

П.А. Андриенко¹, Д.П. Козликин², А.В. Хисамов³

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПОСОБОВ СБОРКИ ГРУППЫ ВВВ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ



¹Павел Александрович Андриенко,
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра
Великого
Россия, Санкт-Петербург
Тел.: (812) 297-4845, E-mail: andrienko-p@mail.ru



²Денис Петрович Козликин, к.т.н., доцент
Санкт-Петербургский государственный политехнический
университет
Россия, Санкт-Петербург
Тел. +7 (812) 297-4845, E-mail: kozlikindenis@gmail.com



³Хисамов Андрей Владимирович,
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра
Великого
Россия, Санкт-Петербург
Тел.: (812)297-4845, E-mail: andrey@khis.ru.

Аннотация

В работе рассмотрены вопросы, связанные с математическим выбором способа сборки группы ВВВ в плоских рычажных механизмах. Приводится обоснование выбора знака тригонометрических функций относительного угла в структурной группе. Приведенные рассуждения позволят однозначно выбирать угол между звеньями внутри диады ВВВ.

Ключевые слова: структурный анализ механизмов, геометрический анализ плоских рычажных механизмов, структурная группа Ассура, группа ВВВ.

Введение

При геометрическом расчете плоских рычажных механизмов, действуют по определенному алгоритму, основанному на размыкании графа механизма и приведении его к виду открытой кинематической цепи типа «дерево». Этот алгоритм довольно подробно рассмотрен во многих учебных и научных изданиях, в том числе и СПбПУ [1-22]. Результатом применения этого алгоритма является составление и решение уравнений геометрического анализа механизма (групповых уравнений).

Рассмотрим для примера механизм шарнирного четырехзвенника, схема которого приведена на рис. 1.

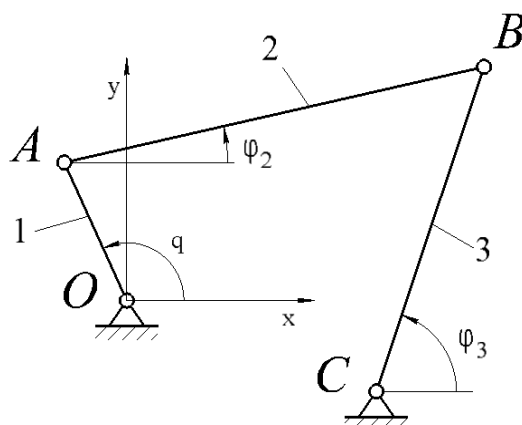


Рис. 1. Схема механизма шарнирного четырехзвенника

Система групповых уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_A + l_2 \cos \varphi_2 = x_C + l_3 \cos \varphi_3; \\ y_A + l_2 \sin \varphi_2 = y_C + l_3 \sin \varphi_3. \end{cases} \quad (1)$$

Размыкание графа произведено в шарнире *B* (рис. 2).

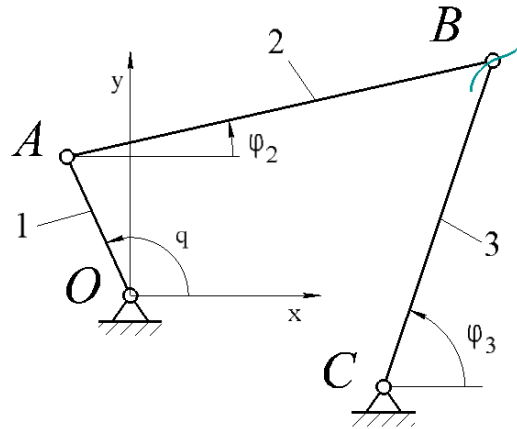


Рис. 2. Схема механизма с размыканием в шарнире B

В уравнениях (1) заданными являются размеры звеньев l_2 и l_3 и координаты точек A и C ; неизвестными являются выходные координаты φ_2 и φ_3 .

Решают систему уравнений (1), как правило, следующим способом: переносят слагаемые, содержащие неизвестные φ_2 и φ_3 в одну сторону, а остальные слагаемые – в другую:

$$\begin{cases} l_2 \cos \varphi_2 - l_3 \cos \varphi_3 = x_C - x_A; \\ l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3 = y_C - y_A. \end{cases} \quad (2)$$

После этого возводят в квадрат и складывают соответствующие части уравнений (2):

$$(l_2 \cos \varphi_2 - l_3 \cos \varphi_3)^2 + (l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3)^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2.$$

В итоге получается выражение, соответствующее теореме косинусов для треугольника ABC (рис. 3).

$$l_2^2 + l_3^2 - 2 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_2) = AC^2. \quad (3)$$

При этом отметим, что $\varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_{23}$.

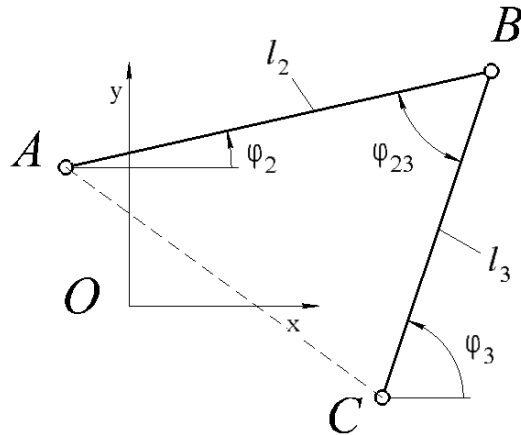


Рис. 3. Треугольник ABC на схеме механизма

Из выражения (3) определяется $\cos \varphi_{23}$:

$$\cos \varphi_{23} = \frac{l_2^2 + l_3^2 - AC^2}{2l_2 l_3}, \quad (4)$$

а затем и $\sin \varphi_{23}$:

$$\sin \varphi_{23} = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{23}} = M \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{23}}; \text{ где } M = \pm 1.$$

Известно, что одному значению входной обобщенной координаты q соответствуют два решения, из которых надо оставить одно, а второе отбросить. Для этого надо выбрать нужный знак синуса угла φ_{23} . Причем сделать это надо всего лишь один раз, и для любого положения механизма этот знак сохраняется.

Два решения можно найти и чисто графически, если провести дугу окружности радиуса AB из центра A до пересечения с дугой CB , проведенной из центра C (рис. 4).

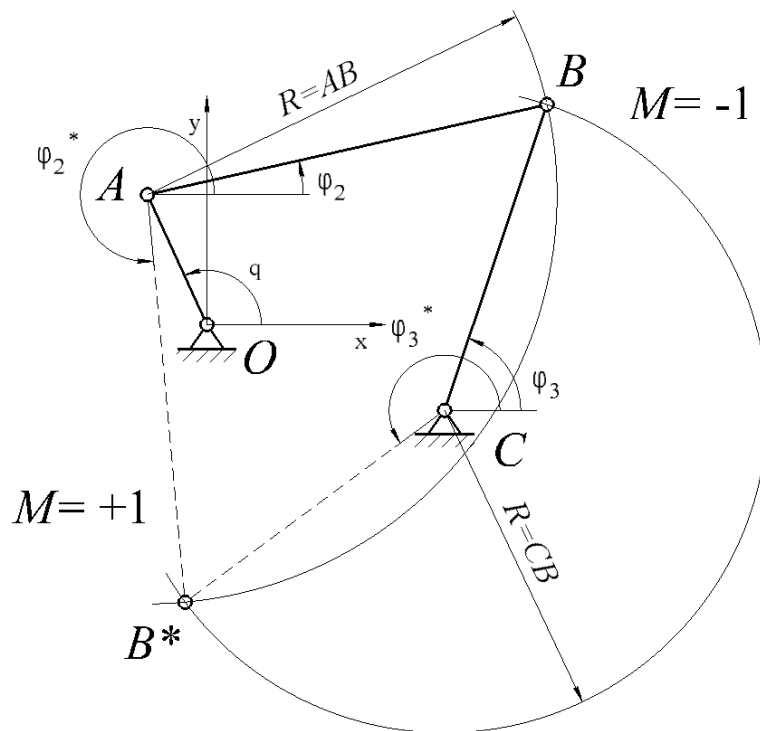


Рис. 4. Два сборки группы ВВВ

Механизм не может перескочить из одной конфигурации в другую. Для того, чтобы это произошло, надо разобрать механизм, переставить звенья и собрать механизм снова. Поэтому такие конфигурации механизма называют *сборками*.

Способ сборки для дальнейшего геометрического исследования назначается следующим образом. Условно было принято, что положение группы типа ВВВ, при котором обход шарниров в последовательности $A \rightarrow B \rightarrow C$ происходит *против часовой стрелки*, соответствует способу сборки $M = +1$ (положение AB^*C на рис. 4); при обходе этих же шарниров *по часовой стрелке* способ сборки $M = -1$ (положение ABC на рис. 4).

Методы

Однако, приведенный выше (и наиболее часто используемый) способ проведения геометрического расчета для подобного механизма с группой ВВВ имеет ряд нюансов. Если использовать его исключительно формально (выбирать знак руководствуясь только направлением обхода «пассивных» шарниров $A \rightarrow B \rightarrow C$), он безусловно дает результат. Но при этом во многом теряется методология использования самого способа геометрического анализа, построенного на размыкании кинематической цепи.

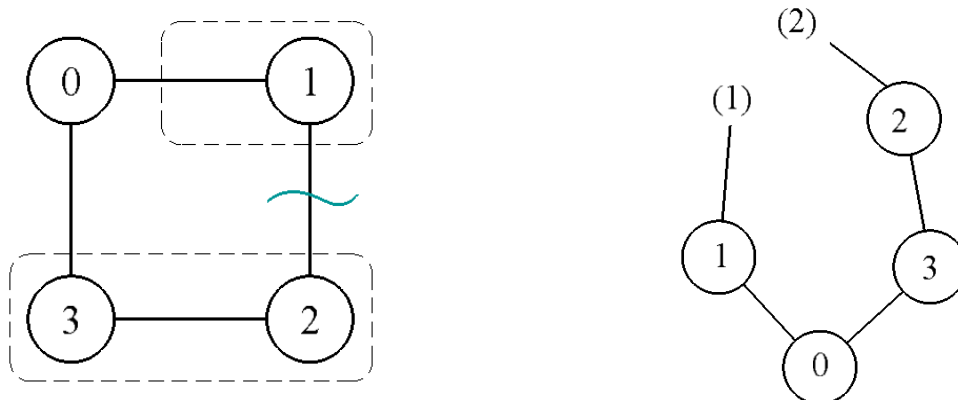
В самом деле, не ясно, имеет ли значение точка разрыва цепи (A или B). Кроме того, из тригонометрии известно, что

$$\cos \alpha = \cos(2\pi - \alpha), \quad (5)$$

а это означает, что даже $\cos \varphi_{23}$ (т.е. фактический угол между звеньями 2 и 3) в выражении (4) мы не можем найти однозначно.

Для получения однозначного описания сборок механизма шарнирного четырехзвенника обратимся к часто используемому при кинематическом анализе методу построения замкнутого векторного контура механизма [5, 6, 13], а также к способу геометрического расчета механизмов промышленных роботов [6, 23, 24].

Итак, изобразим граф механизма шарнирного четырехзвенника и разомкнем его между структурными группами, приведя к открытому виду (рис. 5 а и б).



а) граф механизма шарнирного четырехзвенника

б) разомкнутый граф механизма шарнирного четырехзвенника

Рис. 5. Размыкание графа механизма

Свяжем с каждым подвижным звеном систему координат таким образом, чтобы орт \bar{i} был направлен вдоль звена. Начало координат для каждого звена находится в кинематической паре, контактирующей с предыдущим (по графу) звеном. Это означает, что для звеньев 1 и 3, вращающихся относительно стойки, эти орты должны быть направлены от центров вращения, а для звена 2 – в точке B . Орты \bar{k} для всех звеньев должны быть коллинеарны. В точке O введем неподвижную систему координат (рис. 6).

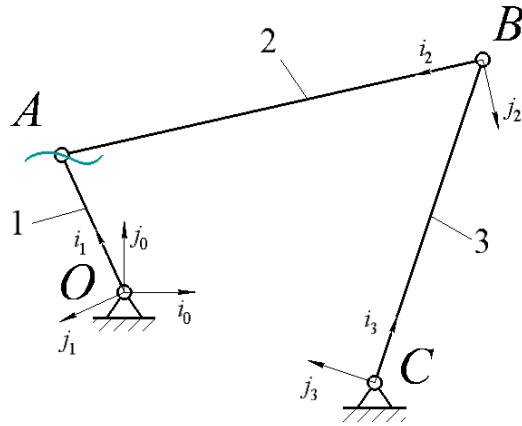


Рис. 6. Системы координат для случая размыкания в шарнире A

Для получения уравнений геометрического анализа в этом случае необходимо составить выражения для радиус-вектора точки A в неподвижной системе координат для каждой из ветвей разомкнутого графа (рис. 5, б), а затем их приравнять.

Очевидно, что для первой ветви графа для получения радиус-вектора точки A в неподвижной системе координат достаточно спроецировать оси подвижной системы первого звена $O_1x_1y_1z_1$ на оси неподвижной системы $O_0x_0y_0z_0$. Т.к. оси O_1z_1 и O_0z_0 сонаправлены, а механизм – плоский, потребуется матрица поворота вида

$$P_{1z}(q) = \begin{pmatrix} \cos(q) & -\sin(q) \\ \sin(q) & \cos(q) \end{pmatrix}.$$

Тогда радиус-вектор точки $A \mathbf{r}_{1A}^{(0)}$ в неподвижной системе координат для первой ветви графа можно записать в виде:

$$\mathbf{r}_{1A}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_{1A}^{(0)} \\ y_{1A}^{(0)} \end{pmatrix} = P_{1z}(q) \cdot \mathbf{r}_{1A}^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos(q) & -\sin(q) \\ \sin(q) & \cos(q) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cdot \cos(q) \\ l_1 \cdot \sin(q) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\mathbf{r}_{1A}^{(1)} = \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – радиус-вектор точки A в подвижной системе координат первого звена.

Радиус-вектор точки $A \mathbf{r}_{2A}^{(0)}$ в неподвижной системе координат для второй ветви графа можно записать в виде:

$$\mathbf{r}_{2A}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_{2A}^{(0)} \\ y_{2A}^{(0)} \end{pmatrix} = \mathbf{r}_{2C}^{(0)} + P_{2z}(\varphi_3) \cdot \mathbf{r}_{2C}^{(3)} + P_{23z}(\varphi_{23}) \cdot \mathbf{r}_{2A}^{(2)}, \quad (7)$$

где $\mathbf{r}_{2C}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ - радиус-вектор точки C в неподвижной системе координат,

$\mathbf{r}_{2C}^{(3)} = \begin{pmatrix} l_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ - радиус-вектор точки C в подвижной системе координат третьего звена,

$\mathbf{r}_{2A}^{(2)} = \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ - радиус-вектор точки A в подвижной системе координат второго звена.

Матрица поворота между подвижной системой третьего звена $O_3x_3y_3z_3$ и неподвижной системой координат $O_0x_0y_0z_0$ будет иметь вид

$$P_{2z}(\varphi_3) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3) & -\sin(\varphi_3) \\ \sin(\varphi_3) & \cos(\varphi_3) \end{pmatrix}.$$

Матрица поворота между подвижными системами координат третьего звена $O_3x_3y_3z_3$ и второго звена $O_2x_2y_2z_2$ будет иметь вид

$$P_{23z}(\varphi_{23}) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{23}) & -\sin(\varphi_{23}) \\ \sin(\varphi_{23}) & \cos(\varphi_{23}) \end{pmatrix}.$$

Тогда после подстановки всех элементов выражение (7) примет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{2A}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_{2A}^{(0)} \\ y_{2A}^{(0)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3) & -\sin(\varphi_3) \\ \sin(\varphi_3) & \cos(\varphi_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{23}) & -\sin(\varphi_{23}) \\ \sin(\varphi_{23}) & \cos(\varphi_{23}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C + l_3 \cdot \cos(\varphi_3) + l_2 \cdot \cos(\varphi_{23}) \\ y_C + l_3 \cdot \sin(\varphi_3) + l_2 \cdot \sin(\varphi_{23}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Очевидно, что, приравняв выражения (6) и (8), мы получим уравнения геометрического анализа:

$$\begin{cases} l_1 \cdot \cos(q) = x_C + l_3 \cdot \cos(\varphi_3) + l_2 \cdot \cos(\varphi_{23}) \\ l_1 \cdot \sin(q) = y_C + l_3 \cdot \sin(\varphi_3) + l_2 \cdot \sin(\varphi_{23}) \end{cases}. \quad (9)$$

Но здесь стоит обратить особое внимание на то, каким является угол φ_{23} . Изобразим его на рис. 7. Он должен определяться как угол между оортами \vec{i}_3 и \vec{i}_2 , причем отмеряемый от \vec{i}_3 до \vec{i}_2 в направлении против часовой стрелки.

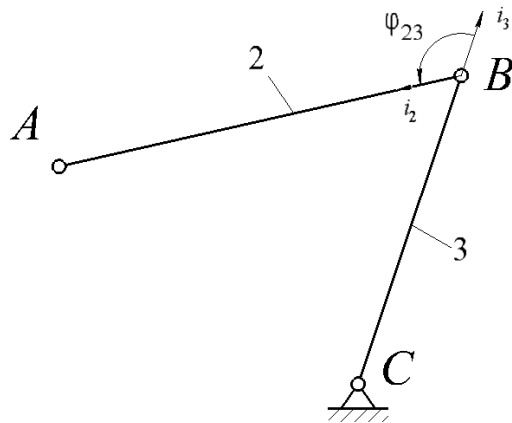


Рис. 7. Изображение угла φ_{23} в первой сборке группы ВВВ

Очевидно, что показанный угол φ_{23} является внешним по отношению к треугольнику ABC , рассмотренному на рис. 3.

Проведя аналогичные рассуждения для альтернативной сборки механизма, показанной на рис. 4, получим угол φ_{23} , показанный на рис. 8.

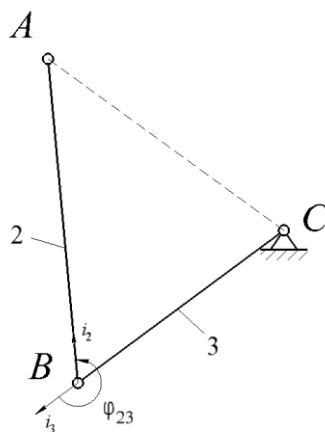
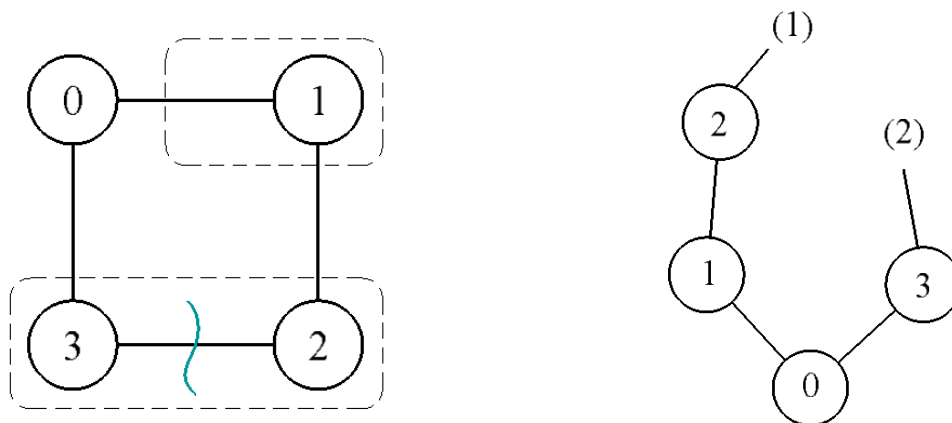


Рис. 8. Изображение угла φ_{23} во второй сборке группы ВВВ

Здесь видно, что угол φ_{23} напрямую не связан с треугольником ABC . Но при этом углы между звеньями 2 и 3 в разных сборках подчиняются выражению (5). Это означает, что значения $\cos \varphi_{23}$ у них будут одинаковы, а значения $\sin \varphi_{23}$ будут иметь противоположные знаки.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда контур механизма размыкается во внутренней кинематической паре группы ВВВ, т.е. в точке B (рис. 9, а и 9, б). Именно она описана во введении данной статьи.



а) граф механизма шарнирного четырехзвенника

б) разомкнутый граф механизма шарнирного четырехзвенника

Рис. 9. Размыкание графа механизма в точке B

Повторим все наши действия, начиная с введения систем координат для звеньев (рис. 10).

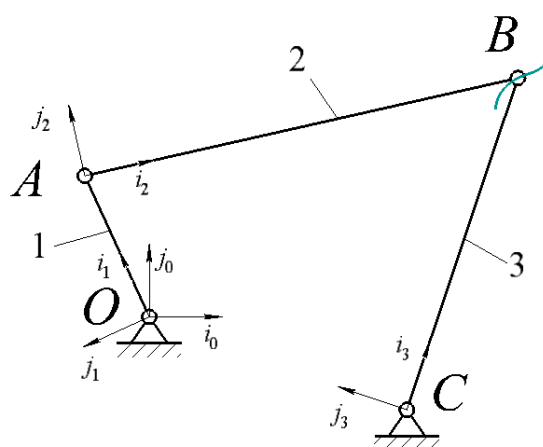


Рис. 10. Системы координат для случая размыкания в шарнире B

Уравнения геометрического анализа для этой ситуации приведены выше, поэтому обратим внимание сразу на угол φ_{23} между 2 и 3 звеньями. Рассмотрим на рис. 11 ситуацию для «отрицательной» сборки.

На предыдущем этапе рассуждений мы установили, что математически для корректных расчетов угол между звеньями 2 и 3 должен отсчитываться от «положительного» направления звена 3 в направлении против часовой стрелки до «положительного» направления звена 2. И это полностью соответствует выражениям (2)-(4). Но при этом с углом в треугольнике ABC этот угол связан выражением (5).

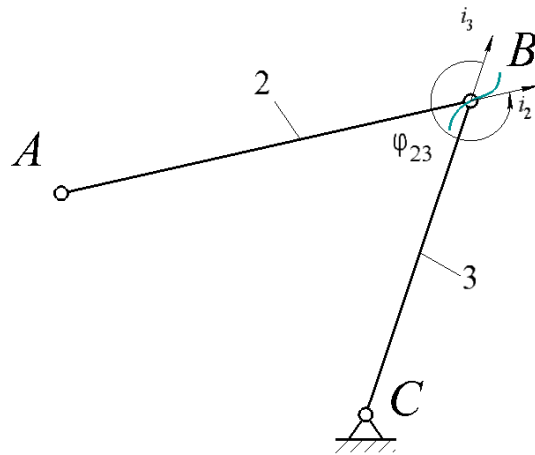


Рис. 11. Изображение угла φ_{23} для «отрицательной» сборки группы ВВВ

На рис. 12 приведен угол φ_{23} для «положительной» сборки группы ВВВ.

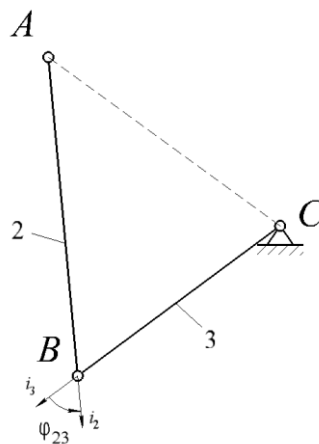


Рис. 12. Изображение угла φ_{23} для «положительной» сборки группы ВВВ

Видно, что только он и окажется углом в треугольнике ABC .

Результаты приведенных рассуждений позволяют однозначно определить при геометрическом расчете внутренний угол между звеньями в диаде ВВВ. Отдельно надо сказать и о том, что изложенная методика дает результат независимо от того, в какой подвижной точке разбивается векторный контур механизма. Например, «положительная» и «отрицательная» сборки, показанные на рис. 4, являются таковыми только при разбиении в точке B .

Заключение

Одним из важных результатов данной статьи является возможность аргументированного выбора внутреннего угла между звеньями в диаде ВВВ. Кроме того, изложенная методика основана на методах,

используемых в преподавании дисциплины ТММ в СПбПУ, и является их логическим продолжением. Более того, универсальность изложенной методики позволяет применить ее и для группы ВВП плоских рычажных механизмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Андриенко П.А. Механика механизмов и машин. Структурный, геометрический и кинематический анализ механизмов : учеб. пособие / П.А.Андриенко, А.Н.Евграфов, Д.П.Козликин. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. – 92 с.
- [2] Андриенко П.А., Евграфов А.Н., Козликин Д.П., Семенов Ю.А., Семенова Н.С. Использование элементов теории графов для структурного анализа механизмов. Современное машиностроение. Наука и образование. 2022. № 11. С. 41-58.
- [3] Андриенко П.А., Козликин Д.П. Теория механизмов и машин. Структурный, геометрический и кинематический анализ механизмов. -- СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2019.-27 с.
- [4] Andrienko P.A., Evgrafov A.N., Kozlikin D.P., Semenov Y.A., Semenova N.S. Graph-based structural analysis of kinetic art mechanisms on the example of a moving horse mechanism. Mechanisms and Machine Science (book series). 2022. T. 108 MMS. С. 141-149.
- [5] Евграфов А.Н., Семенов Ю.А., Семенова Н.С. Проектирование цикловой машины в курсе ТММ. Санкт-Петербург, 2021.
- [6] Евграфов А.Н. Теория механизмов и машин : учебник / А.Н.Евграфов, М.З.Коловский, Г.Н.Петров. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. – 248 с.
- [7] Евграфов А.Н., Петров Г.Н. Геометрический и кинетостатический анализ плоских рычажных механизмов второго класса. Теория механизмов и машин. 2003. Т. 1. № 2 (2). С. 50-63.
- [8] Kolovsky M.Z., Evgrafov A.N., Semenov Yu.A., Slousch A.V., Advanced Theory of Mechanisms and Machines. Springer-Verlag Heidelberg New York, 2000, P. 394.
- [9] Петров Г.Н., Терешин В.А., Хлебосолов И.О. Теория механизмов и машин. Расчет цикловых машин: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2019. – 44 с.
- [10] Семенов Ю.А., Семенова Н.С. Геометрический анализ плоских рычажных механизмов. Современное машиностроение. Наука и образование. 2013. № 3. С. 157-167.
- [11] Semenov Y.A., Semenova N.S. Features geometric analysis of planar mechanisms. International Review of Mechanical Engineering. 2018. Т. 12. № 5. С. 430-436.

- [12] Semenov Yu. A., Semenova N. S. Study of Mechanisms with Allowance for Friction Forces in Kinematic Pairs. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2019. pp. 169-180.
- [13] Хростицкий А.А., Евграфов А.Н., Терёшин В.А. Геометрия и кинематика пространственного шестизвенника с избыточными связями. *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета*. 2011. № 2 (123). С. 170-176.
- [14] Теория механизмов и механика машин: учебник для вузов / [Г.А.Тимофеев и др.]; под ред. Г.А.Тимофеева. – 8-е изд. перераб. и доп. – Москва : Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2017. – 566 [2] с. : ил.
- [15] Evgrafov A.N., Karazin V.I., Petrov G.N. Analysis of the Self-braking Effect of Linkage Mechanisms. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2019. pp. 119-128.
- [16] Evgrafov A., Kozlikin D. (2014) Leonid Assur (1878–1920). In: Ceccarelli M. (eds) *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science. History of Mechanism and Machine Science*, vol 26. Springer, Dordrecht
- [17] Евграфов, А. Н. Вклад М. З. Коловского в теорию механизмов и машин = Contribution of M. Z. Kolovsky to theory of mechanisms and machines / А. Н. Евграфов, В. И. Каразин 10.18721/JEST.25215 // *Научно-технические ведомости СПбПУ. Сер.: Естественные и инженерные науки = St. Petersburg polytechnic university journal of engineering science and technology / Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*. 2019. Т. 25, № 2. С. 183-191. ISSN 2542-1239.
- [18] Андриенко П.А., Козликин Д.П. Машины и механизмы Леонардо Да Винчи. *Теория механизмов и машин*. 2005. Т. 3. № 2 (6). С. 95.
- [19] Evgrafov A.N., Andrienko P.A. The role of St.-Petersburg scientists of the XVIII-XIX centuries in the development of machines and mechanisms science. *International Review of Mechanical Engineering*. 2016. Т. 10. № 5. С. 312-321.
- [20] Андриенко П.А., Евграфов А.Н. Вклад ученых Санкт-Петербурга XVIII-XIX веков в развитие теории механизмов и машин. *Научно-технические ведомости СПбГПУ, Санкт-Петербург*, 2016. №4 (254). С. 126-140. ISSN 1994-2354.
- [21] Кикин А. Основы анализа и синтеза плоских рычажных механизмов. *Кинематика механизмов*. LAP LAMBERT Academic Publishing. 2017. ISBN 978-620-2-05067-8
- [22] Синтез плоских рычажных механизмов на ЭВМ Кикин А.Б. монография / А. Б. Кикин ; М-во образования Рос. Федерации, С.-Петербург. гос. ун-т технологии и дизайна. СПб., 2003.

- [23] Grübler M. Gegtriebelehre. Eine Theorie des Zwanglaufes und der ebene Mechanismen. – Berlin: Springer-Verlag, 1917
- [24] Семенова Н.С., Семенов Ю.А. Теория механизмов и машин. исследование промышленного робота. Санкт-Петербург, 2019.
- [25] Семенов Ю.А., Семенова Н.С. Теория механизмов и машин в примерах и задачах. Санкт-Петербург, 2015. Том Часть 1.

P.A. Andrienko, D.P. Kozlikin, A.V. Khisamov

MATHEMATICAL DETERMINATION OF THE ASSEMBLY METHODS OF THE RRR GROUP IN THE GEOMETRIC ANALYSIS OF FLAT LEVER MECHANISMS

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia

Abstract

The paper considers issues related to mathematical choice of RRR group assembly method in planar lever mechanisms. A justification for the choice of the sign of trigonometric functions of the relative angle in the structural group is given. The given reasoning allows to unambiguously choose the angle between the links within the RRR dyad.

Key words: structural analysis of mechanisms, geometrical analysis of plane lever mechanisms, Assur's structural group, RRR group.

REFERENCES

- [1] Andrienko P.A. Mexanika mexanizmov i mashin. Strukturny`j, geometricheskij i kinematicheskij analiz mexanizmov : ucheb. posobie / P.A.Andrienko, A.N.Evgrafov, D.P.Kozlikin. – SPb.: POLITEX-PRESS, 2022. – 92 s.
- [2] Andrienko P.A., Evgrafov A.N., Kozlikin D.P., Semenov Yu.A., Semenova N.S. Ispol`zovanie e`lementov teorii grafov dlya strukturnogo analiza mexanizmov Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie. 2022. № 11. S. 41-58.
- [3] Andrienko P.A., Kozlikin D.P. Teoriya mexanizmov i mashin. Strukturny`j, geometricheskij i kinematicheskij analiz mexanizmov. -- SPb.: Izd-vo Politexn. un-ta, 2019.-27 s.
- [4] Andrienko P.A., Evgrafov A.N., Kozlikin D.P., Semenov Y.A., Semenova N.S. Graph-based structural analysis of kinetic art mechanisms on the example of a moving horse mechanism. Mechanisms and Machine Science (book series). 2022. T. 108 MMS. S. 141-149.

- [5] Evgrafov A.N., Semenov Yu.A., Semenova N.S. Proektirovanie ciklovoj mashiny` v kurse TMM. Sankt-Peterburg, 2021.
- [6] Evgrafov A.N. Teoriya mexanizmov i mashin : uchebnik / A.N.Evgrafov, M.Z.Kolovskij, G.N.Petrov. – SPb.: POLITEX-PRESS, 2020. – 248 s.
- [7] Evgrafov A.N., Petrov G.N. Geometricheskij i kinetostaticeskij analiz ploskix ry`chazhny`x mexanizmov vtorogo klassa. Teoriya mexanizmov i mashin. 2003. T. 1. № 2 (2). S. 50-63.
- [8] Kolovsky M.Z., Evgrafov A.N., Semenov Yu.A., Slousch A.V., Advanced Theory of Mechanisms and Machines. Springer-Verlag Heidelberg New York, 2000, P. 394.
- [9] Petrov G.N., Tereshin V.A., Xlebosolov I.O. Teoriya mexanizmov i mashin. Raschet ciklovy`x mashin: ucheb. posobie. – SPb.: Izd-vo Politexn. un-ta, 2019. – 44 s.
- [10] Semenov Yu.A., Semenova N.S. Geometricheskij analiz ploskix ry`chazhny`x mexanizmov. Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie. 2013. № 3. S. 157-167.
- [11] Semenov Y.A., Semenova N.S. Features geometric analysis of planar mechanisms. International Review of Mechanical Engineering. 2018. T. 12. № 5. S. 430-436.
- [12] Semenov Yu. A., Semenova N. S. Study of Mechanisms with Allowance for Friction Forces in Kinematic Pairs. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2019. pp. 169-180.
- [13] Khrustitskii A.A., Evgrafov A.N., Tereshin V.A. Geometry and kinematics of spatial hexahedral with redundant links. Scientific and Technical Vedomosti of the St. Petersburg State Polytechnical University. 2011. № 2 (123). Pp. 170-176.
- [14] Teoriya mexanizmov i mexanika mashin: uchebnik dlya vuzov / [G.A.Timofeev i dr.]; pod red. G.A.Timofeeva. – 8-e izd. pererab. i dop. – Moskva : Izdatel`stvo MGTU im. N.E`.Baumana, 2017. – 566 [2] s. : il.
- [15] Evgrafov A.N., Karazin V.I., Petrov G.N. Analysis of the Self-braking Effect of Linkage Mechanisms. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2019. pp. 119-128.
- [16] Evgrafov A., Kozlikin D. (2014) Leonid Assur (1878–1920). In: Ceccarelli M. (eds) Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science. History of Mechanism and Machine Science, vol 26. Springer, Dordrecht
- [17] Evgrafov, A. N. Vklad M. Z. Kolovskogo v teoriyu mexanizmov i mashin = Contribution of M. Z. Kolovsky to theory of mechanisms and machines / A. N. Evgrafov, V. I. Karazin 10.18721/JEST.25215 // Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbPU. Ser.: Estestvenny`e i inzhenerny`e nauki = St. Petersburg polytechnic university journal of engineering science and technology / Sankt-Peterburgskij politexnicheskij universitet Petra Velikogo. 2019. T. 25, № 2. S. 183-191. ISSN 2542-1239.

- [18] Andrienko P.A., Kozlikin D.P. Mashiny` i mexanizmy` Leonardo Da Vinchi. Teoriya mexanizmov i mashin. 2005. T. 3. № 2 (6). S. 95.
- [19] Evgrafov A.N., Andrienko P.A. The role of St.-Petersburg scientists of the XVIII-XIX centuries in the development of machines and mechanisms science. International Review of Mechanical Engineering. 2016. T. 10. № 5. S. 312-321.
- [20] Andrienko P.A., Evgrafov A.N. Vklad ucheny`x Sankt-Peterburga XVIII-XIX vekov v razvitie teorii mexanizmov i mashin. Nauchno-texnicheskie vedomosti SPbGPU, Sankt-Peterburg, 2016. №4 (254). S. 126-140. ISSN 1994-2354.
- [21] Kikin A. Osnovy` analiza i sinteza ploskix ry`chazhny`x mexanizmov. Kinematika mexanizmov. LAP LAMBERT Academic Publishing. 2017. ISBN 978-620-2-05067-8
- [22] Sintez ploskix ry`chazhny`x mexanizmov na E`VM Kikin A.B. monografiya / A. B. Kikin ; M-vo obrazovaniya Ros. Federacii, S.-Peterb. gos. un-t tekhnologii i dizajna. SPb., 2003.
- [23] Grübler M. Gegtriebelehre. Eine Theorie des Zwanglaufes und der ebene Mechanismen. – Berlin: Springer-Verlag, 1917
- [24] Semenova N.S., Semenov Yu.A. Teoriya mexanizmov i mashin. issledovanie promy`shlennogo robota. Sankt-Peterburg, 2019.
- [25] Semenov Yu.A., Semenova N.S. Teoriya mexanizmov i mashin v primerax i zadachax. Sankt-Peterburg, 2015. Tom Chast` 1.