

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА



<sup>1</sup>Алексей Сергеевич Смирнов  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра  
Великого  
Институт проблем машиноведения Российской академии наук  
Россия, Санкт-Петербург  
Тел.: (812)552-7778, E-mail: [smirnov.alexey.1994@gmail.com](mailto:smirnov.alexey.1994@gmail.com)



<sup>2</sup>Серафим Андреевич Булов  
Центр инженерно-физических расчетов и анализа  
(АО «ЦИФРА»)  
Россия, Санкт-Петербург  
Тел.: (812)648-4286, E-mail: [tech.nature.engineering@gmail.com](mailto:tech.nature.engineering@gmail.com)



<sup>3</sup>Борис Александрович Смольников  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра  
Великого  
Институт проблем машиноведения Российской академии наук  
Россия, Санкт-Петербург  
Тел.: (812)552-7778, E-mail: [smolnikovba@yandex.ru](mailto:smolnikovba@yandex.ru)

### Аннотация

В работе рассматриваются вопросы о построении нелинейных форм колебаний трехзвенного манипулятора, работающего в поле силы тяжести и обладающего идентичными параметрами невесомых звеньев и концевых грузов, с использованием численных процедур. Приводится нелинейная математическая модель колебаний системы, и в результате ее обчета при помощи численного интегрирования определяются начальные условия движения, приводящие к одночастотным колебаниям по первой, второй или третьей нелинейной форме. Обсуждаются основные качественные особенности и количественные характеристики всех трех нелинейных форм колебаний. Кроме того, строятся графические зависимости, которые

иллюстрируют изменение всех ключевых величин на периоде нелинейных колебаний для каждой из нелинейных форм. Полученные результаты представляют интерес для аналитической механики и теории нелинейных колебаний, а также они могут оказаться полезными и при решении конкретных прикладных задач в области робототехники и биомеханики.

*Ключевые слова:* трехзвенный манипулятор, углы отклонения звеньев от вертикали, углы поворота в шарнирах, нелинейная форма колебаний, частота и период нелинейных колебаний.

## **Введение**

Трехзвенный манипулятор, который работает в поле силы тяжести и представляет собой тройной гравитационный маятник, а также его разнообразные модификации в последнее время часто принимаются в качестве объектов исследования в научных работах [1-8]. Это связано с тем, что подобные конструкции активно применяются в робототехнике, где они служат моделями для различных манипуляторов, промышленных роботов и экзоскелетов или представляют собой элементы более сложных составных конструкций, вследствие чего существенно возрастает важность вопросов управления такими системами [9-15]. Помимо этого трехзвенная маятниковая модель имеет большое значение и в задачах биомеханики, поскольку она является весьма адекватным приближением к конечностям живых организмов, а также она описывает позу человека и в целом [16-19].

Отдельного внимания заслуживает вопрос о построении и анализе нелинейных форм колебаний такого трехзвенного манипулятора. В самом деле, из всех возможных режимов движения нелинейных систем основное значение представляют именно одночастотные режимы, поскольку их целесообразно использовать на практике, особенно при моделировании управляемого разгона этих систем с постепенным переходом от колебаний с весьма малыми амплитудами и до достаточно больших амплитуд [20-22].

В этой связи целью настоящего исследования является численное моделирование нелинейных форм колебаний трехзвенного манипулятора, связанное с установлением их конкретной структуры и сопоставлением их характеристик с аналогичными величинами для форм малых колебаний.

## **Математическая модель колебаний трехзвенного манипулятора**

Рассмотрим трехзвенный манипулятор в поле силы тяжести, звенья которого для упрощения исследования предполагаются невесомыми и имеющими длину  $l$ , а на конце каждого звена помещен точечный груз массой  $m$  (рис. 1). В качестве обобщенных координат будем принимать углы отклонения звеньев манипулятора  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  от вертикали. Следует

отметить, что в задачах управления движением подобных систем чаще в качестве обобщенных координат принимаются углы поворота в шарнирах  $\theta_1 = \varphi_1$ ,  $\theta_2 = \varphi_2 - \varphi_1$  и  $\theta_3 = \varphi_3 - \varphi_2$ , т. е. межзвенные углы, однако уравнения движения в этих углах оказываются более сложными. Поэтому мы будем записывать уравнения движения в абсолютных углах, но при обсуждении результатов обратим внимание и на поведение относительных углов.

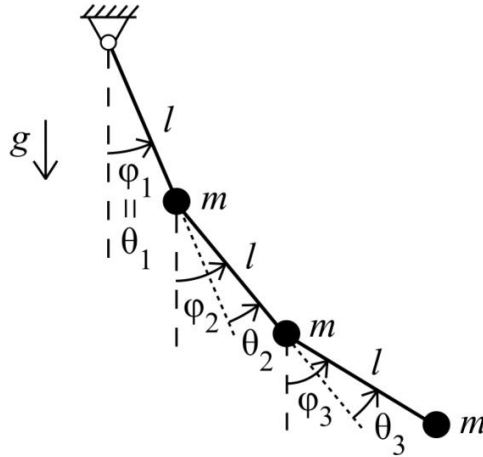


Рис. 1. Расчетная схема трехзвенного манипулятора

Принимая во внимание сказанное и опираясь на работу [22], запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий трехзвенного манипулятора в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \left[ 3\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 4\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + 2\cos(\varphi_3 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 + \right. \\ \left. + 2\cos(\varphi_3 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3 \right] = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}) \dot{\boldsymbol{\varphi}} = T(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}), \quad (1)$$

$$\Pi = -mgl(3\cos \varphi_1 + 2\cos \varphi_2 + \cos \varphi_3) = \Pi(\boldsymbol{\varphi}), \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$  – столбец обобщенных координат, а матрица  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})$  кинетической энергии имеет форму:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}) = ml^2 \begin{bmatrix} 3 & 2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) & \cos(\varphi_3 - \varphi_1) \\ 2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) & 2 & \cos(\varphi_3 - \varphi_2) \\ \cos(\varphi_3 - \varphi_1) & \cos(\varphi_3 - \varphi_2) & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

причем она является симметричной:  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ . Подставляя выражения для кинетической и потенциальной энергий (1) и (2) в матричное уравнение Лагранжа второго рода [23]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varphi}}, \quad (4)$$

получим после несложных преобразований искомое нелинейное матричное уравнение движения трехзвенного манипулятора:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi})\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 + \mathbf{C}\sin \boldsymbol{\varphi} = 0. \quad (5)$$

Здесь для удобства сделаны условные обозначения:  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 = [\dot{\varphi}_1^2, \dot{\varphi}_2^2, \dot{\varphi}_3^2]^T$  – столбец квадратов обобщенных скоростей,  $\sin \boldsymbol{\varphi} = [\sin \varphi_1, \sin \varphi_2, \sin \varphi_3]^T$  – столбец синусов обобщенных координат, а матрицы  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi})$  и  $\mathbf{C}$  определяются следующими соотношениями:

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}) = ml^2 \begin{bmatrix} 0 & -2\sin(\varphi_2 - \varphi_1) & -\sin(\varphi_3 - \varphi_1) \\ 2\sin(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 & -\sin(\varphi_3 - \varphi_2) \\ \sin(\varphi_3 - \varphi_1) & \sin(\varphi_3 - \varphi_2) & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{C} = mgl \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

причем, как видно, матрица  $\mathbf{G}$  является кососимметричной:  $\mathbf{G}^T = -\mathbf{G}$ , тогда как матрица  $\mathbf{C}$  является постоянной и симметричной:  $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$ .

Ясно, что линейная математическая модель колебаний трехзвенного манипулятора получится, если линеаризовать уравнение (5), после чего будем иметь для малых колебаний следующее матричное уравнение [24]:

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varphi} = 0, \quad (8)$$

где постоянные матрицы инерционных коэффициентов  $\mathbf{A}_0$  и квазиупругих коэффициентов  $\mathbf{C}_0$  линейной модели имеют вид [25]:

$$\mathbf{A}_0 = ml^2 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi} = 0), \quad \mathbf{C}_0 = mgl \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{C}. \quad (9)$$

Разыскивая решение уравнения (8) в виде гармонических колебаний на частоте  $k_0$  (подчеркнем, что индекс «0» ставится здесь и далее для того, чтобы обозначить принадлежность данной частоты к линейной модели) и с формой колебаний  $\boldsymbol{\Phi}$ :

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\Phi} \cos(k_0 t + \alpha), \quad (10)$$

будем иметь следующее алгебраическое матричное уравнение:

$$(\mathbf{C}_0 - k_0^2 \mathbf{A}_0) \boldsymbol{\Phi} = 0. \quad (11)$$

Условием существования его нетривиального решения является равенство нулю определителя  $\det(\mathbf{C}_0 - k_0^2 \mathbf{A}_0) = 0$ . Принимая во внимание выражения (9) и переходя к безразмерной частоте  $p_0 = k_0 / k$ , где  $k = \sqrt{g/l}$  – частота малых колебаний обычного маятника, получим частотное уравнение:

$$p_0^6 - 9p_0^4 + 18p_0^2 - 6 = 0, \quad (12)$$

откуда находим безразмерные частоты колебаний линейной модели:

$$p_{10} = 0.645, \quad p_{20} = 1.515, \quad p_{30} = 2.508. \quad (13)$$

Для дальнейшего анализа нам понадобятся периоды колебаний системы в рамках линейной модели, равные  $t_{s0} = 2\pi / k_{s0}$ , или сразу в безразмерном варианте  $\tau_{s0} = 2\pi / p_{s0} = kt_{s0}$ , что в явном виде дает следующие значения:

$$\tau_{10} = 9.744, \quad \tau_{20} = 4.148, \quad \tau_{30} = 2.505. \quad (14)$$

Далее из матричного уравнения (11) после подстановки в него частот колебаний с учетом (13) можно найти и формы колебаний линейной модели, которые определяются с точностью до постоянного множителя:

$$\Phi_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.292 \\ 1.631 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.353 \\ -2.398 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.645 \\ 0.767 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Таким образом, при движении системы по какой-либо из форм малых колебаний  $\Phi_{(s)}$  столбец обобщенных координат  $\Phi$  и столбец обобщенных скоростей  $\dot{\Phi}$  будут изменяться по следующим законам:

$$\Phi = a_s \Phi_{(s)} \cos(k_{s0}t + \alpha_s), \quad \dot{\Phi} = -a_s k_{s0} \Phi_{(s)} \sin(k_{s0}t + \alpha_s), \quad (16)$$

где  $a_s$  – масштабный множитель. Отсюда вытекает, что амплитуды соответствующих элементов столбцов  $\Phi$  и  $\dot{\Phi} / k_{s0}$  будут одинаковыми. Поэтому при дальнейшем построении графиков все обобщенные скорости будут отнесены к частотам малых колебаний  $k_{s0}$ , что позволит лишней раз проследить отличия нелинейной формы колебаний от линейной.

### Нелинейные формы колебаний трехзвенного манипулятора

Перейдем теперь к численному моделированию нелинейных форм колебаний трехзвенного манипулятора, которые представляют собой естественное обобщение понятия линейной формы колебаний на случай нелинейной системы. Поэтому ставится задача об определении таких начальных условий движения, которые приводили бы к одночастотным колебаниям системы по всем степеням свободы в нелинейной системе по каждой из трех нелинейных форм колебаний в отдельности. На первый взгляд, для решения данного вопроса при помощи численных методов следует задать, например, начальное отклонение первого звена и затем подобрать такие начальные отклонения двух оставшихся звеньев, чтобы, предоставив систему самой себе, обеспечить одночастотное колебательное движение. Однако такой путь для системы с тремя степенями свободы оказывается достаточно сложным ввиду необходимости перебора пары начальных условий и численного интегрирования матричного уравнения движения (5) для каждого из вариантов. В этой связи более рациональный путь получения нелинейных форм колебаний состоит в использовании коллинеарного управления, которое, как известно, позволяет осуществлять разгон системы с малых и до достаточно больших амплитуд, не нарушая

формы малых колебаний, а постепенно переводя их в нелинейные формы колебаний [21, 22]. Для использования коллинеарного управления следует формировать управляющие моменты в шарнирах манипулятора на основе принципа обратной связи, считая, что в шарнирах установлены датчики, считывающие значения межзвенных углов и соответствующих угловых скоростей. Важным достоинством коллинеарного управления является то, что его формульная запись не зависит от выбора обобщенных координат [22]. Поэтому для учета действия коллинеарного управления в данной задаче не имеет смысла переходить к межзвенным переменным состояниям, а достаточно добавить в правую часть матричного уравнения движения (5) столбец обобщенных сил  $\mathbf{Q}$ , отвечающий столбцу обобщенных координат  $\boldsymbol{\varphi}$ , формируя его в следующем виде [21]:

$$\mathbf{Q} = \gamma \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} = \gamma \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}) \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (17)$$

где учтена формула (1), а  $\gamma$  – коэффициент усиления, который можно принять постоянной величиной. В силу сказанного следует подчеркнуть, что элементы столбца  $\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2, Q_3]^T$ , отвечающего столбцу абсолютных обобщенных координат  $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$ , не являются управляющими моментами в шарнирах, которые представляют собой элементы столбца  $\mathbf{M} = [M_1, M_2, M_3]^T$ , отвечающего столбцу относительных обобщенных координат  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ . Учитывая выражения для элементарной работы

$$\delta W = \mathbf{Q}^T \delta \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{M}^T \delta \boldsymbol{\theta} \quad (18)$$

и то, что  $\theta_1 = \varphi_1$ ,  $\theta_2 = \varphi_2 - \varphi_1$  и  $\theta_3 = \varphi_3 - \varphi_2$ , можно при необходимости получить и выражения для управляющих моментов в принятых в рамках матричного уравнения (5) переменных состояния:

$$M_1 = Q_1 + Q_2 + Q_3, \quad M_2 = Q_2 + Q_3, \quad M_3 = Q_3. \quad (19)$$

Возвращаясь к вопросу о нелинейных формах колебаний, обратимся к численному интегрированию матричного уравнения (5) с правой частью в виде (17), полагая начальные условия достаточно малыми и отвечающими поочередно каждой из форм малых колебаний (15), например, задавая лишь начальные отклонения звеньев в соответствии с этими формами без начальных угловых скоростей. В процессе управляемого разгона системы можно наблюдать постепенный дрейф формы колебаний из линейного варианта в нелинейный по мере увеличения амплитуд, и при достижении того или иного уровня полной энергии можно отключить коллинеарное управление, вследствие чего система перейдет в консервативное движение уже по нелинейной форме колебаний. Анализируя полученные в ходе численного эксперимента зависимости, можно установить амплитуды колебаний каждого из углов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  в конечном режиме движения.

Ясно, что при их задании в качестве начальных условий движения в исходной консервативной задаче и последующего предоставления системы самой себе мы будем получать движение по нелинейной форме колебаний. Конечно, указанный способ нахождения надлежащих начальных условий движения, приводящих к колебаниям по той или иной форме, оказывается намного более простым, чем поиск этих условий методом перебора.

Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах. Следуя всему описанному выше, можно установить, что для создания движения системы по первой нелинейной форме колебаний можно положить начальные значения отклонений звеньев манипулятора от вертикали в виде

$$\varphi_{10} = 0.270, \quad \varphi_{20} = 0.349, \quad \varphi_{30} = 0.430 \quad (20)$$

без задания начальных угловых скоростей, так что эти величины, конечно, и будут являться амплитудами колебаний звеньев  $A_{11}$ ,  $A_{21}$  и  $A_{31}$ . Интересно выяснить, чему равны соотношения между этими амплитудами. Вычисляя их согласно (20), будем иметь следующие значения:

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = 1.293, \quad \frac{A_{31}}{A_{11}} = 1.593, \quad (21)$$

и они уже несколько отличаются от соответствующих отношений для первой формы малых колебаний, как это следует из столбца  $\Phi_{(1)}$  в (15), а именно, на 0.1% и 2.3% соответственно. Для создания колебаний системы по второй нелинейной форме можно принять следующие начальные значения углов отклонения манипулятора от вертикали:

$$\varphi_{10} = 0.254, \quad \varphi_{20} = 0.114, \quad \varphi_{30} = -0.661, \quad (22)$$

и вновь отпустить систему без начальных угловых скоростей. В этом случае соотношения между амплитудами  $A_{12}$ ,  $A_{22}$  и  $A_{32}$  примут вид:

$$\frac{A_{22}}{A_{12}} = 0.449, \quad \frac{A_{32}}{A_{12}} = -2.602, \quad (23)$$

и они уже заметно отличаются от аналогичных отношений для второй формы колебаний из линейной модели, как это видно из столбца  $\Phi_{(2)}$  в (15), а именно, на 27.2% и 8.5% соответственно. Наконец, для того чтобы система двигалась по третьей нелинейной форме колебаний, можно положить, что движение начинается из состояния покоя при задании следующих начальных значений обобщенных координат:

$$\varphi_{10} = 0.288, \quad \varphi_{20} = -0.440, \quad \varphi_{30} = 0.174, \quad (24)$$

так что соотношения между амплитудами  $A_{13}$ ,  $A_{23}$  и  $A_{33}$  здесь таковы:

$$\frac{A_{23}}{A_{13}} = -1.583, \quad \frac{A_{33}}{A_{13}} = 0.626. \quad (25)$$

Видно, что они тоже ощутимо отличаются от соответствующих отношений для малых колебаний, которые определяются столбцом  $\Phi_{(3)}$  в (15), а

именно, на 3.8% и 18.4% соответственно. Кроме того, выпишем значения периодов нелинейных колебаний в безразмерном варианте при движении по каждой из нелинейных форм при принятых начальных условиях движения (20), (22) и (24) и в отсутствие начальных угловых скоростей:

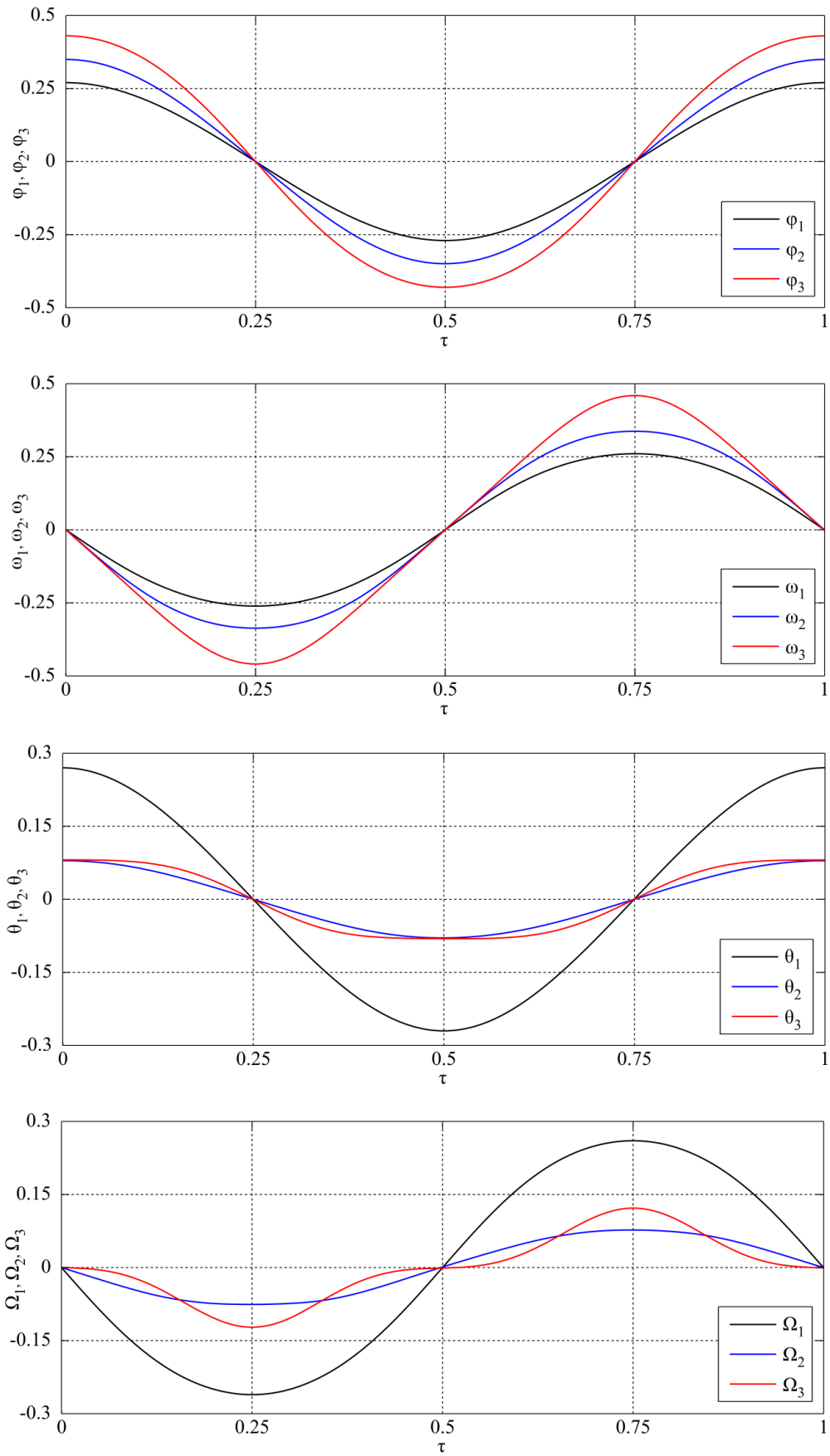
$$\tau_1 = 9.811, \quad \tau_2 = 4.812, \quad \tau_3 = 3.284. \quad (26)$$

Сопоставляя их со значениями периодов колебаний (14) из линейной модели, заключаем, что различия составляют соответственно на 0.7%, 16% и 31.1%, так что последние два значения (26) имеют существенные отличия от тех значений, которые имели место при малых колебаниях.

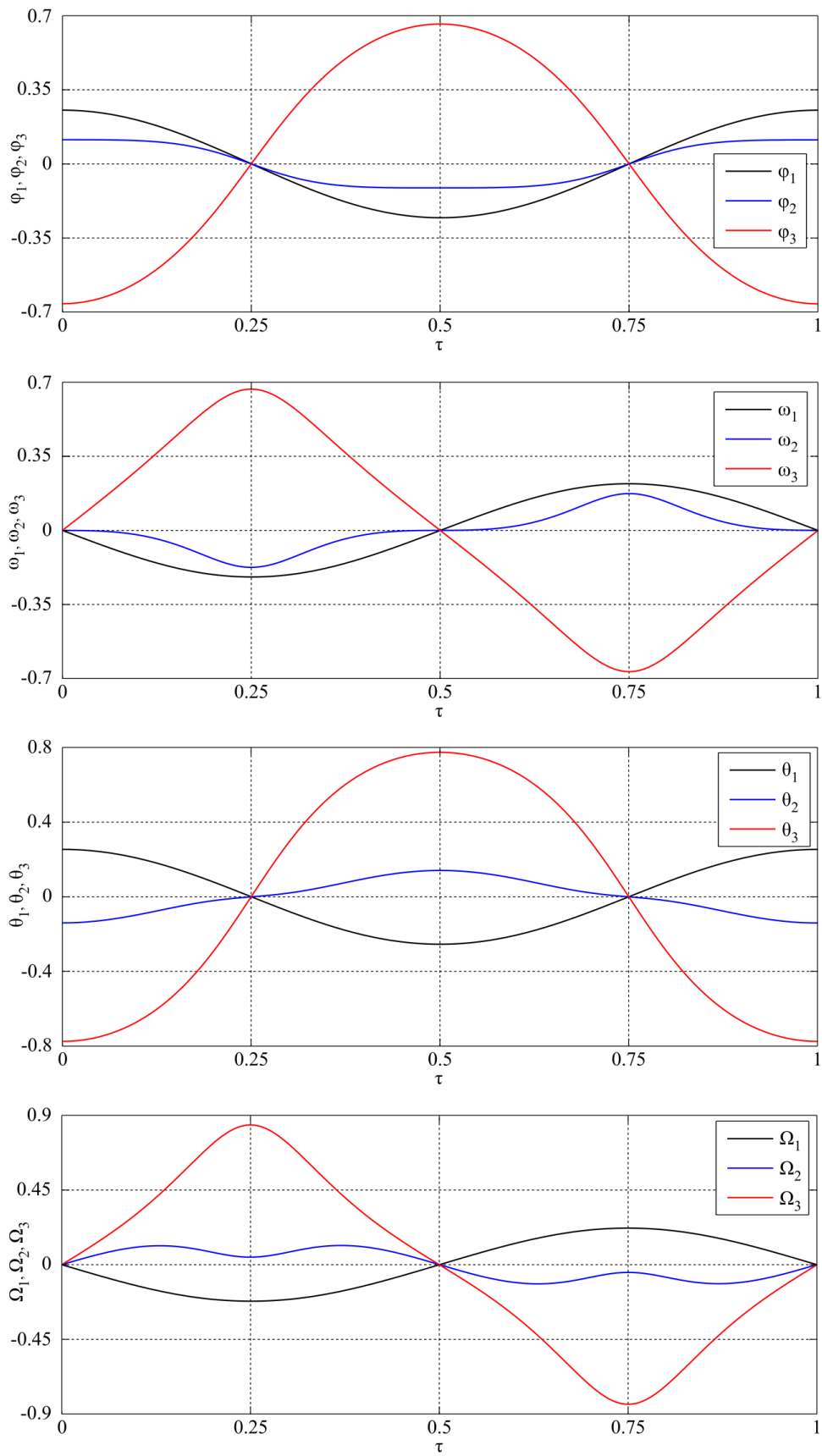
Остается привести графические зависимости всех ключевых величин, наглядно демонстрирующих движение трехзвенного манипулятора по каждой из нелинейных форм колебаний в отдельности на одном периоде колебаний. Для удобства мы будем масштабировать время путем введения безразмерного времени  $\tau = t/t_s$ , которое и будет откладываться по горизонтальной оси, причем  $t_s = \tau_s / k$  – истинные периоды нелинейных колебаний, которые отвечают безразмерным величинам (26). Это действие приводит к тому, что для каждой из нелинейных форм колебаний будем иметь, что на одном периоде колебаний  $\tau$  изменяется от 0 до 1. Будем строить для каждой из нелинейных форм колебаний графики зависимости для четырех наборов величин от  $\tau$ . В первую очередь, необходимо выявить поведение абсолютных углов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ . Во-вторых, интересно оценить и изменение соответствующих безразмерных угловых скоростей  $\omega_1 = \dot{\varphi}_1 / k_{s0}$ ,  $\omega_2 = \dot{\varphi}_2 / k_{s0}$  и  $\omega_3 = \dot{\varphi}_3 / k_{s0}$ , где обезразмеривание производится путем деления истинных угловых скоростей на частоты малых колебаний  $k_{s0}$ , как это уже было обозначено ранее. Далее следует представить и поведение относительных углов, т. е.  $\theta_1 = \varphi_1$ ,  $\theta_2 = \varphi_2 - \varphi_1$  и  $\theta_3 = \varphi_3 - \varphi_2$ , отражающих отклонение звеньев манипулятора друг относительно друга. Наконец, для полноты картины нужно выяснить и то, как будут изменяться соответствующие им угловые скорости, обезразмеренные аналогичным образом, что и ранее:  $\Omega_1 = \dot{\theta}_1 / k_{s0}$ ,  $\Omega_2 = \dot{\theta}_2 / k_{s0}$  и  $\Omega_3 = \dot{\theta}_3 / k_{s0}$ . Графики зависимости всех указанных величин от безразмерного времени  $\tau$  на одном периоде нелинейных колебаний при движении по каждой из трех нелинейных форм колебаний приведены на рис. 2, 3 и 4 соответственно.

Легко видеть, что построенные графики как в качественном, так и в количественном отношении отличаются от гармонических зависимостей, присущих линейной форме колебаний согласно (16), причем некоторые из них весьма существенно. Поэтому вычисленные ранее соотношения амплитуд (21), (23) и (25) не характеризуют полностью форму колебаний, как это было в линейной модели, где столбцы (15) давали однозначное представление о формах малых колебаний, но, тем не менее, указанные отношения дают важное представление о нелинейных формах колебаний.





**Рис. 2.** Движение системы по первой нелинейной форме колебаний



**Рис. 3.** Движение системы по второй нелинейной форме колебаний

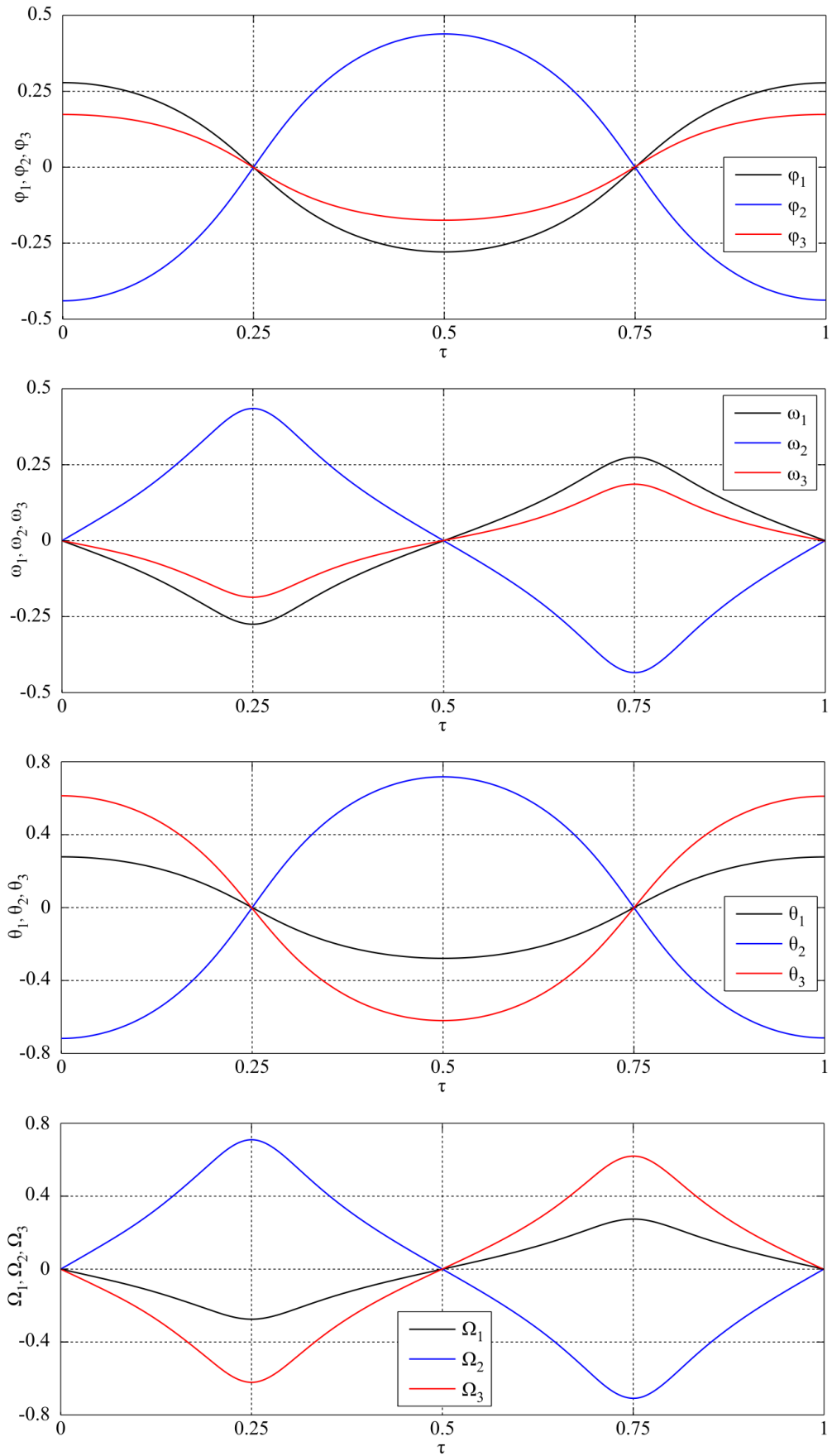


Рис. 4. Движение системы по третьей нелинейной форме колебаний

Сказанное означает, что для полного описания движения системы по нелинейной форме колебаний необходимо дать конкретную зависимость всех обобщенных координат от времени, а не только указать соотношение амплитуд колебаний вдобавок к частоте, как это было в линейном случае ввиду гармонического характера движения. Подчеркнем лишний раз, что при детальном рассмотрении графиков, приведенных на рис. 2, 3 и 4, можно видеть некоторое различие между амплитудами соответствующих обобщенных координат  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и безразмерных обобщенных скоростей  $\omega_1 = \dot{\varphi}_1 / k_{s0}, \omega_2 = \dot{\varphi}_2 / k_{s0}, \omega_3 = \dot{\varphi}_3 / k_{s0}$ . Указанный факт также подчеркивает нелинейный характер данных зависимостей ввиду еще одного их отличия в количественном отношении от аналогичных графиков в линейной модели, где указанные амплитуды согласно (16) были одинаковыми, помимо всех тех различий в соотношениях амплитуд колебаний обобщенных координат и периодах колебаний, о которых уже было подробно сказано выше.

### **Заключение**

Резюмируя результаты данного исследования, можно заключить, что понятие формы колебаний в нелинейной системе заметно усложняется по сравнению с традиционной формой колебаний линейной модели, а потому оно требует тщательного анализа. На примере трехзвенного манипулятора при помощи численного интегрирования было продемонстрировано, как изменяются на одном периоде нелинейных колебаний углы отклонения его звеньев от вертикали и межзвенные углы, а также соответствующие им угловые скорости при движении по каждой из трех нелинейных форм колебаний. Приведенные графические зависимости отчетливо показывают существенно негармонический характер этих колебаний и их весьма нетривиальную структуру. Кроме того, были указаны и количественные показатели нелинейных форм колебаний, а также дано их сравнение с аналогичными величинами для линейных форм. Полученные результаты имеют фундаментальное значение для аналитической механики и теории нелинейных колебаний, а также они могут найти практическое применение и в прикладных задачах современной робототехники и биомехатроники. Наконец, в качестве дальнейшего развития данной задачи можно отметить построение нелинейных форм колебаний трехзвенного манипулятора в первом приближении при помощи асимптотических методов.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Иванова А.И. Об устойчивости положения равновесия трехзвенного маятника под действием следящей силы. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2004. № 3. С. 19-26.

- [2] Awrejcewicz J., Kudra G., Lamarque C.-H. Investigation of triple pendulum with impacts using fundamental solution matrices. 2004. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 14(2), pp. 4191-4213.
- [3] Евдокименко А.П. Устойчивость и ветвление относительных равновесий трехзвенного маятника в быстро вращающейся системе отсчета. *Прикладная математика и механика*. 2009. Т. 73. № 6. С. 902-920.
- [4] Chen W., Theodomile N. Simulation of a triple inverted pendulum based on fuzzy control. 2016. *World Journal of Engineering and Technology*. 4, pp. 267-272.
- [5] Грибков В.А., Хохлов В.О. Экспериментальное исследование устойчивости обращенных стабилизируемых маятников. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2017. № 2. С. 22-39.
- [6] Архипова И.М. О стабилизации тройного перевернутого маятника с помощью вибрации точки опоры с произвольной частотой. *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия*. 2019. Т. 6. Вып. 2. С. 281-287.
- [7] Kovalchuk V. Triple inverted pendulum with a follower force: decomposition on the equations of perturbed motion. 2020. *Danish Scientific Journal*. 36, pp. 46-48.
- [8] Смирнов А.С., Дегилевич Е.А. Колебания цепных систем. СПб.: Политех-пресс, 2021. 246 с.
- [9] Анохин Н.В. Приведение многозвенного маятника в положение равновесия с помощью одного управляющего момента. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2013. № 5. С. 44-53.
- [10] Glück T., Eder A., Kugi A. Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation. 2013. *Automatica*. 49(3), pp. 801-808.
- [11] Лоскутов Ю.В., Кудрявцев И.А. Оценка максимального момента в коленном приводе экзоскелета при вставании с опоры. *Вестник ПГТУ. Сер. Материалы. Конструкции. Технологии*. 2018. № 3 (7). С. 55-62.
- [12] Ананьевский И.М. Управление трехзвенным перевернутым маятником в окрестности положения равновесия. *Прикладная математика и механика*. 2018. Т. 82. № 2. С. 149-155.
- [13] Hussein M.T. CAD Design and Control of Triple Inverted-Pendulum. 2018. *The Iraqi Journal for Mechanical and Materials Engineering*. 18(3), pp. 481-497.
- [14] Huang X., Wen F., Wei Z. Optimization of triple inverted pendulum control process based on motion vision. 2018. *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, pp. 73.

- [15] Jibril M., Tadese M., Tadese E.A. Comparison of a triple inverted pendulum stabilization using optimal control technique. 2020. Report and Opinion. 12(10), pp. 62-70.
- [16] Новожилов И.В., Терехов А.В., Забелин А.В., Левик Ю.С., Шлыков В.Ю., Казенников О.В. Трехзвенная математическая модель для задачи стабилизации вертикальной позы человека. В препринте: Математическое моделирование движений человека в норме и при некоторых видах патологии. М.: изд-во мех-мат ф-та МГУ, 2005. С. 7-20.
- [17] Тяжелов А.А., Кизилова Н.Н., Фищенко В.А., Яремин С.Ю., Карпинский М.Ю., Карпинская Е.Д. Анализ стабилотграмм на основе математической модели тела человека как многозвенной системы. Травма. 2012. Т. 13. № 4. С. 17-25.
- [18] Agarana M.C., Akinlabi E.T. Lagrangian analysis of total mechanical energy of human arm as an inverted triple pendulum robot in motion. 2018. International Journal of Mechanical Engineering and Technology (IJMET). 9(8), pp. 1313-1320.
- [19] Agarana M.C., Akinlabi E.T. Mathematical Modelling and Analysis of Human Arm as a Triple Pendulum System using Euler – Lagrangian Model. 2018. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 413(1), pp. 012010.
- [20] Smirnov A.S., Smolnikov B. A. Nonlinear oscillation modes of double pendulum. 2021. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, International Conference of Young Scientists and Students “Topical Problems of Mechanical Engineering” (ToPME 2020) 2<sup>nd</sup>-4<sup>th</sup> December 2020, Moscow, Russia. 1129, pp. 012042.
- [21] Smirnov A.S., Smolnikov B.A. Collinear control of oscillation modes of spatial double pendulum with variable gain. 2021. Cybernetics and Physics. 10(2), pp. 90-96.
- [22] Булов С.А., Смирнов А.С. Управление формами колебаний трехзвенного маятника. Неделя науки ФизМех. Сборник статей Всероссийской научной конференции. Санкт-Петербург, 04-09 апреля 2022 года. 2022. С. 184-186.
- [23] Смирнов А.С., Смольников Б.А. Колебания двойного математического маятника с неколлинеарными шарнирами. 9-я Международная научно-практическая конференция Современное машиностроение: Наука и образование (ММЕSE-2020). Санкт-Петербург, 25 июня 2020. 2020. С. 153-165.
- [24] Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
- [25] Вибрации в технике. Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем. Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

## NUMERICAL SIMULATION OF NONLINEAR OSCILLATION MODES OF A THREE-LINK MANIPULATOR

<sup>1</sup>Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia;

<sup>2</sup>Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Russia;

<sup>3</sup>Center of Engineering Physics, Simulation and Analysis, Russia (JSC “CEPSA”).

### Abstract

The paper deals with the construction of nonlinear oscillation modes of a three-link manipulator operating in the gravity field and having identical parameters of weightless links and end loads, using numerical procedures. A nonlinear mathematical model of system oscillations is presented, and as a result of its calculation using numerical integration, the initial conditions of motion are determined leading to single-frequency oscillations on the first, second or third nonlinear mode. The main qualitative features and quantitative characteristics of all three nonlinear oscillation modes are discussed. In addition, graphical dependencies are constructed that illustrate the change in all key quantities in the period of nonlinear oscillations for each of the nonlinear modes. The results obtained are of interest for analytical mechanics and the theory of nonlinear oscillations, and they can also be useful in solving specific applied problems in the field of robotics and biomechanics.

*Key words:* three-link manipulator, deviation angles of links from the vertical, angles of rotation in joints, nonlinear oscillation mode, frequency and period of nonlinear oscillations.

### REFERENCES

- [1] Ivanova A.I. On the stability of the equilibrium position of a three-link pendulum under the action of a follower force. 2004. Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki. 3, pp. 19-26. (rus.)
- [2] Awrejcewicz J., Kudra G., Lamarque C.-H. Investigation of triple pendulum with impacts using fundamental solution matrices. 2004. International Journal of Bifurcation and Chaos. 14(2), pp. 4191-4213.
- [3] Evdokimenko A.P. Stability and branching of the relative equilibria of a three-link pendulum in a rapidly rotating frame of reference. 2009. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 73(6), pp. 648-663.

- [4] Chen W., Theodomile N. Simulation of a triple inverted pendulum based on fuzzy control. 2016. World Journal of Engineering and Technology. 4, pp. 267-272.
- [5] Gribkov V.A., Khokhlov A.O. Experimental study of inverted regulable pendulum stability. 2017. Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Estestvennye nauki. 2, pp. 22-39. (rus.)
- [6] Arkhipova I.M. On stabilization of a triple inverted pendulum via vibration of a support point with an arbitrary frequency. 2019. Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics. 52(2), pp. 194-198.
- [7] Kovalchuk V. Triple inverted pendulum with a follower force: decomposition on the equations of perturbed motion. 2020. Danish Scientific Journal. 36, pp. 46-48.
- [8] Smirnov A.S., Degilevich E.A. Oscillations of Chain Systems. St. Petersburg, Polytech-Press, 2021. 246 p. (rus.)
- [9] Anokhin N.V. Bringing a multilink pendulum to the equilibrium position using a single control torque. 2013. Journal of Computer and Systems Sciences International. 52(5), pp. 717-725.
- [10] Glück T., Eder A., Kugi A. Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation. 2013. Automatica. 49(3), pp. 801-808.
- [11] Loskutov Yu.V., Kudriavtsev I.A. Determination of the maximum torque in the knee drive of exoskeleton during “sit-to-stand” and “stand-to-sit” movement. 2018. Vestnik PGU. Ser. Materialy. Konstrukcii. Tekhnologii. 3(7), pp. 55-62. (rus.)
- [12] Anan’evskii I.M. The control of a three-link inverted pendulum near the equilibrium point. 2018. Mechanics of Solids. 53(5), pp. 16-21.
- [13] Hussein M.T. CAD Design and Control of Triple Inverted-Pendulum. 2018. The Iraqi Journal for Mechanical and Materials Engineering. 18(3), pp. 481-497.
- [14] Huang X., Wen F., Wei Z. Optimization of triple inverted pendulum control process based on motion vision. 2018. EURASIP Journal on Image and Video Processing, pp. 73.
- [15] Jibril M., Tadese M., Tadese E. A. Comparison of a triple inverted pendulum stabilization using optimal control technique. 2020. Report and Opinion. 12(10), pp. 62-70.
- [16] Novozhilov I.V., Terekhov A.V., Zabelin A.V., Levik Yu.S., Shlykov V.Yu., Kazennikov O.V. Three-link mathematical model for the problem of stabilization of the vertical posture of a person. 2005. In the preprint: Mathematical modeling of human movements in normal conditions and in some types of pathology. Moscow, Faculty of Mechanics and Mathematics of Moscow State University. pp. 7-20. (rus.)
- [17] Tyazhelov A.A., Kizilova N.N., Fischenko V.A., Yaremin S.Yu., Karpinsky M.Yu., Karpinskaya Ye.D. Analysis of posturography based on



- mathematical model of human body as multilink system. 2012. *Travma*. 13(4), pp. 17-25. (rus.)
- [18] Agarana M.C., Akinlabi E.T. Lagrangian analysis of total mechanical energy of human arm as an inverted triple pendulum robot in motion. 2018. *International Journal of Mechanical Engineering and Technology (IJMET)*. 9(8), pp. 1313-1320.
- [19] Agarana M.C., Akinlabi E.T. Mathematical Modelling and Analysis of Human Arm as a Triple Pendulum System using Euler – Lagrangian Model. 2018. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 413(1), pp. 012010.
- [20] Smirnov A.S., Smolnikov B. A. Nonlinear oscillation modes of double pendulum. 2021. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, International Conference of Young Scientists and Students “Topical Problems of Mechanical Engineering” (ToPME 2020) 2<sup>nd</sup>-4<sup>th</sup> December 2020, Moscow, Russia*. 1129, pp. 012042.
- [21] Smirnov A.S., Smolnikov B.A. Collinear control of oscillation modes of spatial double pendulum with variable gain. 2021. *Cybernetics and Physics*. 10(2), pp. 90-96.
- [22] Bulov S.A., Smirnov A.S. Control of the oscillation modes of a three-link pendulum. 2022. *Week of Science PhysMech. Collection of papers of the All-Russian scientific conference. St. Petersburg, April 04-09, 2022*. pp. 184-186. (rus.)
- [23] Smirnov A.S., Smolnikov B.A. Oscillations of double mathematical pendulum with noncollinear joints. 2020. *9<sup>th</sup> Conference on Modern Mechanical Engineering: Science and Education (MMESE-2020)*. St. Petersburg, 25 June 2020. pp. 153-165. (rus.)
- [24] Biderman V.L. *The Theory of Mechanical Oscillations*. Moscow, Vyshaya shkola, 1980. 480 p. (rus.)
- [25] *Vibrations in Technology. Directory. Vol. 1. Oscillations of Linear Systems*. Ed. by V.V. Bolotin. Moscow, Mashinostroenie, 1978. 352 p. (rus.)