УДК 519.68+681.518.3
doi:10.18720/SPBPU/2/id20-172

Семенов Константин Константинович,
канд. техн. наук, доцент СПбПУ

УЧЕТ ПЛОХО ФОРМАЛИЗУЕМОЙ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧЕ ИЗМЕРЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОХОЖДЕНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ ВОЛН НА ВОДЕ ЭЛЕМЕНТАМИ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ ПРИ ИХ ФИЗИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия,
semenov.k.k@iit.icc.spbstu.ru

Аннотация. Данная работа представляет пример учета плохо формализуемой априорной информации исследователя для задачи измерения характеристик прохождения и поглощения регулярных волны на поверхности воды частично проницаемыми элементами гидротехнических сооружений при физическом моделировании их взаимодействия с набегающими на них волнами.

Ключевые слова: учет априорной информации, нечеткие переменные, гидротехнические сооружения, физическое моделирование, коэффициент прохождения, коэффициент отражения.

Konstantin K. Semenov,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor

CONSIDERATION POORLY FORMALIZED A PRIORI INFORMATION IN THE PROBLEM OF MEASURING THE CHARACTERISTICS OF THE TRANSMISSION AND ABSORPTION OF WAVES ON THE WATER BY ELEMENTS OF HYDRAULIC STRUCTURES DURING THEIR PHYSICAL MODELING

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St.Petersburg, Russia,
semenov.k.k@iit.icc.spbstu.ru

Abstract. This paper presents an example of taking into account the poorly formalized a priori information of a researcher for the problem of measuring the characteristics of pass and reflection of regular waves on a water surface from the partially permeable elements of hydraulic structures during the physical modeling of their interaction with running waves.

Keywords: a priori information accounting, fuzzy variables, hydraulic structures, physical modeling, passing coefficient, reflection coefficient.

Введение

Во многих практических задачах метрологии возникает необходимость в учете плохо формализуемой информации для получения приемлемой оценки качества получаемых результатов измерений. Данная задача является естественной областью применения теории нечетких переменных.

Предположим, что проводится следующий эксперимент. В ограниченном заполненном водой бассейне, форма которого есть прямоугольный параллелепипед с длиной, значительно превышающей ширину, установлены волнопродуктор и в отдалении от него модель оградительного гидротехнического сооружения. Проводится эксперимент по взаимодействию периодических волн на поверхности жидкости с моделью, определение последствий этого взаимодействия и его характеристик. За моделью установлен волногаситель, не дающий волне отразиться от дальней стенки бассейна и тем самым исказить волновую картину. Условия и вид описываемого опыта представлены на рисунке 1.

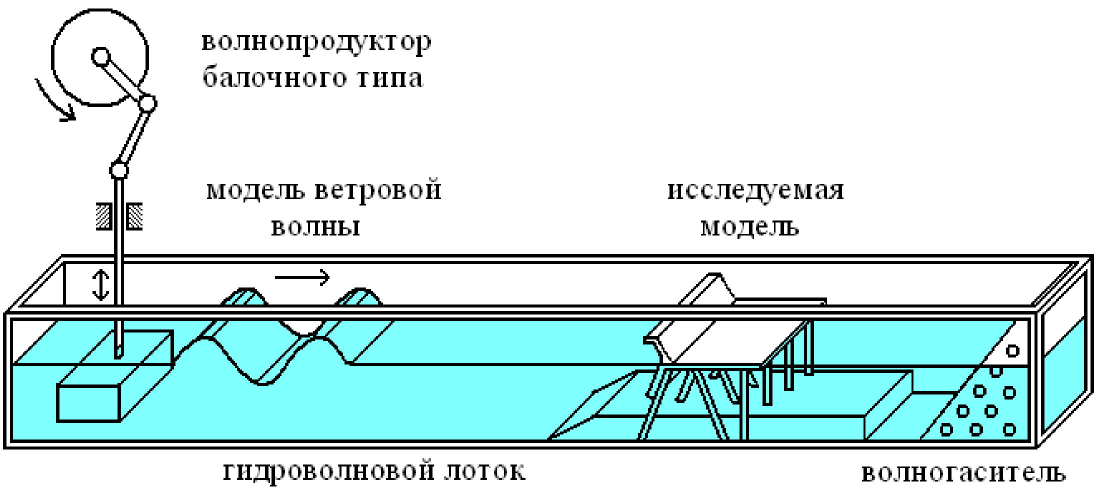

Рис. 1. Схема эксперимента по взаимодействию волн на поверхности жидкости с моделью оградительного сооружения.

Исследуемое гидротехническое сооружение призвано обеспечить параметры волнения в защищаемой им акватории, не превышающие заданные. Одной из важных характеристик взаимодействия сооружения с волнами являются коэффициенты отражения $c_{\text{отр}}$ и прохождения $c_{\text{пр}}$ волны. Данные величины описывают, какая часть периодической волны отразится от сооружения, а какая пройдёт в защищаемую акваторию.

Коэффициент прохождения может быть экспериментально оценен непосредственно на основании своего определения. Рисунок 2 иллюстрирует соответствующую измерительную установку. Действительно, пусть $h_{\text{исх}}$ – размах подходящей к исследуемому сооружению волны непосредственно до начала взаимодействия с ним, $h_{пр}$ – размах волны, прошедшей в защищаемую акваторию. Тогда

$$c_{пр} = \frac{h_{пр}}{h_{исх}}.$$

Величины $h_{исх}$ и $h_{пр}$ могут быть измерены напрямую. Размах исходной волны может быть, например, опытно определен измерениями подходящих к конструкции волн до начала их взаимодействия с ней или из дополнительного эксперимента в бассейне в отсутствие модели.

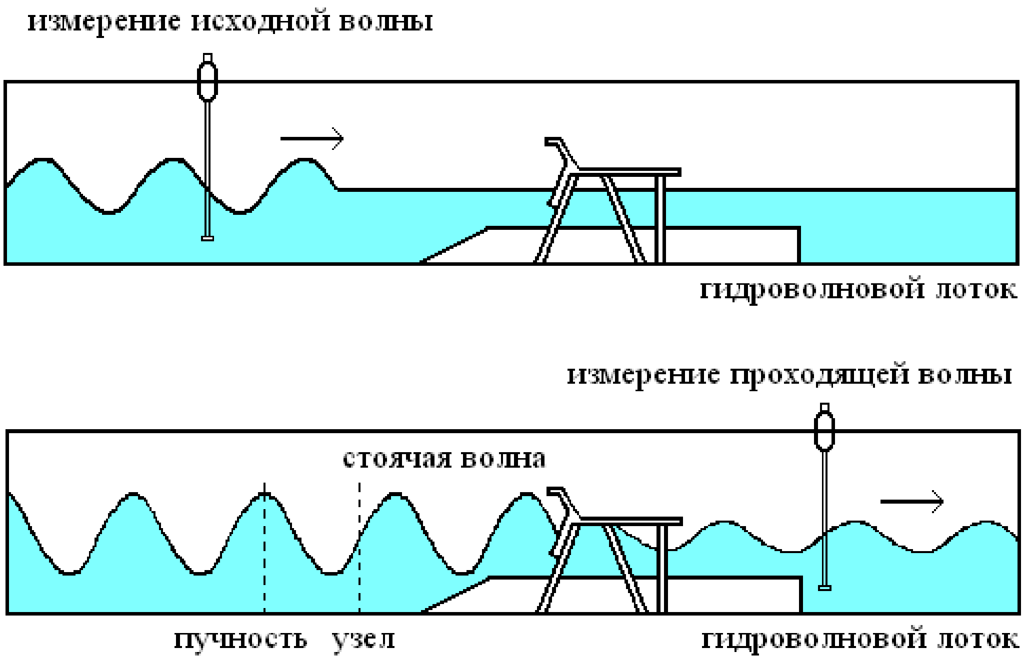

Рис. 2. К определению коэффициента прохождения через оградительное сооружение

Коэффициент же отражения непосредственно определен быть не может. Данный параметр вводится как отношение

$$c_{отр} = \frac{h_{отр}}{h_{исх}}$$

размаха отраженной $h_{отр}$ волны к размаху $h_{исх}$ исходной волны. Величина $h_{отр}$ непосредственно измерена быть не может, поскольку отраженная волна в акватории перед сооружением накладывается на волну, подходящую к сооружению. Действительно, через некоторое время после того, как первая созданная в опыте волна ударится о модель, в акватории перед сооружением образуется интерференционная волна, которая может носить характер стоячей волны (рис. 3). В соответствии с теорией стоячих волн её можно охарактеризовать точками пучностей и узлов, то есть такими геометрическими координатами, размах колебаний $h_{пуч}$ и $h_{узл}$ в которых во времени соответственно максимален и минимален. Тогда коэффициент отражения может быть косвенно оценен по формуле

$$c_{\text{отр}} = \frac{h_{\text{пуч}} - h_{\text{узл}}}{h_{\text{пуч}} + h_{\text{узл}}}.$$

Действительно, полагая исходную волну синусоидальной и отражение волны от модели сооружения мгновенным, получаем, что характер колебаний водной поверхности в точках пучности и узла перед сооружением суть

$$\zeta_{\text{пуч}}(t) = \left(A_{\text{исх}} + A_{\text{отр}}\right)\cdot\sin\left(\omega t + \phi_0\right),$$

$$\zeta_{\text{узл}}(t) = \left(A_{\text{отр}} - A_{\text{исх}}\right)\cdot\sin\left(\omega t + \phi_0\right),$$

где $A_{\text{исх}}$ – амплитуда исходной волны, $A_{\text{отр}}$ – амплитуда отраженной волны, ω – круговая частота колебаний, φ_0 – начальный сдвиг фазы колебаний.

Тогда в связи с тем, что размах колебаний в случае синусоидальной волны равен её удвоенной амплитуде, получаем

$$\begin{cases} h_{\text{пуч}} = 2\left(A_{\text{исх}} + A_{\text{отр}}\right) \\ h_{\text{узл}} = 2\left(A_{\text{исх}} - A_{\text{отр}}\right) \end{cases},$$

откуда следует, что $A_{\text{отр}} = \frac{h_{\text{пуч}} - h_{\text{узл}}}{4}$ и $A_{\text{исх}} = \frac{h_{\text{пуч}} + h_{\text{узл}}}{4}$.

Таким образом, $c_{\text{отр}} = \frac{h_{\text{отр}}}{h_{\text{исх}}} = \frac{h_{\text{пуч}} - h_{\text{узл}}}{h_{\text{пуч}} + h_{\text{узл}}}$.

Ситуация однако осложняется тем, что в реальном эксперименте наличествуют переотражение волны от торцевой стенки бассейна, рядом с которой установлен волнопродуктор, и от волногасителя, эффективность гашения которого всегда меньше 100 %. К тому же создаваемые любым волнопродуктором волны имеют профиль, отличный от синусоидального, их период колебаний имеет флюктуации.

Эти обстоятельства указывают на то, что положение пучности и узла образующейся в акватории перед моделью сооружения интерференционной волны не могут быть зафиксированы точно. Приближенный характер их определения не может быть учтен при измерении параметров волнения в фиксированных точках акватории.

Таким образом, определение коэффициента отражения посредством прямого измерения размахов $h_{\text{пуч}}$ и $h_{\text{узл}}$ сопряжено со значительной неопределенностью.

Рис. 3. К определению коэффициента отражения от оградительного сооружения

1. Учет априорной информации исследователя

Пусть в результате многократных повторений эксперимента при помощи уровнемеров с известными метрологическими характеристиками измерены следующие величины: $h^*_{\text{исх}_i}$ и $h^*_{\text{пр}_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где n – число повторений. На основе данных результатов по приведенным выше формулам вычислено среднее значение коэффициента прохождения

$$\overline{c^*_{\text{пр}}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{h^*_{\text{пр}_i}}{h^*_{\text{исх}_i}}.$$

Погрешность данного результата вычислений, унаследованная от неточных исходных данных расчета, может быть оценена тем или иным способом.

Пусть в результате многократных повторений эксперимента при помощи тех же уровнемеров измерены величины $h^*_{\text{пуч}_j}$ и $h^*_{\text{пр}_j}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, где m – число повторов. Тогда аналогично может быть вычислено среднее значение коэффициента отражения

$$\overline{c^*_{\text{отр}}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{h^*_{\text{пуч}_j} - h^*_{\text{узл}_j}}{h^*_{\text{пуч}_j} + h^*_{\text{узл}_j}}.$$

Однако, как отмечалось, само уравнение косвенных измерений для получения оценки $\overline{c^*_{\text{отр}}}$ носит приближенный характер и связанная с этим методическая неопределенность не учтена в результатах.

Для более точного определения коэффициента отражения необходимо привлечь дополнительные сведения, которые не были учтены в первоначальной математической модели эксперимента. Априорная информация экспериментатора может позволить скорректировать методическую неопределенность, связанную с отличием реального эксперимента от его принятой модели.

В теории известно, что в силу закона сохранения энергии должно выполняться соотношение $c^2_{\text{отр}} + c^2_{\text{пр}} = 1$. В реальных условиях это соотношение точно не выдерживается в связи с тем, что в эксперименте всегда присутствуют трение и диссипационные процессы, связанные, например, с взаимодействием волны со стенками бассейна. Следовательно, реальный закон сохранения энергии имеет вид $c_{\text{отр}}^2 + c_{\text{пр}}^2 = 1 - \gamma$, где γ – некоторая поправка, связанная с потерями и прочими особенностями реального эксперимента.

Последние обстоятельства известны экспериментаторам и техническим сотрудникам гидродинамической лаборатории, в которой проводятся описываемые опыты. На основе их экспертных оценок результат измерений может быть скорректирован. Эти сведения могут быть введены в уравнение измерений при помощи методик и приемов, представленных в работе [1]. Соответственно может быть получена функция принадлежности $\mu_\gamma(x)$ для величины поправки γ. Для её построения необходимо выяснить мнение сведущих людей по поводу того, в какой мере выдерживается приближенное соотношение «сумма $c_{\text{отр}}^2 + c_{\text{пр}}^2$ приблизительно меньше или равна единице».

В соответствии с [1] функцию принадлежности $\mu_\gamma(x)$ следует строить в форме

$$\mu_\gamma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \exp\left(-\dfrac{x^2}{2s^2}\right), & x \geq 0 \end{cases},$$

где s есть параметр размытости значения γ, определяемый на основе опроса экспертов.

Теперь можно рассмотреть вопрос о более адекватном уравнении для оценки $\overline{c_{\text{отр}}^*}$. Положим, что результаты вычислений $c_{\text{отр}_j}^* = \dfrac{h_{\text{пуч}_j}^* - h_{\text{узл}_j}^*}{h_{\text{пуч}_j}^* + h_{\text{узл}_j}^*}$ для каждого из многократно повторенных опытов распределены в силу большого количества влияющих факторов нормально по закону $N(c, \sigma^2)$:

$$\phi(c_{\text{отр}}^*, c, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(c_{\text{отр}}^* - c)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где c – математическое ожидание величин $c_{\text{отр}\,j}^*$, а σ – их среднеквадратическое отклонение. В качестве интересующей величины $\overline{c_{\text{отр}}^*}$ уместно выбрать оценку параметра c^*. Традиционным способом получения оценок на основе статистической информации является метод максимального правдоподобия. Оценку величины c^* можно получить, найдя максимум соответствующего функционала правдоподобия:

$$\max_{c^*,\,\sigma^*} L\left(c^*, \sigma^*\right) = \max_{c^*,\,\sigma^*} \prod_{j=1}^{m} \phi\left(c^*_{\text{отр}\, j}, c^*, \sigma^*\right).$$

Как широко известно, максимум данного выражения достигается при $c^* = \dfrac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} c^*_{\text{отр}\, j}$ и $\sigma^* = \sqrt{\dfrac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(c^*_{\text{отр}\, j} - c^*\right)^2}$.

Для того чтобы учесть нечеткую априорную информацию экспериментатора, в данную процедуру оценивания нужно в соответствии с [1] внести изменения в выражение для максимизируемого функционала: теперь необходимо найти такие значения c^* и σ^*, что обеспечивают достижение максимума

$$\max_{c^*,\,\sigma^*} L^*\left(c^*, \sigma^*\right) = \max_{c^*,\,\sigma^*}\left(\mu_\gamma\left(f\left(c^*\right)\right)\prod_{j=1}^{m} \phi\left(c^*_{\text{отр}\, j}, c^*, \sigma^*\right)\right),$$

где $f\left(c^*\right)$ – функция, связывающая величину γ с величиной c^*, то есть по сути осуществляющая преобразование $c^* \to \gamma$. Поскольку выполнено $c^2_{\text{отр}} + c^2_{\text{пр}} \approx 1 - \gamma$, то в рассматриваемом случае функция $f\left(c^*\right)$ есть $f\left(c^*\right) = 1 - c^* - \overline{c^*_{\text{пр}}}$.

Соответственно определим, когда достигается максимум анализируемого функционала $L^*\left(c^*, \sigma^*\right)$. Для этого определим, при каких c^* и σ^* обеспечивается равенство нулю его частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial c^*}\left(\mu_\gamma\left(f\left(c^*\right)\right)\prod_{j=1}^{m} \phi\left(c^*_{\text{отр}\, j}, c^*, \sigma^*\right)\right) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \sigma^*}\left(\mu_\gamma\left(f\left(c^*\right)\right)\prod_{j=1}^{m} \phi\left(c^*_{\text{отр}\, j}, c^*, \sigma^*\right)\right) = 0. \end{cases}$$

Поскольку во втором уравнении сомножитель $\mu_\gamma\left(f\left(c^*\right)\right)$ не зависит от σ^*, то второе уравнение приводит к традиционной оценке

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(c^*_{\text{отр}\, j} - c^*\right)^2}.$$

Так как

$$\mu_\gamma\left(f\left(c^*\right)\right)\prod_{j=1}^{m} \phi\left(c^*_{\text{отр}\, j}, c^*, \sigma^*\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\left(1 - c^* - \overline{c^*_{\text{пр}}}\right)^2}{2s^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\right)^m}\,\sigma^{*m}} \exp\left(-\sum_{j=1}^{m}\frac{\left(c^*_{\text{отр}_j} - c^*\right)^2}{2\sigma^{*2}}\right),$$

то первое уравнение оказывается эквивалентно следующему соотношению:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{c^*_{\text{отр}_j}-c^*}{\sigma^{*2}}+\frac{1-c^*-\overline{c^*_{\text{пр}}}}{s^2}=0,$$

$$c^*\left(\frac{1-\overline{c^*_{\text{пр}}}}{s^2}+\frac{m}{\sigma^{*2}}\right)=\frac{1}{\sigma^{*2}}\sum_{j=1}^{m}c^*_{\text{отр}_j}+\frac{1-c^*}{s^2},$$

$$\overline{c^*_{\text{отр}}}=c^*=\frac{1}{m+\dfrac{\sigma^{*2}}{s^2}}\left(\sum_{j=1}^{m}c^*_{\text{отр}_j}+\frac{\sigma^{*2}}{s^2}\left(1-\overline{c^*_{\text{пр}}}\right)\right). \tag{1}$$

Полученная оценка при $s\to\infty$ (что равноценно отсутствию каких-либо экспертных сведений вообще) преобразуется к традиционному виду $c^*=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}c^*_{\text{отр}_j}$. При $s\to 0$ (что равноценно абсолютной уверенности в том, что $\overline{c^*_{\text{отр}}}+\overline{c^*_{\text{пр}}}=1$) оценка (1) преобразуется к виду

$$\overline{c^*_{\text{отр}}}=c^*=\frac{1}{m+\dfrac{\sigma^{*2}}{s^2}}\sum_{j=1}^{m}c^*_{\text{отр}_j}+\frac{\sigma^{*2}\left(1-\overline{c^*_{\text{пр}}}\right)}{s^2\,m+\sigma^{*2}}\underset{s\to 0}{\to}1-\overline{c^*_{\text{пр}}}\,.$$

Таким образом, видим, что полученное выражение (1) для $\overline{c^*_{\text{отр}}}$ адекватно отражает априорную нечеткую информацию экспериментатора и действительно позволяет уточнить результат измерений. При этом неопределенность, связанная с ней, сочетается со статистической неопределенностью, связанной с разбросом значений $c^*_{\text{отр}_j}$ результатов многократных измерений.

Заключение

В работе приведён пример использования нечёткой априорной информации экспериментатора для коррекции результатов измерений. Показано, как выполнить учет плохо формализуемой априорной информации в задаче измерений характеристик прохождения и поглощения волн на воде элементами гидротехнических сооружений при их физическом моделировании.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 19-71-00127.

Список литературы

1. Резник Л. К. Системное использование априорной информации экспериментатора в системах на основе измерительно-вычислительных комплексов: дис. канд. техн. наук / Всесоюзный научно-исследовательский институт электроизмерительных приборов. Л.: 1983. 217 с.