

УДК 621.01

doi:10.18720/SPBPU/2/id23-522

Е. Н. Куц

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА СТЕПЕНЕЙ ПОДВИЖНОСТИ МНОГОКОНТУРНЫХ МЕХАНИЗМОВ СО СЛОЖНЫМИ ШАРНИРАМИ



Екатерина Николаевна Куц,  
Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)  
Россия, Челябинск  
Тел.: +7 (351)267-9742, E-mail: ekaterina.n.kuts@gmail.com.

### Аннотация

Определение числа степеней подвижности является одним из важных этапов структурного анализа механизмов. В статье предлагается новый алгоритм определения числа степеней подвижности многоконтурных механизмов со сложными шарнирами. Для демонстрации эффективности и широких возможностей описанного алгоритма приведены примеры анализа подвижности плоских и пространственных механических систем. Результаты работы могут быть применены для структурного анализа и синтеза различных многоконтурных механизмов, как с простыми, так и со сложными шарнирами.

*Ключевые слова:* механизм, число степеней подвижности, замкнутый контур, сложный шарнир

### Введение

Одним из основных этапов создания работоспособных многоконтурных механизмов [3,11,12] с заданным числом степеней свободы (числом степеней подвижности  $W \geq 1$ ) является структурный анализ различных возможных структурных схем для выбора из них наиболее оптимальной [14,15,18,21].

Первым и наиболее важным этапом структурного анализа механизмов является теоретический расчет величины подвижности  $W$  по формулам,

отображающим особенности строения различных кинематических цепей [4]. В научной литературе эти формулы носят название структурных формул механизмов, наиболее известные из которых были предложены П.Л. Чебышевым, М. Грюблером, К. Куцбахом, Х.И. Гохманом, А.П. Малышевым и др. [1, 2, 10, 13, 19, 20].

В работе [2] отмечено, что известные формулы расчета  $W$  не отражают всех структурных особенностей кинематических цепей.

Предпринятая Дж.С. Рао [13] попытка создать универсальную формулу расчета  $W$  с учетом сложных (совмещенных) шарниров не дала практического результата. В связи с этим разработка новых подходов для расчета подвижности  $W$  механизмов со сложными шарнирами представляет научный интерес.

Цель данной работы – разработка алгоритма для определения числа степеней подвижности  $W$  различных плоских и пространственных многоконтурных рычажных механизмов на основе применения предложенной в «Единой теории структуры, синтеза и анализа многозвенных механических систем» [5] новой формулы расчета  $W$ , отображающей все структурные особенности кинематических цепей механизмов за счет учета разных видов многошарнирных звеньев и всего многообразия сложных шарниров.

### **Алгоритм определения числа степеней подвижности многоконтурных механизмов со сложными шарнирами**

Предлагается алгоритм определения числа степеней подвижности многоконтурных рычажных механизмов со сложными шарнирами. Данный алгоритм основан на применении общих формул из «Единой теории структуры, синтеза и анализа многозвенных механических систем» [5] и содержит следующие этапы.

**Этап 1.** Определение ассортимента многошарнирных звеньев в исследуемой кинематической цепи механизма в виде:

$$[LA] = [n_2, n_3, n_4, \dots, n_{i\max}], \quad (1)$$

где  $n_2$  – число двухшарнирных,  $n_3$  – число трехшарнирных звеньев и т.д.

**Этап 2.** Определение общего числа звеньев  $\tilde{n}$  кинематической цепи механизма:

$$\tilde{n} = n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + \dots + n_i. \quad (2)$$

**Этап 3.** Определение ассортимента сложных шарниров в кинематической цепи механизма в виде:

$$[MJA] = [v_2 \cdot v_3 \cdot \dots \cdot v_{j\max}], \quad (3)$$

где  $v_2$  – число сложных шарниров кратностью  $j = 2$  (обозначается на схемах как “ $j_2$ ”),  $v_3$  – число сложных шарниров кратностью  $j = 3$  (обозначается на схемах как “ $j_3$ ”) и т.д.

Сложный шарнир представляет собой многократное шарнирное соединение соосно вращающихся звеньев числом  $n' \geq 3$  образующих  $n' - 1$  вращательных кинематических пар [9, 16]. Под кратностью сложного шарнира  $j$  ( $2 \leq j \leq j_{\max}$ ) понимается величина  $j = n' - 1$ .

**Этап 4.** Расчет в кинематической цепи анализируемого механизма приведенного числа сложных шарниров  $V$ :

$$V = \sum_{j=2}^{j_{\max}} (j-1)v_{j_{\max}} = v_2 + 2v_3 + \dots + (j-1)v_{j_{\max}}. \quad (4)$$

Данный параметр  $V$  позволяет учесть как количество, так и все возможные типы сложных шарниров.

Отметим, в чем заключается физический смысл величины  $V$ . Если число шарниров  $s$  и кинематических пар  $p$  выразить через величины  $v_j$  следующим образом:  $s = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \dots$ ,  $p = v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 + \dots$ . Тогда разность  $p - s$  равна:

$$p - s = v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 + \dots - (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \dots) = v_2 + 2v_3 + 3v_4 + \dots = V.$$

Таким образом, приведенное число сложных шарниров  $V$  равно разности между числом кинематических пар и числом шарниров.

Для кинематических цепей механизмов с простыми шарнирами приведенное число сложных шарниров  $V = 0$ .

**Этап 5.** Расчет в данной кинематической цепи механизма числа взаимно независимых замкнутых контуров  $K$ :

$$K = 1 + 0,5 \left[ V + \sum_{i=2}^{i_{\max}} (i-2)n_{i_{\max}} \right]. \quad (5)$$

**Этап 6.** Расчет числа степеней подвижности  $W$  механизма относительно выбранной стойки:

$$W = \left[ \sum_{i=2}^{i_{\max}} (3-i)n_{i_{\max}} \right] + (f - V - 3), \quad (6)$$

где  $f$  – величина, учитывающая наличие многоподвижных кинематических пар ( $f = p_2 + 2p_3 + 3p_4 + 4p_5$ ) в цепи механизма.

Следует также отметить, что формула (6) не зависит от числа трехшарнирных звеньев  $n_3$ , что существенно упрощает процедуру расчета подвижности  $W$  любых плоских и пространственных многоконтурных механизмов, работающих в пространстве  $h = 3$  ( $1 \leq h \leq 6$ ).

### **Анализ подвижности различных многоконтурных механизмов со сложными шарнирами**

Для иллюстрации предложенного алгоритма применим его для определения числа степеней подвижности плоских и пространственных многоконтурных механизмов.

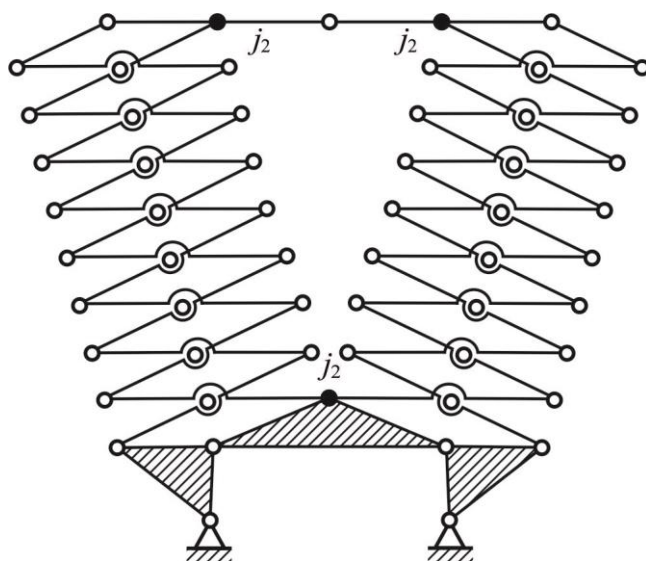


Рис. 1. Складывающийся рычажный механизм параллельной структуры

**Пример 1.** Рассмотрим многоконтурный рычажный механизм параллельной структуры ( $f = 0$ ), представленный на рис. 1. В соответствии с предлагаемыми этапами получим:

1) ассортимент многошарнирных звеньев в кинематической цепи:

$$n_2 = 7, n_3 = 35 \Rightarrow [LA] = [7, 35, 0, \dots, 0];$$

2) общее число звеньев кинематической цепи механизма:  $\tilde{n} = 42$ ;

3) ассортимент сложных шарниров в кинематической цепи:

$$v_2 = 3 (j_2) \Rightarrow [MJA] = [3 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0];$$

4) приведенное число сложных шарниров:  $V = v_2 = 3$ ;

5) число взаимно независимых замкнутых контуров  $K$ :

$$K = 1 + 0,5(V + n_3) = 1 + 0,5(3 + 35) = 20;$$

6) число степеней подвижности механизма:

$$W = n_2 + (f - V - 3) = 7 - (0 - 3 - 3) = 1.$$

**Пример 2.** Рассмотрим грузоподъемный манипулятор [7], представленный на рис. 2 (а).

Соотношения (1)-(6), позволяют получить следующие результаты:

1)  $n_2 = 11, n_4 = 1 \Rightarrow [LA] = [11, 1, 0, 0, 0];$

2)  $\tilde{n} = 12$ ; 3)  $v_2 = 4 (j_2), v_3 = 1 (j_3) \Rightarrow [MJA] = [4 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0];$  4)  $V = v_2 + 2v_3 = 6$ ;

5)  $K = 1 + 0,5(V + 2n_4) = 5$ ; 6)  $W = n_2 - n_4 - (f - V - 3) = 11 - 1 - (0 - 6 - 3) = 1.$

**Пример 3.** Рассмотрим многоконтурный шарнирный механизм [6], представленный на рис. 2 (б).

Соотношения (1)-(6), позволяют получить следующие результаты:

1)  $n_2 = 12 \Rightarrow [LA] = [12, 0, 0, 0, 0];$  2)  $\tilde{n} = 12$ ; 3)  $v_2 = 8 (j_2) \Rightarrow [MJA] = [8 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0];$  4)  $V = v_2 = 8$ ; 5)  $K = 1 + 0,5 \cdot V = 1 + 0,5 \cdot 8 = 5$ ;

6)  $W = n_2 - (f - V - 3) = 12 - (0 - 8 - 3) = 1.$

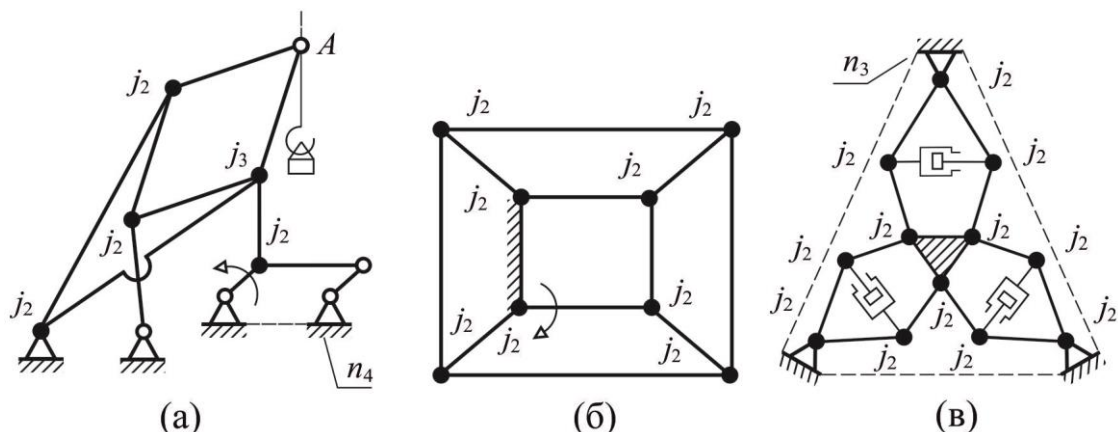


Рис. 2. Примеры многоконтурных механизмов: (а) грузоподъемный манипулятор [7]; (б) шарнирный механизм [6]; (в) платформенный механизм [8]

**Пример 4.** Рассмотрим платформенный механизм с тремя гидроцилиндрами [8], представленный на рис. 2 (в).

Соотношения (1)-(6), позволяют получить следующие результаты:

1)  $n_2 = 18, n_3 = 2 \Rightarrow [LA] = [18, 2, 0, 0, 0, 0]$ ; 2)  $\tilde{n} = 20$ ; 3)  $v_2 = 12 (j_2) \Rightarrow [MJA] = [12 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0]$ ; 4)  $V = v_2 + 2v_3 = 6$ ; 5)  $K = 1 + 0,5 \cdot 12 = 7$ ; 6)  $W = 18 - (0 - 12 - 3) = 3$ .

**Пример 5.** Рассмотрим четырехконтурный механизм Беннетта [17], представленный на рис. 3.

Соотношения (1)-(6), позволяют получить следующие результаты:

1)  $n_2 = 12 \Rightarrow [LA] = [12, 0, 0, 0]$ ; 2)  $\tilde{n} = 12$ ; 3)  $v_2 = 4 (j_2), v_3 = 1 (j_3) \Rightarrow [MJA] = [4 \cdot 1 \cdot 0]$ ; 4)  $V = v_2 + 2v_3 = 6$ ; 5)  $K = 1 + 0,5 \cdot 6 = 4$  (на рис. 3 контуры обозначены, буквами A, B, C и D); 6)  $W = n_2 - (f - V - 3) = 12 - (0 - 6 - 3) = 3$ .

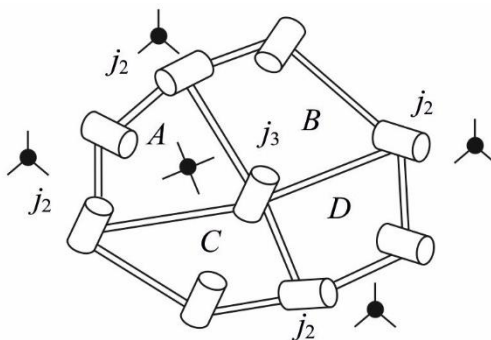


Рис. 3. Пространственный четырехконтурный рычажный механизм Беннетта [17]

## Обсуждение

Традиционно расчет подвижности плоских механизмов проводится по структурной формуле П.Л. Чебышева [1, 2, 13]  $W = 3(\tilde{n} - 1) - 2p_1 - p_2$ , где  $p_1$  и  $p_2$  – число одноподвижных и двухподвижных кинематических пар соответственно. Для механизма, показанного на рис.1, подставляя общее число звеньев  $\tilde{n} = 42$ , число одноподвижных  $p_1 = 61$  и число двухподвижных  $p_2 = 0$  кинематических пар, в данную формулу, получим:

$W = 3(42 - 1) - 2 \cdot 61 - 0 = 1$ . То есть складывающийся рычажный механизм параллельной структуры имеет одну степень подвижности.

Дополнительно определим подвижность согласно структурной формуле Х.И. Гохмана [2, 13]  $W = p_1 + 2p_2 - 3K$ , учитывающей число независимых контуров  $K$ , которые определяются визуально. Для механизма на рис.1 число контуров  $K = 20$ . Следовательно, имеем  $W = 1$ .

Таким образом, данные результаты подтверждают расчет, полученный в § 3. Очевидно, что с точки зрения сложности вычисления, формула (6) имеет преимущество, так как для ее применения нет необходимости проводить подсчет и определение класса кинематических пар.

## Выводы

В данной статье предложен алгоритм расчета числа степеней подвижности плоских и пространственных многоконтурных механизмов со сложными шарнирами. Результаты работы могут быть применены для структурного анализа различных сложных механизмов, как с простыми, так и со сложными шарнирами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Андриенко П. А., Евграфов А.Н., Козликин Д.П., Семенов Ю.А., Семенова Н.С. Использование элементов теории графов для структурного анализа механизмов. Современное машиностроение: Наука и образование. 2022. С. 43-58.
- [2] Кожевников, С.Н. Основания структурного синтеза механизмов. – Киев : Наукова думка, 1979. – 232 с.
- [3] Марковец А.В., Полотебнов В.О. Синтез механизмов транспортирования материалов с прямолинейным участком траектории движения зубчатой рейки. 2018. Известия высших учебных заведений. Технология легкой промышленности. Т. 38, № 1. С. 117-121.
- [4] Пейсах Э.Е. Структурный синтез замкнутых кинематических цепей (цепей Грюблера). Часть 1. // Теория механизмов и машин. 2008. Т. 6. 1(11). С.4-14.
- [5] Пожбелко В.И. Единая теория структуры, синтеза и анализа многозвенных механических систем с геометрическими, гибкими и динамическими связями звеньев. Часть 1. Базовые структурные уравнения и универсальные таблицы строения. 2020. Известия высших учебных заведений. Машиностроение. № 9 (726). С. 24-43.
- [6] Пожбелко В.И. Многоконтурный шарнирный механизм. Патент на изобретение № 2751777 С1, 2021.

- [7] Пожбелко В.И., Куц Е.Н. Грузоподъемный манипулятор. Патент на изобретение № 2728851 С1, 2020.
- [8] Пожбелко В.И., Куц Е.Н. Платформенный механизм. Патент на изобретение № 2737249 С1, 2020.
- [9] Пожбелко В.И., Куц Е.Н. Системный анализ и области применения многоконтурных рычажных механизмов с многократными шарнирами в современном машиностроении. 2020. Известия высших учебных заведений. Машиностроение. № 2 (719). С. 11-25.
- [10] Смелягин, А.И. Структурный анализ и синтез транспортных и робототехнических устройств. Научные труды КубГТУ. 2019. № 3. С. 54-71.
- [11] Яруллин М.Г., Хабибуллин Ф.Ф., Мудров А.П. К вопросу о синтезе модификаций механизма Беннетта. Современное машиностроение: Наука и образование. 2018. С. 230-244.
- [12] Babichev, D., Evgrafov, A., Lebedev, S. Lever mechanisms: the new approach to structural synthesis and kinematic analysis. Advances in Mechanisms and Machine Science. IFToMM WC 2019. Mechanism and Machine Science, 2019, 73, pp. 559-568.
- [13] Gogu, G. Mobility of mechanisms: a critical review. 2005. Mechanism and Machine Theory. 40(9), pp. 1068-1097.
- [14] Hasan, A. Study of multiple jointed kinematic chains. 2018. International Journal of Computational Engineering Research. 8(1), pp.13-19.
- [15] Huang, Y., Lu, Q., Wang, H., Liu, J., Li, Z., Zou, X., Zhan, X. Kinematics analysis and simulation of a novel 3T parallel mechanism. 2022. Mathematical Problems in Engineering. 2022, pp. 1-12.
- [16] Kuts E.N., Pozhbelko V.I. A new structural synthesis method of multiloop linkage mechanisms with multiple joints. 2023. Lecture Notes in Mechanical Engineering, pp.109-119
- [17] Song, C., Feng, H., Chen, Y., Chen, I-M., Kang, R. Reconfigurable mechanism generated from the network of Bennett linkages. 2015. Mechanism and Machine Theory. 88(6), pp. 49-62.
- [18] Yan, H.S. A methodology for creative mechanism design. 1992. Mechanism and Machine Theory. 27(3) pp. 235-242.
- [19] Yang, D.C., Xiong, J., Yang, X.D. A simple method to calculate mobility with Jacobian. 2008. Mechanism and Machine Theory. 43(9), pp. 1175-1185.
- [20] Zhao, J.S., Zhou, K. A theory of degrees of freedom for mechanisms. 2004. Mechanism and Machine Theory. 39 (6), pp. 621-643.
- [21] Zou, Q., Zhang, D., Zhang, S., Luo, X. Kinematic and dynamic analysis of a 3-DOF parallel mechanism. 2021. International Journal of Mechanics and Materials in Design. 17(3), pp. 587-599.

## THE MOBILITY CALCULATION OF MULTILOOP MECHANISMS WITH MULTIPLE JOINTS

South Ural State University (national research university), Russia

### Abstract

Calculation of the mobility is one of the important stages of structural analysis of mechanisms. The article proposes a new algorithm for determining the number of degrees of freedom of multiloop mechanisms with multiple joints. To demonstrate the effectiveness and broad capabilities of the described algorithm, examples of the analysis of the mobility of plane and spatial mechanical systems are given. The results of this work can be applied to the structural analysis and synthesis of various multiloop mechanisms, both with simple and joints.

*Key words:* mechanism, mobility, closed loop, multiple joint

### REFERENCES

- [1] Andrienko P. A., Evgrafov A.N., Kozlikin D.P., Semenov Y.A., Semenova N.S. Application of graph theory elements for structural analysis of mechanisms. Modern mechanical engineering: Science and education. 2022. № 11, pp. 43-58. (rus.)
- [2] Kojevnikov, S.N. Foundation of structural synthesis of mechanisms. – Kiev: Naukova dumka, 1979. – 232 p. (rus.)
- [3] Markovets, A.V., Polotebnov, V.O. Synthesis of mechanisms for the transportation of materials with a straight section of the trajectory of the gear link // Proceedings of higher educational institutions. Light industry technology. 2018. Vol. 38, № 1, pp.117-121. (rus.)
- [4] Peisakh E.E. Structural synthesis of closed kinematic chains (Gruebler' chains) . Part 1. // Theory of mechanism and machine. 2008. Vol. 6. 1(11). P.4-14. (rus.)
- [5] Pozhbelko, V.I., A Unified Theory of Structure, Synthesis and Analysis of Multibody Mechanical Systems with Geometrical, Flexible and Dynamic Connections. Part 1. Basic Structural Equations and Universal Structure Tables.. 2020. BMSTU Journal of Mechanical Engineering. № 9 (726), pp. 24-43. (rus.)
- [6] Pozhbelko V.I. Multiloop linkwork. Patent for invention № 2751777 C1, 2021. (rus.)



- [7] Pozhbelko V.I., Kuts E.N. Lifting manipulator. Patent for invention № 2728851 C1, 2020. (rus.)
- [8] Pozhbelko V.I., Kuts E.N. Platform mechanism. Patent for invention № 2737249 C1, 2020. (rus.)
- [9] Pozhbelko, V.I., Kuts, E.N. Systematic analysis and application of multi-loop linkages with multiple joints in modern mechanical engineering. 2020. BMSTU Journal of Mechanical Engineering. № 2 (719), pp. 11-25. (rus.)
- [10] Smelyagin, A.I. Structural analysis and synthesis of transport and robotic devices. Scientific works of KubSTU. 2019. № 3, pp. 54-71. (rus.)
- [11] Yarullin M.G., Habibullin F.F., Mudrov A.P. On the question of synthesis of modifications of the Bennett mechanism. Modern mechanical engineering: Science and education. 2018. № 7, pp. 230-244. (rus.)
- [12] Babichev, D., Evgrafov, A., Lebedev, S. Lever mechanisms: the new approach to structural synthesis and kinematic analysis. Advances in Mechanisms and Machine Science. IFToMM WC 2019. Mechanism and Machine Science, 2019, 73, pp. 559-568.
- [13] Gogu, G. Mobility of mechanisms: a critical review. 2005. Mechanism and Machine Theory. 40(9), pp. 1068-1097.
- [14] Hasan, A. Study of multiple jointed kinematic chains. 2018. International Journal of Computational Engineering Research. 8(1), pp.13-19.
- [15] Huang, Y., Lu, Q., Wang, H., Liu, J., Li, Z., Zou, X., Zhan, X. Kinematics analysis and simulation of a novel 3T parallel mechanism. 2022. Mathematical Problems in Engineering. 2022, pp. 1-12.
- [16] Kuts E.N., Pozhbelko V.I. A new structural synthesis method of multiloop linkage mechanisms with multiple joints. 2023. Lecture Notes in Mechanical Engineering, pp.109-119
- [17] Song, C., Feng, H., Chen, Y., Chen, I-M., Kang, R. Reconfigurable mechanism generated from the network of Bennett linkages. 2015. Mechanism and Machine Theory. 88(6), pp. 49-62.
- [18] Yan, H.S. A methodology for creative mechanism design. 1992. Mechanism and Machine Theory. 27(3) pp. 235-242.
- [19] Yang, D.C., Xiong, J., Yang, X.D. A simple method to calculate mobility with Jacobian. 2008. Mechanism and Machine Theory. 43(9), pp. 1175-1185.
- [20] Zhao, J.S., Zhou, K. A theory of degrees of freedom for mechanisms. 2004. Mechanism and Machine Theory. 39 (6), pp. 621-643.
- [21] Zou, Q., Zhang, D., Zhang, S., Luo, X. Kinematic and dynamic analysis of a 3-DOF parallel mechanism. 2021. International Journal of Mechanics and Materials in Design. 17(3), pp. 587-599.