

*Медведева Арина Борисовна*<sup>1</sup>,  
студент магистратуры;  
*Кузнецова Лидия Валерьевна*<sup>2</sup>,  
ст. преп. ВШ КФСУ

## АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

<sup>1,2</sup> Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский политехнический  
университет Петра Великого,  
<sup>1</sup> medvedeva\_ab@mail.ru, <sup>2</sup> lida.kuznetsova@gmail.com

*Аннотация.* В настоящей статье описана прямая задача теплопроводности в кольце Фурье и метод её решения, а также разработан алгоритм решения обратной задачи для уравнения теплопроводности кольца, который в настоящее время можно найти лишь тезисно в научных книгах, статьях и др. В соответствии с данным алгоритмом решена обратная коэффициентная задача теплопроводности в кольце при конкретном начальном условии.

*Ключевые слова:* прямая задача, обратная задача, алгоритм, теплопроводность, коэффициент теплопроводности, кольцо Фурье.

*Arina B. Medvedeva*<sup>1</sup>,  
Master's Student;  
*Lidia V. Kuznetsova*<sup>2</sup>,  
Senior Lecturer

## ALGORITHM FOR SOLVING THE INVERSE PROBLEM FOR CALCULATING THE COEFFICIENT OF THERMAL CONDUCTIVITY

<sup>1,2</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,  
St. Petersburg, Russia,  
<sup>1</sup> medvedeva\_ab@mail.ru, <sup>2</sup> lida.kuznetsova@gmail.com

*Abstract.* This article describes the direct problem of thermal conductivity in a Fourier ring and a method for solving it, and also develops an algorithm for solving the inverse problem for the equation of thermal conductivity of the ring, which can currently be found only in scientific books, articles, etc. In accordance with this algorithm, the inverse coefficient problem of thermal conductivity in the ring is solved under a specific initial condition.

*Keywords:* direct problem, inverse problem, algorithm, thermal conductivity, thermal conductivity coefficient, Fourier ring.

## Введение

Обратные задачи — это задачи особенного вида, когда по ряду известных или наблюдаемых результатов необходимо найти источники в виде параметров в известных уравнениях, описывающих упомянутые явления. Одной из первых представленных обратных задач являлось исследование смещения траектории Урана, благодаря чему был обнаружен Нептун [1]. В настоящее время решение обратных задач актуально для множества прикладных и фундаментальных областей: оптика, акустика, обработка сигналов, астрономия, геология, а также таких новых направлений, как машинное обучение, компьютерное зрение, обработка естественного языка и множества других сфер [2–7].

Рассмотрим реальные ситуации, в которых необходимо решение обратной задачи теплопроводности. Так, например, широко распространена задача определения коэффициента теплопроводности в жидкости [8,9]. Кроме того, актуально решение обратных задач теплопроводности и для поиска скрытых объектов [10]. Наконец, применяются задачи данного типа даже для расчёта теплопроводящих свойств объектов, выходящих в космос. Так, в работе [11] представлен метод расчёта воздействия внешних температур на крышку прибора «Димио» межпланетной станции «Марс-96» на этапе ее выведения после сброса головного обтекателя. Наконец, в настоящее время существуют приборы, в которых в качестве межэлементных уплотнителей используются кольцеобразны объекты. В работе [12] рассматриваются прямая и обратная задачи теплопроводности таких колец. Кроме того, в работе [13] рассматривается обратная задача нагрева кольца при вращении. Таким образом, обратные задачи теплопроводности кольца оказываются актуальными для исследования.

## 1. Прямая задача теплопроводности

### 1.1. Уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности — это дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее распределение температуры во времени и пространстве. В одномерном случае [14]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (1.1)$$

где  $u = u(x, t)$  — функция, описывающая распределение температуры,  $x$  — координата,  $t$  — время,  $f(x, t)$  — функция распределения тепловых источников.

Аналитическое решение уравнения теплопроводности может быть получено с помощью метода Фурье. Разделяют задачи бесконечного, по-

лукбесконечного и конечного стержня. Рассматриваемая автором задача относится к случаю конечного стержня.

Уравнение теплопроводности для теплоизолированного от внешней среды стержня, начальные условия и граничные условия по Дирихле задаются следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \\ u(x, t = 0) = \varphi(x), \\ u(x = 0, t) = \mu_1(t), \\ u(x = l, t) = \mu_2(t). \end{cases} \quad (1.2)$$

Решение данной системы найдём с помощью последовательных предположений и упрощений. В данном случае будет изменяться значение функции источников поглощения и выделения тепла, а также краевые условия. Оно принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t \exp\left(-\left[\frac{\pi n a}{l}\right]^2 (t - \tau)\right) \left( \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, \tau) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi \right) d\tau \right] \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

## 1.2. Прямая задача теплопроводности в кольце

Одним из реальных применений задачи о распространении тепла в тонком однородном стержне можно считать задачу о кольце [15]. Стержень конечной длины можно согнуть так, чтобы он принял форму кольца. Пусть такое кольцо имеет радиус  $R$ , тогда исходная длина стержня будет связана с радиусом известным выражением  $L = 2\pi R$ .

Такое кольцо имеет форму замкнутой кривой, поэтому граничные условия на концах в данной задаче видоизменяются, принимая форму периодических функций:

$$u(x, t) = u(x + 2\pi R \cdot n, t), \quad (1.4)$$

где  $n$  принадлежит множеству целых чисел.

Это означает, что принцип решения задачи о кольце таков же, как и принцип решения задачи о стержне — дополнительным оказывается только условие сохранения периодичности решения через каждые  $2\pi R$  значения координаты.

Поставлена следующая прямая задача: найти распределение температуры в тонком однородном кольце радиуса  $2$  с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени температура меняется по закону  $(2\pi - x)$ .

Представим для начала общее решение, а потом — подставим значения нашей задачи для определения настоящего решения.

Запишем систему уравнений, соответствующих данной задаче:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x=0, t) = u(x=L, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x=0, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x=L, t), \\ u(x, t=0) = 2\pi - x. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Для нахождения решения достаточно указать параметр  $a$  и учесть, что радиус кольца связан с длиной окружности кольца известным отношением:  $L = 2\pi R|_{R=2} = 4\pi$ . Как ранее было указано,  $a^2 = \frac{K}{c\rho}$ , где  $K$  — коэффициент теплопроводности,  $c$  — удельная теплоёмкость материала, из которого выполнен стержень,  $\rho$  — плотность стержня. Для значений коэффициентов реальных материалов параметр  $a$  будет достаточно мал, поэтому удобнее принять его равным 0.25. Тогда, собирая все вышеуказанные выражения, получаем окончательное решение уравнения теплопроводности кольца:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n \frac{4}{k} \sin\left(\frac{k}{2}x\right) \exp\left(-\frac{k^2}{64}t\right). \quad (1.6)$$

В начальный момент времени  $u(x, t = 0)$  функция имеет вид, представленный на рисунке 1:

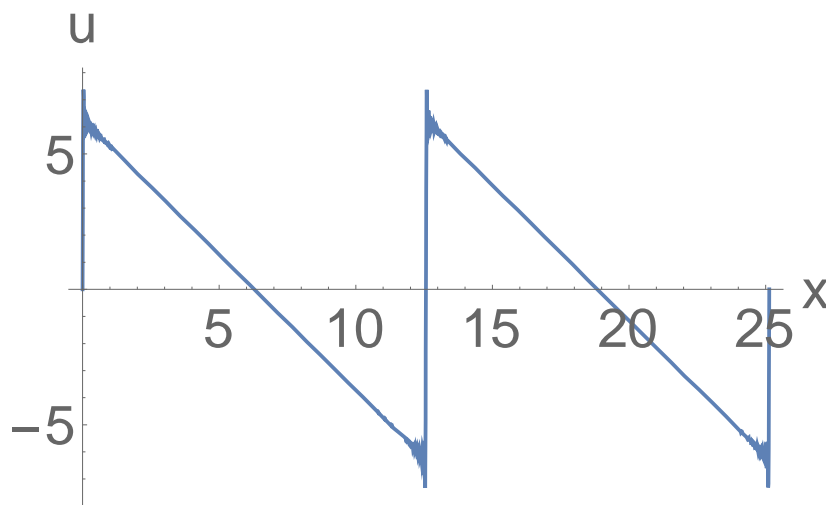


Рис. 1. График зависимости температуры кольца от координаты (1.6) в начальный момент времени  $t = 0$ . Показан промежуток от 0 до  $8\pi$  для того, чтобы показать соблюдение условия периодичности функции

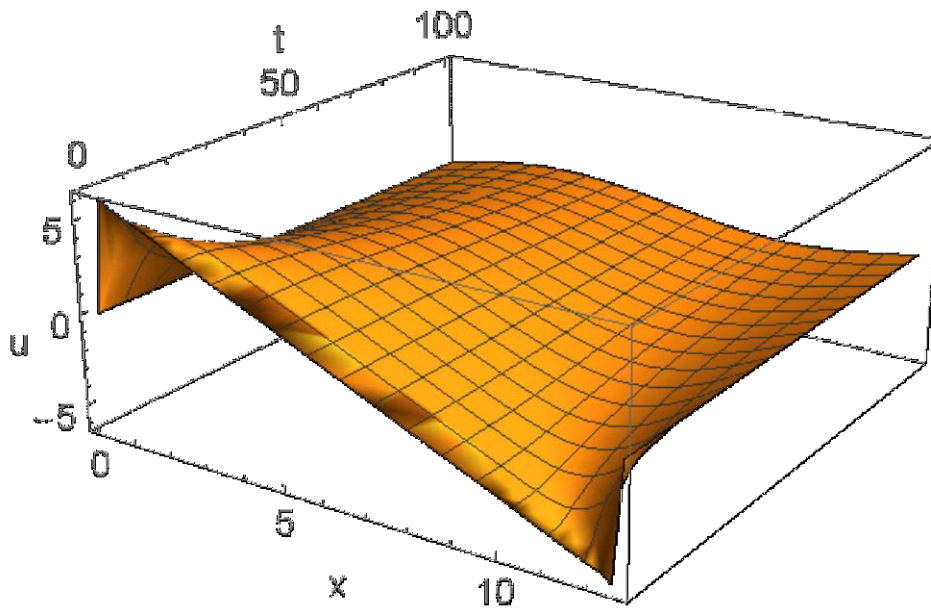


Рис. 2. Зависимость температуры кольца от координаты и времени (1.6)

## 2. Обратная задача уравнения теплопроводности в кольце

Коэффициентная обратная задача — один из подвидов обратных задач, где, кроме необходимости найти решение дифференциального уравнения, также нужно найти коэффициент данного уравнения.

Коэффициентная обратная задача по своим начальным условиям подобна прямой задаче, но для её решения необходимо знать дополнительные начальные условия. Алгоритм решения рассмотрим на основе [16]. Система, которую необходимо решить, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = g(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ u(x=0, t) = u(x=L, t) = 0, \\ u(x, t=0) = \varphi(x), \\ u(x=x_0, t) = q(t), 0 < x_0 < L. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

### 2.1. Алгоритм решения обратной коэффициентной задачи

1. Поиск решения прямой задачи.
2. Экспериментальное измерение функции  $q(t)$  в некоторой точке  $x_0$  на кольце на всём интервале времени.
3. Определение найденного решения в той же координате  $x_0$ , где была измерена функция  $q(t)$ .
4. Составление нелинейного уравнение  $Ak(t) = q(t)$ , где  $A$  — сумма множителей без неизвестного параметра.
5. Выбор необходимого числа слагаемых.
6. Определение искомого коэффициента  $k(t) = a^2$ .
7. Проверка полученных результатов.

## 2.2. Решение обратной коэффициентной задачи для уравнения теплопроводности в кольце Фурье

В поставленной обратной задаче необходимо определить коэффициент  $g(t) = a^2$ . В прямой задаче мы его задавали постоянным, принцип же решения данной задачи основан на том, что коэффициент является зависящим от времени. Задачу постоянного коэффициента можно считать частным случаем задачи с коэффициентом, зависящим от времени.

Согласно алгоритму, найдём решение прямой задачи. Оно имеет следующий вид:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \exp\left(-\frac{k^2}{4} \int_0^t g(\tau) d\tau\right) \sin\left(\frac{k}{2} x\right). \quad (2.2)$$

Видно, что в общем виде задача бы решалась достаточно легко — параметр  $a$  равнялся бы 0.25. Однако обратная задача заключается в том, что известны именно значения функции в зависимости от времени на некоторой заданной координате, то есть известна некоторая функция от времени. Выберем, например, координату  $x = \frac{L}{4} = \pi$ .

Тогда на данной координате функция для  $n = 20$  имеет вид:

$$q(t) = -\frac{4}{19} e^{-5.64t} + \frac{4}{17} e^{-4.52t} - \frac{4}{15} e^{-3.52t} + \frac{4}{13} e^{-2.64t} - \frac{4}{11} e^{-1.89t} + \frac{4}{9} e^{-1.27t} - \frac{4}{7} e^{-0.77t} + \frac{4}{5} e^{-0.39t} - \frac{4}{3} e^{-0.14t} + 4e^{-0.016t}. \quad (2.3)$$

Можно построить данную функцию на временном промежутке от 0 до 100 (рис. 3).

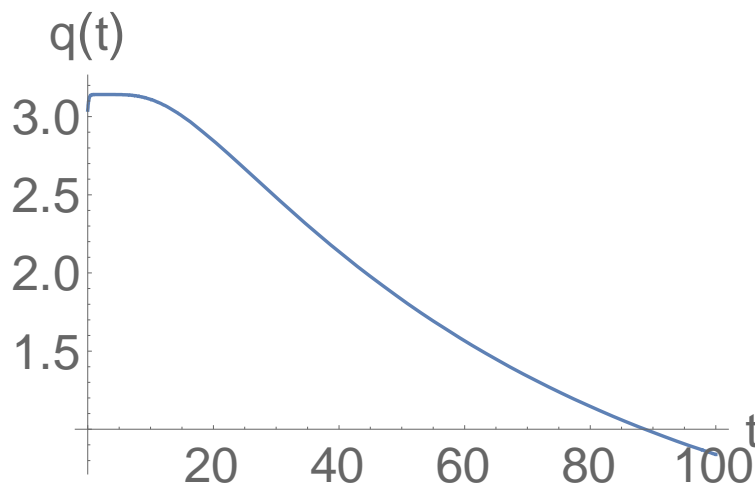


Рис. 3. Зависимость функции  $q(t)$  от времени  $t$

Определим решение в той же координате  $x_0$ , где была измерена функция  $q(t)$ :

$$u(\pi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k} \exp\left(-\frac{k^2}{4} \int_0^t g(\tau) d\tau\right) \sin\left(\frac{k}{2} \pi\right). \quad (2.4)$$

Составим нелинейное уравнение:

$$q(t) = u(\pi, t). \quad (2.5)$$

Выбор числа слагаемых ряда прямого решения в точке  $x_0$ :

$$u(\pi, t) \Big|_{g(t)=a^2} = -\frac{4}{19} e^{-\frac{361a^2t}{4}} + \frac{4}{17} e^{-\frac{289a^2t}{4}} - \frac{4}{15} e^{-\frac{225a^2t}{4}} + \frac{4}{13} e^{-\frac{169a^2t}{4}} - \frac{4}{11} e^{-\frac{121a^2t}{4}} + \\ + \frac{4}{9} e^{-\frac{81a^2t}{4}} - \frac{4}{7} e^{-\frac{49a^2t}{4}} + \frac{4}{5} e^{-\frac{25a^2t}{4}} - \frac{4}{3} e^{-\frac{9a^2t}{4}} + 4e^{-\frac{a^2t}{4}}. \quad (2.6)$$

В данном случае видно, что каждому слагаемому в выражении (2.3) можно сопоставить слагаемое в выражении (2.6), откуда параметр  $a = 0.25$ . В случае, если выражение (2.6) представлено в виде десятичных чисел:

$$q(t) = -0.2e^{-5.64t} + 0.23e^{-4.52t} - 0.26e^{-3.5t} + 0.3e^{-2.64t} - 0.36e^{-1.89t} + \\ + 0.44e^{-1.27t} - 0.57e^{-0.77t} + 0.8e^{-0.4t} - 1.3e^{-0.14t} + 4e^{-0.016t}, \quad (2.7)$$

то решение таким образом найти не удастся. Необходимо применить специальные методы.

Так, например, можно воспользоваться методом перебора: заметим, что коэффициенты в степенях всегда отрицательны и по модулю не превосходят 10; следовательно, параметр  $a$  должен располагаться в пределах от 0 до 1. Если решать методом программного кода, то по результатам выполнения программы получим следующую зависимость, представленную на рисунке 4.

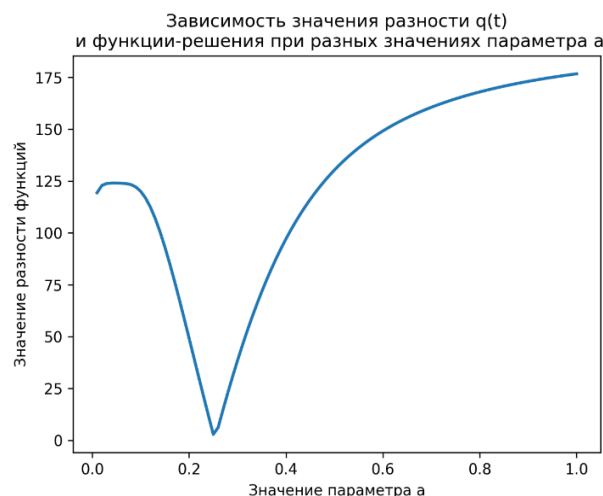


Рис. 4. Зависимость значения ошибки (разности между функцией в выбранной точке и функцией-решением) от значения параметра  $a$

Из представленного рисунка видно, что оптимальное значение параметра  $a$  составляет 0.25, что равно фактическому значению данного параметра (ошибка минимальна, составила 2.02).

### **Заключение**

В настоящей статье была рассмотрена прямая задача теплопроводности и метод ее решения, а также обратная коэффициентная задача теплопроводности, изучен метод её решения и представлен алгоритм решения задачи данного типа для замкнутого кольца. В ходе выполнения работы обнаружено, что обратные задачи теплопроводности часто возникают в настоящее время во множестве областей: динамика жидкостей, тепловой износ прокладок и креплений, нагрев теплоизолирующих поверхностей и т. д.

### **Список литературы**

1. Smith R.W. The Cambridge network in action: the discovery of Neptune // *Isis*. – Vol. 80, № 3 (Sep., 1989). – Pp. 395–422. – Published online by University of Pennsylvania, Department of History and Science, 2015. – DOI: <https://doi.org/10.1086/355082>.
2. Mohamad-Djafari A. (ed.). *Inverse problems in vision and 3D tomography*. – Wiley, 2013.
3. Pizlo Z. Perception viewed as an inverse problem // *Vision Res.* – Pergamon, 2001. – Vol. 41, № 24. – Pp. 3145–3161.
4. De Vito E. et al. Learning from examples as an inverse problem // *J. Mach. Learn. Res.* – 2005. – Vol. 6. – Pp. 883–904.
5. Dhillon S.S. et al. The 2017 terahertz science and technology roadmap // *J. Phys. D. Appl. Phys.* – IOP Publishing, 2017. – Vol. 50, № 4. – P. 043001.
6. Chivatá Cárdenas I. On the use of Bayesian networks as a meta-modelling approach to analyse uncertainties in slope stability analysis // *Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards*. – Taylor & Francis, 2018. – Vol. 13, № 1. – Pp. 53–65. – DOI: <https://doi.org/10.1080/17499518.2018.1498524>.
7. Kim Y., Nakata N. Geophysical inversion versus machine learning in inverse problems // *Society of Exploration Geophysicists*, 2018. – Vol. 37, № 12. – Pp. 894–901. – DOI: <https://doi.org/10.1190/tle37120894.1>.
8. Vasil'ev V.I., Kardashevskii A.M. Numerical solution of the retrospective inverse problem of heat conduction with the help of the Poisson integral // *J. Appl. Ind. Math.* – Pleiades Publishing, 2018. – Vol. 12, № 3. – Pp. 577–586.
9. Taler J., Duda P. *Solving direct and inverse heat conduction problems*. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. – 889 p. – DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-33471-2>.
10. Громов Ю. Ю. и др. Поиск скрытых объектов на основе решения обратной задачи теплопроводности // *Вестник Воронежского государственного технического университета*. – 2014. – Т. 6. – С. 4–8.
11. Алифанов О.М., Ненарокомов А.В. Трехмерная граничная обратная задача теплопроводности // *Теплофизика высоких температур*. – 1999. – Т. 37, № 2. – С. 209–216.
12. Blasiak S., Pawinska A. Direct and inverse heat transfer in non-contacting face seals // *Int. J. Heat Mass Transf.* – Pergamon, 2015. – Vol. 90. – Pp. 710–718.



13. Huang J.H. et al. An inverse method for estimating heat sources in a high speed spindle // Appl. Therm. Eng. – Pergamon, 2016. – Vol. 105. – Pp. 65–76.
14. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964. –288 с.
15. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964.
16. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 205 с.