

УДК 531.25

doi:10.18720/SPBPU/2/id23-526

А.С. Смирнов¹, Т.Н. Хашба², Б.А. Смольников³

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ЦЕПОЧЕК ПОЛУЦИЛИНДРОВ, СТЯНУТЫХ УПРУГОЙ НИТЬЮ



¹Алексей Сергеевич Смирнов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра
Великого

Институт проблем машиноведения Российской академии наук
Россия, Санкт-Петербург

Тел.: (812)552-7778, E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com



²Тимур Нугзарович Хашба

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра
Великого

Россия, Санкт-Петербург

Тел.: (812)552-7778, E-mail: hashba_tn@spbstu.ru



³Борис Александрович Смольников

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра
Великого

Институт проблем машиноведения Российской академии наук
Россия, Санкт-Петербург

Тел.: (812)552-7778, E-mail: smolnikovba@yandex.ru

Аннотация

В работе рассматриваются две задачи об устойчивости равновесия цепочек тяжелых полуцилиндрических брусьев, которые стянуты упругой нитью, проходящей через просверленные по радиусу отверстия. Такие системы моделируют различные несущие конструкции, предназначенные для высотных сооружений. Для каждой из задач приводится построение потенциальной энергии системы в квадратичной аппроксимации и на ее основе формируется матрица квазиупругих коэффициентов. При помощи критерия Сильвестра выявляются условия устойчивости тривиального положения равновесия цепочек полуцилиндров в зависимости от их числа, которые определяют требования к силе натяжения нити. Эти результаты

приведены в табличном виде, позволяющем осуществить сопоставление условий устойчивости для обеих задач. Сделанные выводы представляют не только теоретический интерес, но также могут оказаться полезными и в практическом отношении при решении задач прикладной механики.

Ключевые слова: полуцилиндр, цепочка, упругая нить, потенциальная энергия, матрица квазиупругих коэффициентов, устойчивость равновесия, критерий Сильвестра, безразмерный параметр, условия устойчивости.

Введение

Вопросам устойчивости положений равновесия механических систем, находящихся под действием как консервативных, так и диссипативных, гироскопических или циркуляционных сил, посвящен весьма обширный пласт научных работ, в том числе и вышедших за последнее время, причем они посвящены как теоретическим, так и практическим аспектам [1-14]. Особый интерес здесь представляют задачи об устойчивости равновесия консервативных систем, обладающих регулярной структурой и имеющих произвольное конечное число степеней свободы, которые к тому же иногда встречаются в различных технических приложениях [15]. К сожалению, круг работ, посвященных подобным задачам, является весьма небольшим, несмотря на то, что задач о колебаниях механических систем с регулярной структурой в существующей литературе имеется довольно много [16-18]. Несомненно, указанный пробел нуждается в восполнении, тем более, что такие задачи могут иметь важное прикладное значение в инженерном деле.

Ввиду сказанного выше, настоящая работа посвящена исследованию устойчивости равновесия цепочек полуцилиндров, помещенных друг на друга в поле силы тяжести и стянутых упругой нитью, в двух вариантах расположения полуцилиндров и при произвольном их количестве.

Постановка задачи

Переходя к конкретной постановке задачи, рассмотрим две цепочки, состоящие из n одинаковых однородных брусьев, каждый из которых обладает сечением в форме полукруга радиуса R и имеет вес P . Будем считать, что эти полуцилиндры стянуты с силой F упругой нитью, проходящей через просверленные по радиусу отверстия. Рассмотрим далее два случая: в первом из них будем полагать, что основания полуцилиндров обращены вниз, причем сама цепочка помещена на неподвижный опорный полуцилиндр того же радиуса (рис. 1, *a*), тогда как во втором случае основания полуцилиндров обращены вверх, причем цепочка помещена на горизонтальную плоскость (рис. 1, *b*). Получившиеся при этом своего рода многозвенники с упруго-напряженным сердечником могут моделировать

разнообразные конструкции, в том числе и некоторый «искусственный позвоночник», играющий роль несущей конструкции для различных высотных сооружений, а также могут оказаться полезными и для описания биомеханических систем. Будем считать далее, что полуцилиндры могут отклоняться от своих исходных равновесных положений лишь в плоскости чертежа, так что приведенные расчетные схемы можно считать плоскими.

Целью дальнейшего анализа является выяснение требований к силе натяжения нити F , обеспечивающей устойчивость равновесия столбца полуцилиндров, в зависимости от их числа n в цепочке.

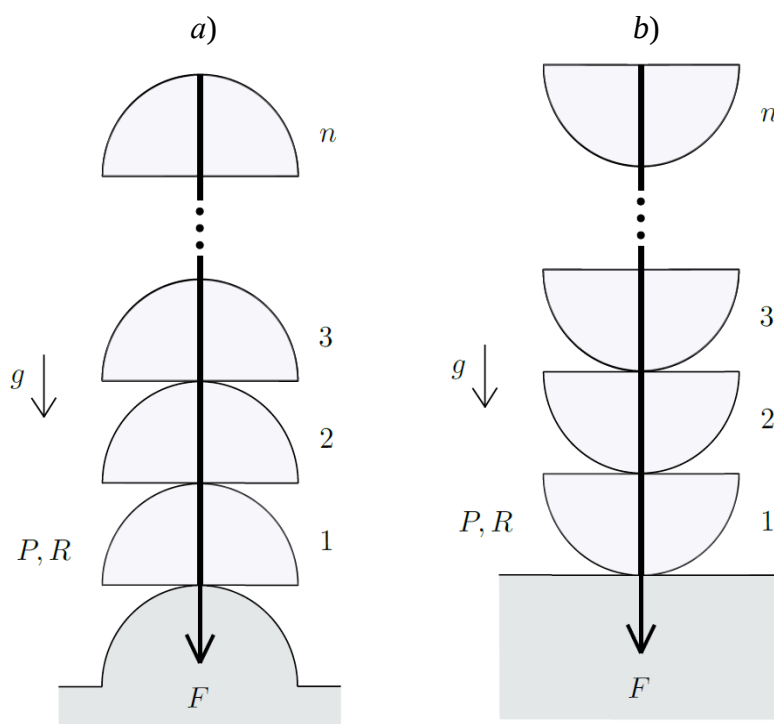


Рис. 1. Цепочки полуцилиндров, стянутых упругой нитью, с основаниями, обращенными: а) Вниз, б) Вверх

Решение задачи

Рассмотрим сначала расчетную схему, которая приведена на рис. 1, а. В качестве обобщенных координат задачи, характеризующих отклоненное положение системы, будем принимать углы φ_k , $k = \overline{1, n}$, составляемые осями симметрии полуцилиндров с вертикалью в этом положении. Будем считать, что качение полуцилиндров осуществляется без проскальзывания. Ясно, что суммарная потенциальная энергия цепочки полуцилиндров в отклоненном положении может быть записана в следующем виде:

$$\Pi = F \sum_{k=1}^n \Delta_k + P \sum_{k=1}^n h_k, \quad (1)$$

где Δ_k – длина участка упругой нити между краями отверстий $(k-1)$ -го и k -го полуцилиндров, представляющая собой часть общего удлинения нити (рис. 2, а), а h_k – высота подъема центра масс k -го полуцилиндра (точки C_k) над его равновесным положением.

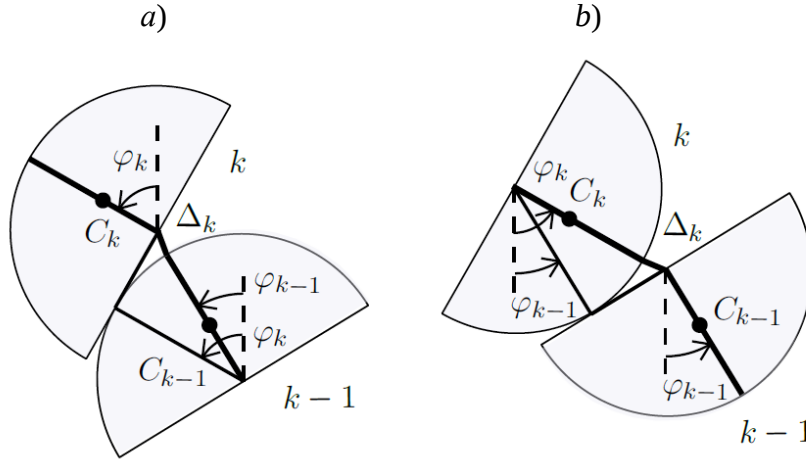


Рис. 2. Два соседних полуцилиндра в отклоненном положении в цепочках полуцилиндров с основаниями, обращенными: а) Вниз, б) Вверх

Для вычисления величины Δ_k наиболее просто определить проекции соответствующего участка нити на основание k -го полуцилиндра и на его радиус, перпендикулярный этому основанию, принимая во внимание отсутствие проскальзывания, после чего можно легко получить искомое выражение, а также сразу выписать его квадратичную аппроксимацию по обобщенным координатам, достаточную для дальнейших действий:

$$\Delta_k = \sqrt{\left[R(\varphi_k - \varphi_{k-1}) - R \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \right]^2 + \left[R - R \cos(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \right]^2} \approx \frac{R}{2} (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2. \quad (2)$$

Отметим, что формула (2) остается справедливой и для $k=1$, если ввести в рассмотрение фиктивное значение $\varphi_0 = 0$. Отсюда вытекает, что имеют место следующие формулы:

$$\Delta_1 = \frac{R}{2} \varphi_1^2, \quad \Delta_2 = \frac{R}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2, \quad \Delta_3 = \frac{R}{2} (\varphi_3 - \varphi_2)^2, \quad \dots, \quad \Delta_n = \frac{R}{2} (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2. \quad (3)$$

Что касается величин h_k , то для их определения можно записать согласно рис. 2, а следующее соотношение:

$$h_k = h_{k-1} - \alpha R \cos \varphi_{k-1} + R(\cos \varphi_k - 1) + R(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \sin \varphi_k + \alpha R \cos \varphi_k \approx h_{k-1} + \frac{1}{2} \alpha R (\varphi_{k-1}^2 - \varphi_k^2) + \frac{1}{2} R (\varphi_k^2 - 2\varphi_k \varphi_{k-1}), \quad (4)$$

где для краткости принято, что $\alpha = 4 / (3\pi)$, а также выписана квадратичная аппроксимация данного выражения. Легко понять, что соотношение (4) позволяет вычислить все значения h_k , $k = \overline{1, n}$, если положить для опорного неподвижного полуцилиндра $h_0 = 0$, а также принять во внимание, что $\varphi_0 = 0$. В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{R}{2}(1-\alpha)\varphi_1^2, \quad h_2 = \frac{R}{2}[\varphi_1^2 + (1-\alpha)\varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2], \\ h_3 &= \frac{R}{2}[\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + (1-\alpha)\varphi_3^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2\varphi_3], \quad \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

$$h_n = \frac{R}{2}[\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_{n-1}^2 + (1-\alpha)\varphi_n^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2\varphi_3 - \dots - 2\varphi_{n-1}\varphi_n].$$

Подставляя соотношения (3) и (5) в формулу (1) и вводя в рассмотрение ключевой безразмерный параметр задачи $f = F / P$, получим после несложных преобразований выражение для потенциальной энергии системы в квадратичной аппроксимации:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}PR[(n-\alpha+2f)\varphi_1^2 + (n-1-\alpha+2f)\varphi_2^2 + \\ &+ (n-2-\alpha+2f)\varphi_3^2 + \dots + (2-\alpha+2f)\varphi_{n-1}^2 + (1-\alpha+f)\varphi_n^2 - \\ &- 2(n-1+f)\varphi_1\varphi_2 - 2(n-2+f)\varphi_2\varphi_3 - \dots - 2(1+f)\varphi_{n-1}\varphi_n] = \frac{1}{2}PR\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{C}_n\boldsymbol{\varphi}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^T$ – столбец обобщенных координат, а $\mathbf{C}_n$ – матрица квазиупругих коэффициентов в обезразмеренном варианте, которая имеет следующую трехдиагональную структуру:

$$\mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} n-\alpha+2f & -(n-1+f) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -(n-1+f) & n-1-\alpha+2f & -(n-2+f) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -(n-2+f) & n-2-\alpha+2f & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2-\alpha+2f & -(1+f) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(1+f) & 1-\alpha+f \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Важно подчеркнуть, что матрицу (7) необходимо формировать с конца. Как известно, условием устойчивости тривиального положения равновесия системы, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = 0$, является требование положительной определенности матрицы (7), которое в свою очередь диктуется критерием Сильвестра, т. е. положительностью всех главных угловых миноров матрицы (7). Так, для $n=1$ из (7) будем иметь $c_1 = 1-\alpha+f$, и поскольку $\alpha = 4 / (3\pi)$, то очевидно, величина c_1 всегда является положительной при

любых значениях $f > 0$, отвечающих смыслу задачи. Для $n = 2$ матрица C_2 из (7) и условия ее положительной определенности принимают вид:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2 - \alpha + 2f & -(1 + f) \\ -(1 + f) & 1 - \alpha + f \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} 2 - \alpha + 2f > 0 \\ f^2 - (3\alpha - 2)f + \alpha^2 - 3\alpha + 1 > 0 \end{cases}, \quad (8)$$

и они сводятся к неравенству, которое является условием устойчивости:

$$f > \frac{1}{2} \left[(3 + \sqrt{5})\alpha - 2 \right] = \frac{2}{3\pi} (3 + \sqrt{5}) - 1 \approx 0.1111. \quad (9)$$

Наконец, подчеркнем, что при $n > 2$ условия устойчивости целесообразно определять, прибегая для решения системы детерминантных неравенств к использованию численных методов.

Переходя к расчетной схеме, представленной на рис. 1, *b*, и выбирая обобщенные координаты аналогичным образом, обратимся к рис. 2, *b*, где приведено отклоненное положение $(k - 1)$ -го и k -го полуцилиндров. Легко видеть, что в этом случае формулы (2) и (3) сохраняют справедливость, и для использования формулы (1) следует лишь модифицировать выражения (4) и (5). В самом деле, вместо (4) теперь согласно рис. 2, *b* будем иметь:

$$\begin{aligned} h_k &= h_{k-1} + \alpha R \cos \varphi_{k-1} - R(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \sin \varphi_{k-1} + R(\cos \varphi_{k-1} - 1) - \alpha R \cos \varphi_k \approx \\ &\approx h_{k-1} + \frac{1}{2} \alpha R (\varphi_k^2 - \varphi_{k-1}^2) + \frac{1}{2} R (\varphi_{k-1}^2 - 2\varphi_k \varphi_{k-1}), \end{aligned} \quad (10)$$

и, полагая в данном выражении $h_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$, получим соотношения:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{R}{2} \alpha \varphi_1^2, \quad h_2 = \frac{R}{2} (\varphi_1^2 + \alpha \varphi_2^2 - 2\varphi_1 \varphi_2), \\ h_3 &= \frac{R}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \alpha \varphi_3^2 - 2\varphi_1 \varphi_2 - 2\varphi_2 \varphi_3), \quad \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

$$h_n = \frac{R}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_{n-1}^2 + \alpha \varphi_n^2 - 2\varphi_1 \varphi_2 - 2\varphi_2 \varphi_3 - \dots - 2\varphi_{n-1} \varphi_n).$$

Подставляя теперь соотношения (3) и (11) в формулу (1), приходим в этой ситуации к следующему выражению для потенциальной энергии системы в квадратичной аппроксимации:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} PR \left[(n-1 + \alpha + 2f) \varphi_1^2 + (n-2 + \alpha + 2f) \varphi_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + (n-3 + \alpha + 2f) \varphi_3^2 + \dots + (1 + \alpha + 2f) \varphi_{n-1}^2 + (\alpha + f) \varphi_n^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2(n-1 + f) \varphi_1 \varphi_2 - 2(n-2 + f) \varphi_2 \varphi_3 - \dots - 2(1 + f) \varphi_{n-1} \varphi_n \right] = \frac{1}{2} PR \boldsymbol{\varphi}^T C_n \boldsymbol{\varphi}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^T$ есть столбец обобщенных координат, а матрица квазиупругих коэффициентов в безразмерном варианте C_n имеет вид:

$$C_n = \begin{bmatrix} n-1+\alpha+2f & -(n-1+f) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -(n-1+f) & n-2+\alpha+2f & -(n-2+f) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -(n-2+f) & n-3+\alpha+2f & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\alpha+2f & -(1+f) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(1+f) & \alpha+f \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Подчеркнем, что полученная матрица отличается от матрицы (7) из предыдущей задачи лишь заменой α на $1-\alpha$, при этом ее также следует рассматривать с конца. Условиями устойчивости тривиального положения равновесия системы здесь по аналогии являются условия положительной определенности матрицы (13), которые даются критерием Сильвестра. Так, для $n=1$ будем иметь из (13), что $c_1 = \alpha + f$, и эта величина, конечно, положительна при любом значении $f > 0$. Для $n=2$ матрица C_2 из (7), а также условия ее положительной определенности принимают вид:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1+\alpha+2f & -(1+f) \\ -(1+f) & \alpha+f \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} 1+\alpha+2f > 0 \\ f^2 - (1-3\alpha)f + \alpha^2 + \alpha - 1 > 0 \end{cases}, \quad (14)$$

так что условие устойчивости в этом случае определится неравенством:

$$f > \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{5} - (3 + \sqrt{5})\alpha \right] = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) - \frac{2}{3\pi} (3 + \sqrt{5}) \approx 0.5069. \quad (15)$$

Для случая $n > 2$ условия устойчивости и в этой задаче следует определять уже при помощи численных процедур.

Анализ результатов

Обратимся теперь к обсуждению результатов исследования на основе полученных выше выражений. Для этой цели удобно представить условия устойчивости тривиального положения равновесия для обеих задач в табличном виде при достаточно небольших значениях n (от 1 до 5), чтобы можно было наиболее просто осуществлять их сопоставление (таблица 1).

Таблица 1. Условия устойчивости цепочек полуцилиндров, стянутых упругой нитью, записанные в терминах безразмерного параметра $f = F / P$

Расчетная схема	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
Рис. 1, а	$f > 0$	$f > 0.1111$	$f > 2.6503$	$f > 7.8328$	$f > 16.4096$
Рис. 1, б	$f > 0$	$f > 0.5069$	$f > 3.3981$	$f > 9.0445$	$f > 18.2005$

Анализируя таблицу 1, нетрудно видеть, что при $n=1$ устойчивость равновесия имеет место при любом физически реализуемом значении силы натяжения нити (т. е. $f > 0$) в каждой из задач, тогда как с увеличением n критическое значение безразмерного параметра f , являющееся нижней границей условия устойчивости, начинает достаточно быстро возрастать, как этого и можно было ожидать. При этом важно подчеркнуть, что для принятых значений n от 1 до 5 в задаче, расчетная схема которой дана на рис. 1, *a*, критическое значение параметра f оказывается меньшим, чем в задаче, для которой расчетная схема представлена на рис. 1, *b*. Таким образом, полученные выражения позволяют при заданных значениях веса P одного полуцилиндра и их числа n в цепочке выяснить требования к силе натяжения нити F , которая обеспечивает устойчивость цепочки полуцилиндров. Кроме того, они также дают ответ на вопрос, какое наибольшее количество n полуцилиндров можно использовать в цепочке, чтобы обеспечить ее устойчивость при заданных значениях величин F и P . Наконец, эти результаты также позволяют дать ответ на вопрос о том, каким должно быть предельно допустимое значение веса полуцилиндра P при заданных значениях величин F и n , чтобы имела место устойчивость. Сказанное означает, что найденные условия устойчивости тривиального положения равновесия цепочек полуцилиндров позволяют решить сразу несколько смежных задач, а потому они помимо своего фундаментального значения могут играть важную роль и в практическом отношении.

В завершение разговора о рассматриваемых задачах отметим, что иногда более удобной оказывается запись условий устойчивости не в терминах ранее использованного безразмерного параметра $f = F / P$, представляющего собой отношение силы натяжения нити F к весу одного полуцилиндра P , а в терминах другого, связанного с ним безразмерного параметра $\tilde{f} = F / (nP) = f / n$, который характеризует отношение силы натяжения нити F к весу всей цепочки, равному nP . В таком случае условия устойчивости примут вид, приведенный в таблице 2, и теперь они позволяют оценить, во сколько раз сила натяжения нити должна превосходить общий вес цепочки полуцилиндров для обеспечения устойчивости исследуемого положения равновесия.

Таблица 2. Условия устойчивости цепочек полуцилиндров, стянутых упругой нитью, записанные в терминах безразмерного параметра $\tilde{f} = F / (nP) = f / n$

Расчетная схема	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
Рис. 1, <i>a</i>	$\tilde{f} > 0$	$\tilde{f} > 0.0556$	$\tilde{f} > 0.8834$	$\tilde{f} > 1.9582$	$\tilde{f} > 3.2819$
Рис. 1, <i>b</i>	$\tilde{f} > 0$	$\tilde{f} > 0.2535$	$\tilde{f} > 1.1327$	$\tilde{f} > 2.2611$	$\tilde{f} > 4.5501$

Заключение

В настоящей работе были рассмотрены две задачи об устойчивости положения равновесия цепочек полуцилиндров, стянутых упругой нитью, с различным расположением оснований полуцилиндров, которые были обращены либо вниз, либо вверх. В каждой из этих задач были получены условия устойчивости в зависимости от числа полуцилиндров в цепочке в терминах ключевого безразмерного параметра задачи, характеризующего отношение силы натяжения нити к весу одного полуцилиндра. Показано, что критическое значение ключевого безразмерного параметра для обеих задач повышается с увеличением числа полуцилиндров, причем в первой задаче оно оказывается меньшим, чем во второй. Кроме того, установлены и требования к силе натяжения нити, обеспечивающей устойчивость, по отношению к весу всей цепочки полуцилиндров. Полученные результаты представляют интерес для аналитической статики и теории устойчивости, а также они могут оказаться полезными для технических приложений. Наконец, рассмотренные в данной работе примеры могут использоваться в учебной практике, а также служить базой для постановки более сложных задач об устойчивости равновесия систем с регулярной структурой и их последующего решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Boruk I.G., Lobas L.G. Stability of equilibrium for an inverted two-link mathematical pendulum with critical tracking forces. 1999. International Applied Mechanics. 35, pp. 962-967.
- [2] Sosnitskii S.P. The stabilization of the equilibrium of conservative systems using gyroscopic forces. 2000. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 64(1), pp. 53-63.
- [3] Zhechev M.M. Asymptotic Stability of the Equilibrium of Singular Mechanical Systems. 2001. Automation and Remote Control. 62, pp. 383-390.
- [4] Burov A.A. The existence and stability of the equilibria of mechanical systems with constraints produced by large potential forces. 2003. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 67(2), pp. 193-200.
- [5] Александров А.Ю., Бузлукова О.А., Косов А.А. О сохранении устойчивости положений равновесия механических систем при эволюции диссипативных сил. Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. 2007. Вып. 1. С. 1-15.
- [6] Александров А.Ю., Косов А.А. Об устойчивости гироскопических систем. Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. 2013. Вып. 2. С. 3-13.

- [7] Байков А.Е., Майоров А.Ю. Об устойчивости положения равновесия дискретной модели заправочного шланга под действием реактивной силы. Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 1. С. 127-146.
- [8] Krasil'nikov P.S., Maiorov A.Y. On the Stability of Equilibrium of a Mechanical System with Tracking, Potential, and Small Dissipative Forces. 2018. Mechanics of Solids. 53, pp. 52-59.
- [9] Селюцкий Ю.Д. О смене характера устойчивости положения равновесия при изменении жесткости по одной из обобщенных координат. Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 491. С. 58-61.
- [10] Козлов В.В. Об устойчивости циркуляционных систем. Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 494. С. 47-50.
- [11] Kozlov V.V. Stability of circulatory systems under viscous friction forces. 2020. Mechanics of Solids. 55(8), pp. 1135-1141.
- [12] Selyutskiy Y.D. Potential forces and alternation of stability character in non-conservative systems. 2021. Applied mathematical modelling. 90, pp. 191-199.
- [13] Kozlov V.V. On the instability of equilibria of mechanical systems in nonpotential force fields in the case of typical degeneracies. 2021. Acta Mechanica. 232(9), pp. 3331-3341.
- [14] Puzyrov V., Awrejcewicz J., Losyeva N., Savchenko N. On the stability of the equilibrium of the double pendulum with follower force: some new results. 2022. Journal of Sound and Vibration. 523, pp. 116699.
- [15] Хашба Т.Н., Смирнов А.С. Устойчивость равновесия многозвенных маятников. Молодежь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: Материалы V Всероссийской национальной научной конференции молодых ученых. Комсомольск-на-Амуре, 11-15 апреля 2022 г. 2022. Ч. 2. С. 95-97.
- [16] Исполлов Ю.Г. Вычислительные методы в теории колебаний. СПб.: изд-во Политехнического ун-та, 2008. 124 с.
- [17] Смирнов А.С., Дегилевич Е.А. Колебания цепных систем. СПб.: Политех-пресс, 2021. 246 с.
- [18] Смольников Б.А., Смирнов А.С. Колебания струны с внутренним трением. 10-я Международная научно-практическая конференция Современное машиностроение: Наука и образование (ММЕSE-2021). Санкт-Петербург, 24 июня 2021. 2021. С. 192-203.

EQUILIBRIUM STABILITY OF CHAINS OF SEMI-CYLINDERS STRETCHED BY AN ELASTIC THREAD

¹Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia;

²Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Russia.

Abstract

The paper considers two problems of the stability of the equilibrium of chains of heavy semi-cylindrical bars, which are pulled together by an elastic thread passing through holes drilled along the radius. Such systems model various load-bearing structures intended for high-rise buildings. For each of the problems the construction of the potential energy of the system in a quadratic approximation is given, and on its basis a matrix of quasi-elastic coefficients is formed. Using the Sylvester criterion, stability conditions of the trivial equilibrium position of chains of semi-cylinders depending on their number are revealed, which determine requirements for the thread tension force. These results are presented in tabular form, which makes it possible to compare stability conditions for both problems. The conclusions drawn are not only of theoretical interest, but can also be useful in practical terms for solving problems of applied mechanics.

Key words: semi-cylinder, chain, elastic thread, potential energy, matrix of quasi-elastic coefficients, equilibrium stability, Sylvester criterion, dimensionless parameter, stability conditions.

REFERENCES

- [1] Boruk I.G., Lobas L.G. Stability of equilibrium for an inverted two-link mathematical pendulum with critical tracking forces. 1999. International Applied Mechanics. 35, pp. 962-967.
- [2] Sosnitskii S.P. The stabilization of the equilibrium of conservative systems using gyroscopic forces. 2000. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 64(1), pp. 53-63.
- [3] Zhechev M.M. Asymptotic Stability of the Equilibrium of Singular Mechanical Systems. 2001. Automation and Remote Control. 62, pp. 383-390.
- [4] Burov A.A. The existence and stability of the equilibria of mechanical systems with constraints produced by large potential forces. 2003. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 67(2), pp. 193-200.

- [5] Aleksandrov A.Yu., Buzlukova O.A., Kosov A.A. On the maintenance of the equilibrium position stability of mechanical systems under the evolution of dissipative forces. 2007. Vestnik St. Petersburg University, ser. 10. 1, pp. 1-15. (rus.)
- [6] Aleksandrov A.Yu., Kosov A.A. On stability of gyroscopic systems. 2013. Vestnik St. Petersburg University, ser. 10. 2, pp. 3-13. (rus.)
- [7] Baikov A.E., Mayorov A.Yu. On the equilibrium position stability of discrete model of filling hose under the action of reactive force. 2015. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 11(1), pp. 127-146. (rus.)
- [8] Krasil'nikov P.S., Maiorov A.Y. On the Stability of Equilibrium of a Mechanical System with Tracking, Potential, and Small Dissipative Forces. 2018. Mechanics of Solids. 53, pp. 52-59.
- [9] Selyutskiy Y.D. Change in the character of stability of equilibrium in the case of a change in the rigidity of a generalize coordinate. 2020. Doklady Physics. 65(3), pp. 109-111.
- [10] Kozlov V.V. The stability of circulatory systems. 2020. Doklady Physics. 65(9), pp. 323-325.
- [11] Kozlov V.V. Stability of circulatory systems under viscous friction forces. 2020. Mechanics of Solids. 55(8), pp. 1135-1141.
- [12] Selyutskiy Y.D. Potential forces and alternation of stability character in non-conservative systems. 2021. Applied mathematical modelling. 90, pp. 191-199.
- [13] Kozlov V.V. On the instability of equilibria of mechanical systems in nonpotential force fields in the case of typical degeneracies. 2021. Acta Mechanica. 232(9), pp. 3331-3341.
- [14] Puzyrov V., Awrejcewicz J., Losyeva N., Savchenko N. On the stability of the equilibrium of the double pendulum with follower force: some new results. 2022. Journal of Sound and Vibration. 523, pp. 116699.
- [15] Khashba T.N., Smirnov A.S. Equilibrium stability of multi-link pendulums. Youth and Science: actual problems of fundamental and applied research, Materials of the V All-Russian scientific conference of students, postgraduates and young scientists. Komsomolsk-on-Amur, April 11-15, 2022. 2022. Vol. 2. pp. 95–97. (rus.)
- [16] Ispolov Yu.G. Computational methods in the theory of oscillations. St. Petersburg, Polytechnic University, 2008. 124 p. (rus.)
- [17] Smirnov A.S., Degilevich E.A. Oscillations of Chain Systems. St. Petersburg, Polytech-Press, 2021. 246 p. (rus.)
- [18] Smolnikov B.A., Smirnov A.S. String oscillations with internal friction. 10th Conference on Modern Mechanical Engineering: Science and Education (MMESE-2021). Saint Petersburg, 24 June 2021. 2021. pp. 192-203. (rus.)