

УДК 004.021

doi:10.18720/SPBPU/2/id23-509

Шельгов Сергей Андреевич¹,

студент магистратуры;

Шахвалеев Евгений Евгеньевич²,

студент магистратуры;

Жиленков Антон Александрович³,

заведующий кафедрой, канд. техн. наук, доцент

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ВИЗУАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

^{1,2} Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

¹ shelgov.sa@edu.spbstu.ru, ² shahvaleev.ee@edu.spbstu.ru;

³ Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,
zhilenkovanton@gmail.com

Аннотация. Целью данной работы является исследование сохранения структур дифференциальных уравнений на примере модели Лотки-Вольтерры и маятника при интегрировании различными методами, такими как: явный метод Эйлера; симплектический метод Эйлера; метод Рунге-Кутты. Задачи, которые решались в ходе исследования: 1. Построение моделей Лотки-Вольтерры и маятника. 2. Применение к моделям методов интегрирования. 3. Визуализация решений дифференциальных уравнений. 4. Анализ полученных решений на сохранение структур и сравнение между ними. 5. Программная реализация методов.

Ключевые слова: модель Лотки-Вольтерры, математический маятник, метод Эйлера, метод Рунге-Кутты, фазовый портрет, численный поток, сохранение структур дифференциальных уравнений.

*Sergei A. Shelgov*¹,
Master's Student;
*Evgeny E. Shakhvaleev*²,
Master's Student;
*Anton A. Zhilenkov*³,
Head of Department, Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor

DEVELOPMENT OF SOFTWARE TOOLS FOR VISUAL ASSESSMENT OF THE QUALITY OF NUMERICAL INTEGRATION METHODS

^{1,2} Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg,
Russia, ¹ shelgov.sa@edu.spbstu.ru, ² shakhvaleev.ee@edu.spbstu.ru;

³ St. Petersburg State Marine Technical University, St. Petersburg, Russia,
zhilenkovanton@gmail.com

Abstract. The purpose of this work is to study the preservation of the structures of differential equations by the example of the Lotka-Volterra model and the pendulum when integrated by various methods, such as: explicit Euler method; Euler's symplectic method; the Runge-Kutta method. Tasks that were solved during the study: 1. Construction of Lotka-Volterra and pendulum models. 2. Application of integration methods to models. 3. Visualization of solutions of differential equations. 4. Analysis of the obtained solutions for the preservation of structures and comparison between them. 5. Software implementation of methods.

Keywords: Lotka-Volterra model, mathematical pendulum, Euler method, Runge-Kutta method, phase portrait, numerical flow, structures of differential equations' preservation.

Введение

Работа с моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях. В то же время вычислительные эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам. Неудивительно, что методология математического моделирования бурно развивается, охватывая все новые сферы — от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших экономических и социальных процессов.

1.1 Модель Лотки-Вольтерра

Начнем с уравнения из математической биологии, которое моделирует рост видов животных. Если действительная переменная $u(t)$ должна представлять число особей определенного вида в момент времени t , то

простейшим предположением о его эволюции является $\frac{du}{dt} = u \cdot \alpha$, где α — скорость размножения.

Постоянная α приводит к экспоненциальному росту. В случае совместного проживания большого количества видов темпы размножения также будут зависеть от численности популяции других видов. Например, для двух видов, где $u(t)$ обозначает количество хищников, а $v(t)$ — количество жертв. Правдоподобное предположение сделано с помощью модели Лотки–Вольтерры (рис.1.1)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u(v-2), \\ \dot{v} &= v(1-u), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где точки на u и v обозначают дифференциацию по времени.

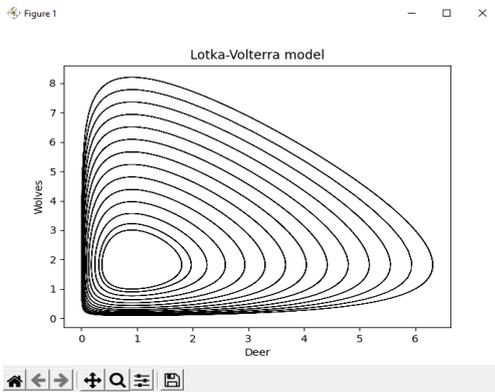


Рис. 1.1. Модель Лотки-Вольтерры

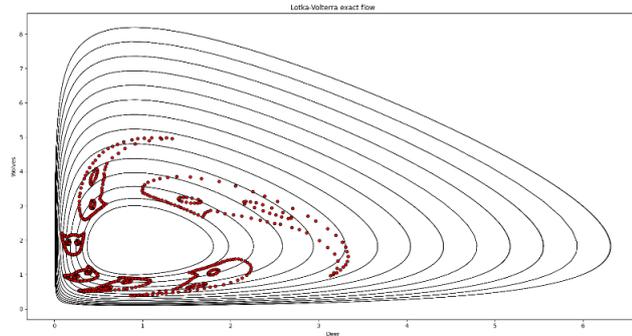


Рис. 1.2. Точный поток

Уравнения (1.1) представляют собой автономную систему дифференциальных уравнений. В общем случае мы запишем такую систему в виде

$$\dot{y} = f(y). \tag{1.2}$$

1.2 Применение явного метода Эйлера

Самый простой из всех численных методов для системы (1.2) является метод, сформулированный Эйлером

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n), \tag{1.3}$$

то есть

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + hu_n(v_n - 2), \\ v_{n+1} &= v_n + hv_n(1 - u_n). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Некоторые итерации численного потока для задачи Лотки–Вольтерры для набора начальных значений $y_0=(u_0, v_0)$ образующих множество в форме кота, представлены на рисунке 1.3.

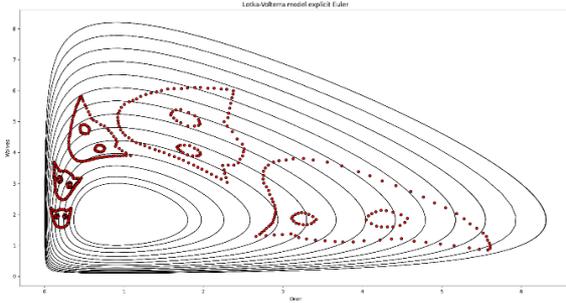


Рис. 1.3. Числовой поток явного метода Эйлера

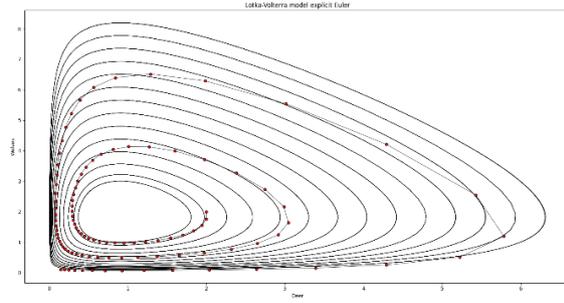


Рис. 1.4. Решение уравнений Лотки-Вольтерра явным методом Эйлера

1.3 Применение симплектического метода Эйлера Для систем

$$\begin{aligned} \dot{u} &= a(u, v), \\ \dot{v} &= b(u, v), \end{aligned} \quad (1.6)$$

таких, как задача (1.1), мы рассматриваем также секционированные методы Эйлера

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + ha(u_n, v_{n+1}), \\ v_{n+1} &= v_n + hb(u_n, v_{n+1}), \end{aligned} \quad (1.7a)$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + ha(u_{n+1}, v_n), \\ v_{n+1} &= v_n + hb(u_{n+1}, v_n), \end{aligned} \quad (1.7b)$$

ТО ЕСТЬ

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + hu_n(v_{n+1} - 2), \\ v_{n+1} &= \frac{v_n}{1 + h(u_n - 1)}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

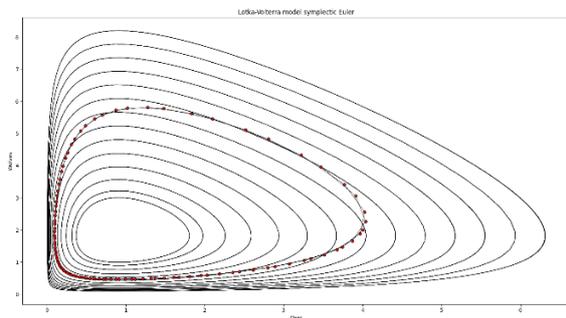


Рис. 1.5. Решение уравнений Лотки-Вольтерра симплектическим методом Эйлера

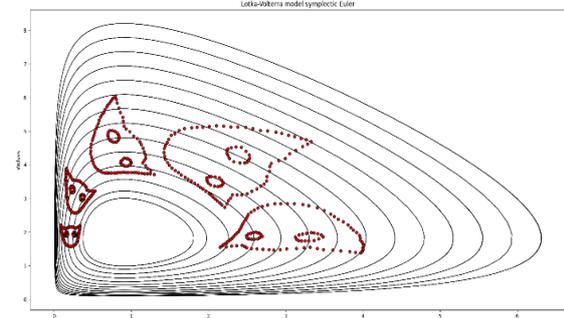


Рис. 1.6. Числовой поток симплектического метода Эйлера

1.4 Применение метода Рунге-Кутты

Метод Рунге-Кутты используют для расчета стандартных моделей достаточно часто, так как при небольшом объеме вычислений он обладает точностью метода $O^4(h)$. Этот классический метод Рунге-Кутты описывается системой следующих соотношений

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

или

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf\left(x_i + h, y_i + \frac{k_3}{2}\right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Решение системы (1.1) методом Рунге-Кутты представлено на рисунке 1.7.

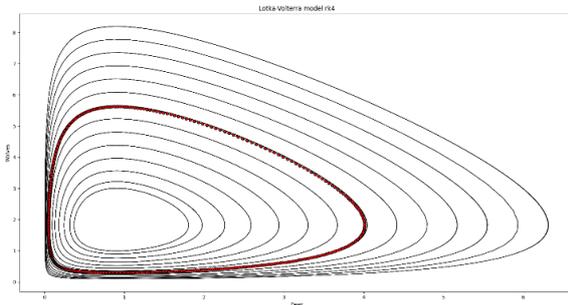


Рис. 1.7. Решение уравнений Лотки-Вольтерра методом Рунге-Кутта

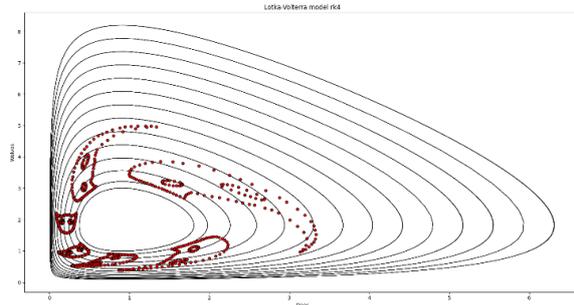


Рис. 1.8. Числовой поток метода Рунге-Кутта

2.1 Моделирование маятника

Математический маятник массой $m = 1$, длиной $l = 1$ и гравитационным ускорением $g = 1$ представляет собой систему с одной степенью свободы

$$H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 - \cos q, \quad (2.2)$$

такое, что уравнения (2.1) становятся

$$\dot{p} = -\sin q, \quad \dot{q} = p. \quad (2.3)$$

Поскольку (2.3) является 2π -периодичным по q , рассматриваем q как переменную на окружности S^1 . Из этого следует, что фазовый портрет точек (p, q) (рис.2.1) становится цилиндром $\mathbb{R} \times S^1$.

Рисунок 2.2 иллюстрирует, что точный поток гамильтоновой системы (2.1) сохраняет площадь. Это можно объяснить следующим образом: производная потока φ_t по отношению к начальным значениям (p, q) ,

$$\varphi_t'(p, q) = \frac{\partial(p(t), q(t))}{\partial(p, q)}, \quad (2.4)$$

удовлетворяет вариационному уравнению

$$\dot{\varphi}_t'(p, q) = \begin{pmatrix} -H_{pq} & -H_{qq} \\ H_{pp} & H_{qp} \end{pmatrix} \varphi_t'(p, q), \quad (2.5)$$

где вторые частные производные от H оцениваются при $\varphi_t(p, q)$. В случае одной степени свободы ($d = 1$) простое вычисление показывает, что

$$\frac{d}{dt} \det \varphi_t'(p, q) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p(t)}{\partial p} \frac{\partial q(t)}{\partial q} - \frac{\partial p(t)}{\partial q} \frac{\partial q(t)}{\partial p} \right) = \dots = 0. \quad (2.6)$$

Поскольку φ_0 является тождеством, это подразумевает, что $\det \varphi_t'(p, q) = 1$ для всех t , что означает, что поток $\varphi_t(p, q)$ является отображением с сохранением площади.

Figure 1

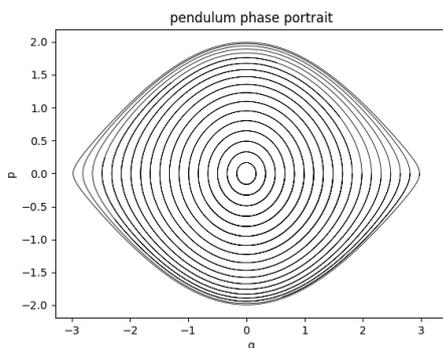


Figure 1

Рис. 2.1. Фазовый портрет маятника

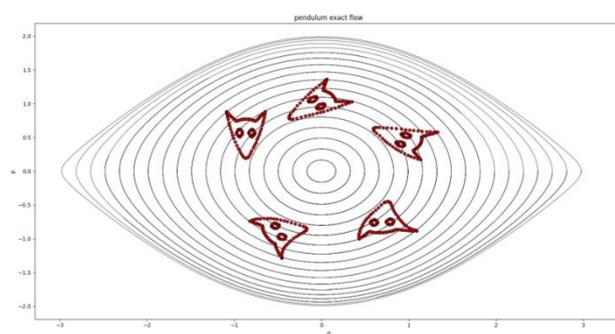


Рис. 2.2. Точный поток

2.2 Применение явного метода Эйлера для маятника

Учитывая положение $q(t)$ и импульс $p(t)$ в момент времени t , мы вычисляем условия для времени $t + h$ с использованием (2.7)

$$\begin{aligned} q(t + h) &= q(t) + hp(t), \\ p(t + h) &= p(t) + hq(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Далее разбиваем время между начальным временем t_0 и конечным временем t_e моделирования на N равных временных шагов. Обозначим время на n -м временном шаге как $t_n = t_0 + nh$ для $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Из этого следует, что

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + hp_n, \\ p_{n+1} &= p_n - h \sin(q_n). \end{aligned} \quad (2.8)$$

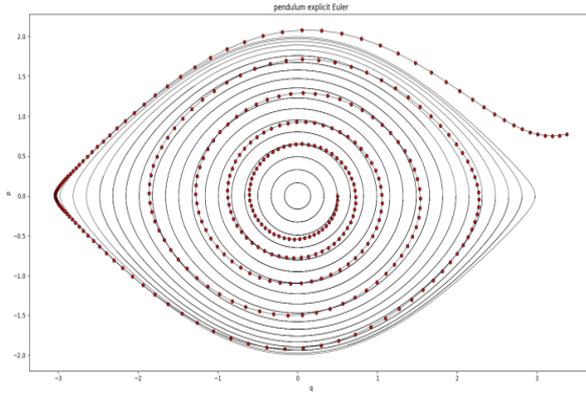


Рис. 2.3. Решение уравнений маятника явным методом Эйлера

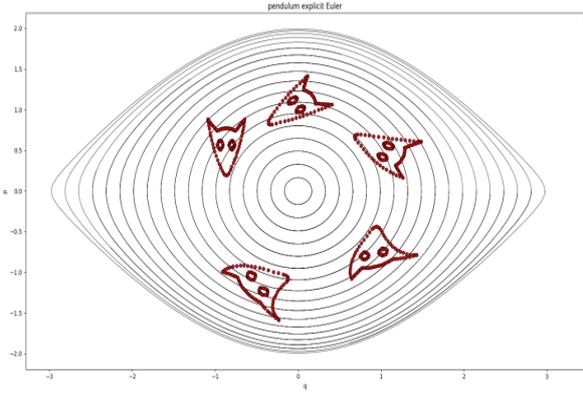


Рис. 2.4. Числовой поток явного метода Эйлера

2.3 Применение симплектического метода Эйлера для маятника

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + hp_n, \\ p_{n+1} &= p_n - h\sin(q_{n+1}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Идея здесь состоит в том, чтобы сначала явно вычислить q_{n+1} , а затем неявно использовать q_{n+1} для вычисления p_{n+1} . Результат вычисления показан на рисунке 2.5.

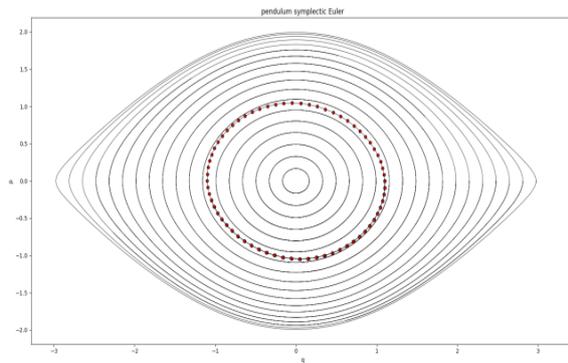


Рис. 2.5. Решение уравнений маятника симплектическим методом Эйлера

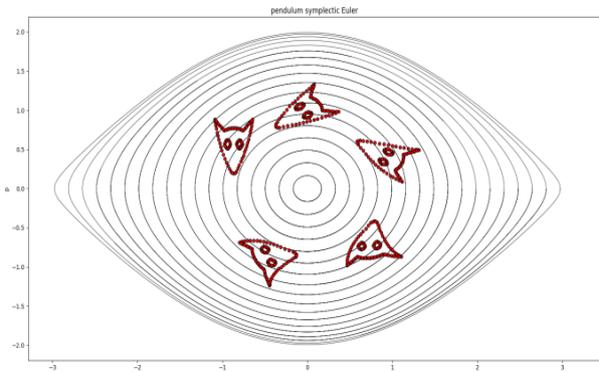


Рис. 2.6. Числовой поток симплектического метода Эйлера

2.4 Применение метода Рунге-Кутты для маятника

Применив формулу (1.9) и (1.10), получаем, что метод Рунге-Кутты показывает правильное поведение, близкое к точному решению, что видно на рисунке 2.7. Также по рисунку 2.8 наблюдаем, что площадь числового потока сохраняется.

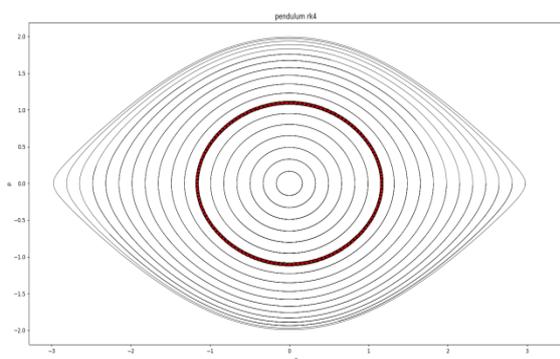


Рис. 2.7. Решение уравнений маятника методом Рунге-Кутты

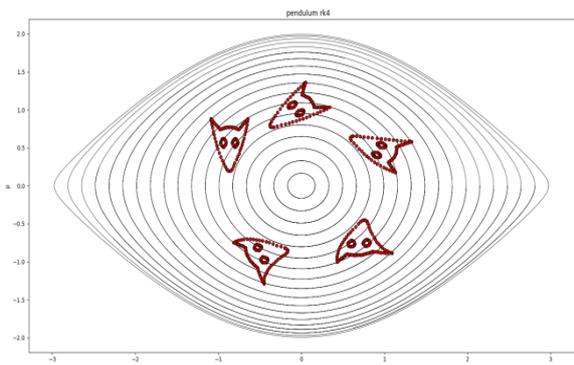


Рис. 2.8. Числовой поток метода Рунге-Кутты

Заключение

В работе было проведено 6 вычислительных экспериментов. При исследовании модели Лотки-Вольтерра получили, что явный метод Эйлера демонстрирует неправильное поведение, то есть структура уравнений была нарушена (численное решение движется по спирали наружу).

Симплектический метод Эйлера дает численное решение, которое лежит на замкнутой кривой, как и точное решение, однако стоит заметить, что кривые численного и точного решения не совпадают.

Метод Рунге-Кутты также показал правильное поведение, решение которого оказалось ближе к точному решению по сравнению с другими методами.

При исследовании маятника получили, что явный метод Эйлера также показывает неправильное поведение и их численное решение движется по спирали либо наружу, либо внутрь. Симплектический метод Эйлера показывает правильное поведение, однако имеется отклонение от точного решения. Метод Рунге-Кутты также показывает правильное поведение, его численное решение лежит близко к точному решению, но с небольшим отклонением.

Список литературы

1. Hening A., Dang N. Persistence in stochastic Lotka–Volterra food chains with intraspecific competition // *Bull. Math. Biol.* – 2018. – Vol. 80, Issue 10. – Pp. 2527–2560. – DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1704.07501>.
2. Wei M., Chang J., Qi L. Existence and stability of positive steady-state solutions for a Lotka–Volterra system with intraspecific competition // *Adv. Differ. Equ.* – 2014. – Vol. 159. – Pp. 1–13. – DOI: <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-159>.
3. Sharma M., Kumar P. Chemical oscillations 2. Mathematical modelling // *Resonance.* – 2006. – Vol. 11(2):61. – Pp. 43–50. – DOI: 10.1007/BF02837274.
4. Hering R.H. Oscillations in Lotka–Volterra systems of chemical reactions // *J. Math. Chem.* – 1990. – Vol. 5. – Pp. 197–202. – DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01166429>.