые явления или процессы в геометрически подобных системах описываются одинаковыми системами безразмерных уравнений с имеющими одинаковый вид начальными и граничными условиями на (геометрически) сходственных границах, то такие явления или процессы называются *подобными* между собой.

Прежде, чем говорить о практической ценности такого определения, напомним некоторые понятия и результаты теории размерности физических величин.[1] Всякая физическая величина имеет размерность, определяемую физической сущностью этой величины. Среди этих величин выделяют основные, которые являются, по своему существу, независимыми (например, «длина, масса, время» или «длина, сила, время»). Эти основные величины определяют *основные* (*независимые*) *размерности*. Остальные физические величины имеют «составные», или *зависимые* размерности, т. е. эти размерности можно выразить через основные. Например, если в качестве основных размерностей выбраны «длина [L], масса [M], время [T]», то размерность ускорения будет $[A]=\left[\frac{L}{T^2}\right]$, скорости – $[V]=\left[\frac{L}{T}\right]$, силы – $[F]=\left[\frac{ML}{T^2}\right]$. Следует заметить, что выбор основных размерностей имеет некоторый произвол, не нарушающий сути дела. Например, в качестве «основных» могут быть выбраны размерности «длина [L], сила [F], время [T]». Тогда размерность массы станет зависимой: $[M]=\left[\frac{F}{A}\right]=\left[\frac{FT^2}{L}\right]$. Важно лишь, чтобы в конкретном исследовании с самого начала были выбраны и зафиксированы (на время этого исследования) величины, размерности которых следует считать основными. Как правило, выбор того или иного комплекса основных размерностей связан с характером этого исследования и его физической сущностью.

[1] Не следует путать понятия «размерность физической величины» и «единица измерения физической величины»: это совершенно разные по своей сути понятия.

Одним из краеугольных камней теории размерности является предположение о том, что в каждой задаче существует такой конечный набор *независимых* размерностей, который позволяет представить размерность любой физической величины, встречающейся в этой задаче, в виде степенно́й (не обязательно с целыми показателями) комбинации основных размерностей.

Скажем теперь несколько слов о приведении «размерных» уравнений, описывающих физические процессы, к «безразмерному» виду. Далее, через x_j будем обозначать независимые переменные (обычно, это пространственные координаты и время), а через y_i – искомые величины. Как правило, $y_i = y_i(x_1, x_2, ...)$. Такую зависимость мы далее будем для краткости обозначать $y_i(x_j)$. Большинство уравнений, описывающих физические или технологические процессы, представляют собой дифференциальные уравнения, имеющие вид полиномиальных соотношений, содержащих известные x_j и неизвестные величины y_i, их производные $\dfrac{\partial^k y_i}{\partial x^{q_1} \partial x^{q_2} ... \partial x^{q_k}}$ (как правило, $k = 1, 2$) и некоторые постоянные, вообще говоря, размерные коэффициенты. Для приведения таких уравнений к безразмерному виду нужно, прежде всего, выбрать «характерное» значение для каждой переменной, входящей в уравнение. Это характерное значение должно представлять собой постоянную величину, имеющую ту же размерность, что и соответствующая переменная. Выбор таких характерных постоянных, вообще говоря, произволен, но, как правило, связан с физическим смыслом соответствующей переменной и условиями протекания исследуемого процесса. Например, характерным значением скорости (в обычных условиях) принимается скорость звука; в задачах электродинамики или релятивистской механики за характерное значение скорости разумно принять скорость света в вакууме. При исследовании динамики самолета за характерный размер пространственной координаты обычно принимается размах крыльев; при изучении движения жидкости по трубам – средний диаметр трубы и т. п. Обозначим через x_j^0, y_i^0 соответствующие (размерные) характерные величины и положим $x_j = x_j^0 \alpha_j, y_i = y_i^0 \beta_i$, где α_j, β_i – новые, уже безразмерные переменные. Произведения $x_j^k y_i^n$ примут вид $x_j^k y_i^n = (x_j^{(0)})^k (y_i^{(0)})^n \alpha_j^k \beta_i^n$, где произведение $\alpha_j^k \beta_i^n$ – уже безразмерно; производные, например $\dfrac{\partial^2 y_i}{\partial x_1 \partial x_2}$, приобретут вид $\dfrac{\partial^2 y_i}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{y_i^{(0)}}{x_1^{(0)} x_2^{(0)}} \dfrac{\partial^2 \beta_i}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}$ и т. п. Выражение $\dfrac{\partial^2 \beta_i}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}$ здесь будет также уже безразмерным. Таким образом, все размерные величины будут сосредоточены в постоянных множителях в каждом из слагаемых, составляющих исходные уравнения. Поскольку физический смысл имеют только суммы, в которых все слагаемые имеют одинаковую размерность, то, следовательно, все упомянутые коэффициенты в слагаемых, составляющих исходные уравнения, будут иметь одинаковую размерность (в каждом уравнении – вообще говоря, свою). Например, уравнение неразрывности для сплошной среды

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} + \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = 0 \qquad (2)$$

после введения безразмерных переменных

$\rho = \rho^{(0)}\gamma, u_i = u^{(0)}\beta_i, x_j = x^{(0)}\alpha_j, t = t^{(0)}\tau$,

где $u^{(0)}$ – характерная скорость для данной задачи, $t^{(0)}$ – характерный для конкретных условий промежуток времени, а $x^{(0)}$ – характерный линейный размер, примет вид:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} + \frac{u^{(0)}t^{(0)}}{x^{(0)}} \left(\beta_1 \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_2} + \beta_3 \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \beta_3}{\partial \alpha_3} \right) = 0\,. \qquad (3)$$

Ясно, что это уравнение уже безразмерно. Предположим, что в двух системах координат (натурной – верхний индекс «0» и лабораторной – верхний индекс «1») соответствующие коэффициенты $K_0 = \frac{u^{(0)}t^{(0)}}{x^{(0)}}$ и $K_1 = \frac{u^{(1)}t^{(1)}}{x^{(1)}}$ одинаковы: $K_0 = K_1$ (т. е. соответствующие уравнения (3) тождественно совпадают). Тогда измерения (данные эксперимента), касающиеся величин, входящих в уравнение (2), в лабораторной системе легко пересчитываются на другую (натурную) систему. Нужно просто умножить результат лабораторного измерения на коэффициент, равный отношению соответствующих характерных величин: $u_j^{nat} = \frac{u^{(1)}}{u^{(0)}} u_j^{lab}$ и т. д.

Определение 3. Безразмерные коэффициенты, появляющиеся при приведении уравнений, описывающих некоторый процесс, к безразмерному виду, носят название «*критериев подобия*».

Мы видим, таким образом, что если два процесса подобны (в смысле определения 2), то они имеют соответственно равные критерии подобия, и можно, зная результаты экспериментальных измерений характеристик одного процесса, вычислить аналогичные характеристики другого.

Приведем еще один, весьма важный пример. Известно, что движение вязкой несжимаемой однородной жидкости описывается следующей системой уравнений Навье-Стокса [7]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u} . \qquad (4)$$

Здесь $\vec{g}$ – вектор ускорения массовых сил, ρ – плотность жидкости, p – давление, ν – кинематическая вязкость жидкости, $\vec{\nabla}$ – оператор градиента и Δ – оператор Лапласа. Плотность и вязкость жидкости мы считаем постоянными величинами.

Это система квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка, решение которой представляет весьма трудную, как с теоретической, так и с практической точки зрения, задачу. Аналитическое решение в полном объеме до сих пор не получено, а численное – весьма трудоемко. Поэтому роль эксперимента при изучении движения вязкой жидкости становится особо значимой. Следовательно, в этих задачах существенно повышается роль «качественных» методов, в частности, методов теории подобия.

Приведем уравнений (4) к безразмерному виду, выбрав, как и выше, соответствующие характерные значения промежутка времени $t^{(0)}$, линейного размера $x^{(0)}$, скорости $u^{(0)}$, ускорения массовых сил $g^{(0)}$: $\vec{g} = g^{(0)}\vec{\varphi}$ и давления $p^{(0)}$: $p = p^{(0)}\pi$. Плотность жидкости ρ, в силу предположения о ее несжимаемости и однородности, а также кинематическую вязкость ν считаем постоянными величинами. В случае стационарной задачи первое слагаемое в левой части уравнения (4) пропадает, и величина $t^{(0)}$ нам не понадобится. Соответствующее преобразование уравнения (4) дает:

$$\frac{u^{(0)}}{t^{(0)}}\frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \tau} + \frac{(u^{(0)})^2}{x^{(0)}}\left(\beta_1 \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \alpha_2} + \beta_3 \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \alpha_3}\right) = g^{(0)}\vec{\varphi} - \frac{p^{(0)}}{\rho x^{(0)}}\vec{\nabla}\pi + \nu \frac{u^{(0)}}{(x^{(0)})^2}\Delta\vec{\beta} .$$

Умножая обе части этого уравнения на величину $\frac{x^{(0)}}{(u^{(0)})^2}$, получим безразмерное уравнение Навье-Стокса:

$$\frac{1}{\mathrm{S}}\frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \tau} + \left(\beta_1 \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \alpha_2} + \beta_3 \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \alpha_3}\right) = \frac{1}{\mathrm{Fr}}\vec{\varphi} - \frac{p^{(0)}}{\rho (u^{(0)})^2}\vec{\nabla}\pi + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\vec{\beta} ,$$

где обозначено:

$$\mathrm{S}=\frac{t^{(0)}u^{(0)}}{x^{(0)}};\quad \mathrm{Fr}=\frac{(u^{(0)})^2}{g^{(0)}x^{(0)}};\quad \mathrm{Re}=\frac{u^{(0)}x^{(0)}}{\nu}. \qquad (5)$$

Число S называется *числом Струхаля*, Fr – *числом Фруда* и Re – *числом Рейнольдса*.

Обычно принимают $\frac{p^{(0)}}{\rho(u^{(0)})^2}=1$, что довольно естественно, поскольку, как известно из кинетической теории газов, давление пропорционально усредненной суммарной кинетической энергии молекул в единице объема.

Окончательно, безразмерное уравнение Навье-Стокса, описывающее движение несжимаемой однородной вязкой жидкости во всех геометрически подобных системах, принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\mathrm{S}}\frac{\partial\vec{\beta}}{\partial\tau}+\left(\beta_1\frac{\partial\vec{\beta}}{\partial\alpha_1}+\beta_2\frac{\partial\vec{\beta}}{\partial\alpha_2}+\beta_3\frac{\partial\vec{\beta}}{\partial\alpha_3}\right)=\frac{1}{\mathrm{Fr}}\vec{\varphi}-\vec{\nabla}\pi+\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\vec{\beta}. \qquad (6)$$

Следовательно, *критериями подобия* для процесса движения несжимаемой однородной вязкой жидкости будут числа $\mathrm{S}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Re}$. В стационарном случае первое слагаемое в левой части уравнения (6) будет отсутствовать, и критериев подобия останется два: Fr и Re. В стационарном случае в отсутствие массовых сил остается один критерий подобия Re.

В таблице 1 приведены основные критерии гидродинамического подобия, которые будут равны для сходственных точек натуры и модели, если последние подобны.

Таблица 1

Основные критерии гидродинамического подобия

<table>
<tr><th>Критерий</th><th>Формула</th><th>Характеристика критериев</th><th>Единицы измерения входящих в критерии подобия величин</th></tr>
<tr><td>Кинематический (критерий Рейнольдса)</td><td>$\mathrm{Re} = vl/\nu = vl\rho/\mu$</td><td>Характеризует меру соотношения сил инерции и сил трения</td><td rowspan="4">v – скорость, м/с;
l – определяющий размер, м;
ρ – плотность, кг/м^3;
μ – динамическая вязкость, Па-с;
ν – кинематическая вязкость, м^2/с;
g – ускорение свободного падения, м/с^2;
p – давление, Па;
τ – время, с.</td></tr>
<tr><td>Гравитационный (критерий Фруда)</td><td>$\mathrm{Fr} = v^2/gl$</td><td>Характеризует меру соотношения сил инерции и сил тяжести</td></tr>
<tr><td>Гидравлического сопротивления (критерий Эйлера)</td><td>$\mathrm{Eu} = \Delta\mathrm{p}/\rho v^2$</td><td>Характеризует меру соотношения сил гидростатического давления и сил инерции</td></tr>
<tr><td>Гомохронности (критерий Струхаля)</td><td>$\mathrm{S} = v\tau/l$</td><td>Характеризует неустановившееся движение жидкости</td></tr>
</table>

Вопросы, затронутые в настоящей работе, а также другие, относящиеся к теории подобия и размерности, достаточно полно отражены в указанных ниже книгах. В частности, большое число конкретных примеров использования этой теории в задачах механики, тепло- и электроэнергетики приведено в [3, 5, 6].

Список литературы

1. Кирпичев М.В., Конаков П.К. Математические основы теории подобия. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949.
2. Кирпичев М.В. Теория подобия. М.: Изд-во АН СССР, 1953.
3. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
4. Бриджмен П. Анализ размерностей. Ижевск: Изд-во РХД, 2001.
5. Веников В.А. Теория подобия и моделирования. М.: Высшая школа, 1976.
6. Гухман А.А. Введение в теорию подобия. М.: Высшая школа, 1973.
7. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.

УДК 517.977.5
doi:10.18720/SPBPU/2/id20-160

Бойко Алина Владимировна[1],
аспирант;
Фирсов Андрей Николаевич[2],
д-р техн. наук, профессор СПбПУ

НАХОЖДЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ ДЛЯ ОДНОЙ АКТУАРНОЙ ЗАДАЧИ

[1,2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия,
[1] alina.boyko@mail.ru, [2] anfirs@yandex.ru

Аннотация. В данной статье рассматривается подход к решению линейных теоретико-игровых моделей на примере процесса взаимодействия страховых компаний по линии бизнеса ОСАГО. В качестве принципа оптимальности в игре используется локальное равновесие по Нэшу, для определения которого задача сводится к задаче линейного программирования, оптимальный план для которой находится с помощью адаптивного метода Р. Габасова. Рассмотренный алгоритм реализован в среде MATLAB, для численной реализации использованы статистические данные.

Ключевые слова: оптимальное управление, адаптивный метод, метод Р. Габасова, равновесие по Нэшу, актуарная математика, численные методы, теория игр.