

УДК 528.06+681.2  
doi:10.18720/SPBPU/2/id23-86

*Гаранин Владимир Александрович,*  
ассистент

**МЕТРОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ СОГЛАСОВАНИЯ  
РЕЗУЛЬТАТОВ СОВМЕСТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ КОНЦЕНТРАЦИЙ  
Веществ в многоканальных системах газового  
АНАЛИЗА**

Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский Политехнический  
университет Петра Великого, [garanin\\_va@spbstu.ru](mailto:garanin_va@spbstu.ru)

*Аннотация.* Одним из основных способов повышения точности совместных измерений является процедура согласования полученных результатов между собой по известной математической модели измеряемого объекта. Для решения задачи метрологического анализа измерительных ситуаций, допускающих учет априорно известной математической модели объекта измерений, были получены аналитические выражения для дисперсии результатов согласования и степени повышения точности за счет согласования результатов прямых измерений между

собой. Получены соотношения для случая стационарной системы, описанной системой алгебраических уравнений, в предположении, что корреляции между случайными погрешностями отсутствуют или ими можно пренебречь. Разработанная методика метрологического анализа использована для оценки погрешностей результатов измерения концентраций веществ в газовой пробе, полученных с помощью многоканального газового анализатора, процедуры обработки результатов измерений которого включают в себя согласование данных.

**Ключевые слова:** согласование данных, повышение точности, метрология, многоканальная измерительная система, газовый анализ.

*Vladimir A. Garanin,*  
Assistant Professor

## **METROLOGICAL ANALYSIS OF THE DATA RECONCILIATION RESULTS OF JOINT SUBSTANCE CONCENTRATIONS MEASUREMENTS IN MULTICHANNEL GAS ANALYSIS SYSTEMS**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,  
St. Petersburg, Russiagaranin\_va@spbstu.ru

**Abstract.** One way to increase the accuracy of measurements is to reconcile the results obtained with each other using the known mathematical model of the object under measuring. We proposed a method for the metrological analysis of such a data processing procedure's results. We derived the analytical expressions for variances of reconciled values and the accuracy increase ratios related to the reconciliation procedure. These expressions are valid for stationary systems mathematically described by a system of algebraic equations under the assumption that there are no correlations between random errors, or we can neglect them. We analyzed the case of a multichannel gas analyzer with implemented reconciliation procedure with the proposed algorithm. Corresponded standard deviations and potential accuracy improvement were estimated.

**Keywords:** data reconciliation, accuracy increase, metrology, multichannel measurement system, gas analysis.

### **Введение**

Настоящая работа посвящена метрологическому анализу измерительных ситуаций, допускающих учет функциональных взаимосвязей между совместно измеряемыми величинами; учет таких взаимосвязей на объекте измерений состоит в согласовании совместно выполненных измерений между собой через известную математическую модель объекта. Процедура согласования позволяет повысить точность прямых измерений с точки зрения снижения дисперсии оценок искомых величин, вызванной случайными отклонениями результатов измерений от их действительных значений.

Одной из возможных областей применения алгоритмов согласования, помимо согласования данных в промышленности [1–4], логистике [5–7] и распределенных базах данных [8, 9], являются измерительные системы [10], содержащие в себе несколько независимых измерительных

каналов, используемых для измерения физических величин, зависимости между которыми априорно известны или могут быть оценены с точностью, сравнимой или большей, чем точность прямых измерений, выполняемых данной системой. В данной работе в качестве примера такой измерительной системы рассмотрен многоканальный газовый анализатор, содержащий в себе несколько независимых датчиков концентрации различных веществ в газовой пробе. В качестве математической модели, описывающей зависимости между измеряемыми концентрациями различных газов в поданной в кювету смеси, выступают уравнения измерений каждого датчика, коэффициенты преобразования (чувствительности) которых определены с помощью градуировки измерительных преобразователей. Если градуировка датчиков на каждое вещество выполняется независимо, то тогда согласование прямых измерений позволяет снизить погрешность результатов измерения концентраций, вызванную случайными погрешностями. Целесообразность использования согласования при этом зависит от того, в какой мере в итоге будет снижена неопределенность результата измерения концентрации.

В настоящей работе предложена методика метрологического анализа измерительной ситуации, позволяющая оценить степень неопределенности результатов согласования прямых измерений с учетом погрешностей математической модели измеряемого объекта, а также рассчитать, во сколько раз результаты согласования окажутся точнее результатов прямых измерений. Полученная методика использована для анализа измерения концентраций веществ в многокомпонентных пробах с помощью многоканальной системы газового анализа, предназначенной для измерения концентраций оксида углерода, диоксида азота, сернистого ангидрида, сероводорода и оксида азота.

### 1. Постановка задачи

Блок первичного измерительного преобразователя газового анализатора содержит от 1 до  $N$  специализированных датчиков, предназначенных для измерения концентрации конкретного вещества в подаваемой смеси.

Обозначим показание  $j$ -го датчика как  $\hat{u}_j$ , мкВ, а результат измерения искомой величины (т. е. концентрации  $j$ -го газа в некоторой смеси) как  $\hat{x}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . При этом

$$\begin{aligned}\hat{u}_j &= u_j + \varepsilon_{uj}, \\ \hat{x}_j &= x_j + \varepsilon_{xj},\end{aligned}$$

где  $x_j$  — действительное значение концентрации  $j$ -го газа в смеси, соответствующее действительному значению  $u_j$  напряжения на выходе  $j$ -го датчика газоанализатора,  $\varepsilon_x$  — отклонение результата измерения концентрации от действительного значения, вызванное случайной погрешностью  $\varepsilon_u$  напряжения на выходе  $j$ -го датчика.

Пусть  $f_j$  — функция преобразования, ставящая в соответствие показание  $\hat{u}_j$  для  $j$ -го измерительного преобразователя результату измерения  $\hat{x}_j$  концентрации  $j$ -го газа. Тогда результаты прямого измерения могут быть записаны в виде системы

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = f_1(\hat{u}_1, \hat{\mathbf{a}}_1), \\ \hat{x}_2 = f_2(\hat{u}_2, \hat{\mathbf{a}}_2), \\ \dots \\ \hat{x}_N = f_N(\hat{u}_N, \hat{\mathbf{a}}_N), \end{cases} \quad (1)$$

где  $\hat{\mathbf{a}}_j = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n)^T$  — оценки параметров  $\mathbf{a}_j$  функций  $f_j$ , полученные в ходе градуировки  $j$ -го датчика по мерам концентраций  $j$ -го газа с известным пределом относительной случайной погрешности  $\delta_{x_j}$ , %. Следовательно,  $\hat{a}_j = a_j + \varepsilon_{aj}$ , где  $\varepsilon_{aj}$  — тоже случайная погрешность.

Если датчиков концентрации в газоанализаторе используется больше одного, то имеется возможность уточнить результаты прямых измерений за счет известной зависимости между показаниями датчиков и концентрациями различных газов в исследуемой пробе. Так как паразитное влияние посторонних примесей в пробе на показания датчика носит аддитивный характер, то результат измерения для многосоставной смеси можно представить в виде суммы из  $N$  функционалов:

$$\hat{u}_j = f_{j1}(x_1, \hat{\mathbf{a}}_{j1}) + f_{j2}(x_2, \hat{\mathbf{a}}_{j2}) + \dots + f_{jN}(x_N, \hat{\mathbf{a}}_{jN}).$$

Используя данное соотношение, составим систему уравнений, описывающую зависимости между измеряемыми величинами  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N f_{1i}(x_i, \hat{\mathbf{a}}_{1i}) = \hat{u}_1, \\ \sum_{i=1}^N f_{2i}(x_i, \hat{\mathbf{a}}_{2i}) = \hat{u}_2, \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N f_{Ni}(x_i, \hat{\mathbf{a}}_{Ni}) = \hat{u}_N, \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{f}_M(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2, \dots, \hat{\mathbf{a}}_N) = \hat{\mathbf{u}}. \quad (2)$$

Оценка параметров  $\mathbf{a}_j = (\mathbf{a}_{j1}, \mathbf{a}_{j2}, \dots, \mathbf{a}_{jn})$  выполняется в рамках градуировки датчика по мерам концентраций  $\tilde{\mathbf{x}}_i = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$   $i$ -го газа обобщенным методом наименьших квадратов, что, в силу независимости погрешностей  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\tilde{\mathbf{x}}} = (\varepsilon_{\tilde{x}_1}, \varepsilon_{\tilde{x}_2}, \dots, \varepsilon_{\tilde{x}_n})^T$  (в качестве мер концентраций используется набор баллонов с нормированными метрологическими характеристиками), соответствует решению

$$\hat{\mathbf{a}}_{ji} = \arg \min_{\mathbf{a}_{ji}} \sum_{t=1}^n \frac{(u_{it} - f_{ji}(\tilde{x}_{it}, \mathbf{a}_{ji}))^2}{\sigma_{x_{it}}^2},$$

где  $\tilde{u}_{it}$  — показание градуируемого датчика концентрации, соответствующее подаче в кювету  $i$ -го газа известной концентрации  $\tilde{x}_{it}$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  — число точек/мер концентрации, используемых при градуировке. В качестве меры были использованы эталонные смеси из-

вестной концентрации с нормированным пределом относительной погрешности концентрации, равным  $\delta_{x_j} = 100\% \cdot \Delta_{\tilde{x}_j} / x_j = 5\%$  для всех  $j$ , где  $\Delta_{\tilde{x}_j}$  — предел абсолютной погрешности результата измерения  $\tilde{x}_j$ . При выполнении расчетов подразумевалось, что интервалы  $\tilde{x}_j \pm \Delta_{\tilde{x}_j}$  возможных значений могут быть переписаны в терминах среднеквадратических отклонений случайных отклонений меры концентрации вещества от действительного значения следующим образом:  $\tilde{x}_j \pm \Delta_{\tilde{x}_j} = \tilde{x}_j \pm \sigma_{\tilde{x}_j} \cdot t(Q, n)$ , где значение коэффициента Стьюдента  $t(Q, n)$  зависит от заданной доверительной вероятности  $Q$  и объема выборки  $n$ .

Задача уточнения результатов прямых измерений  $\hat{\mathbf{x}}$  измеряемых величин  $\mathbf{x}$  за счет учета функциональных взаимосвязей (2) может быть сведена к задаче условной оптимизации вида

$$\mathbf{z}^* = \arg \min_{\mathbf{z} | f(\mathbf{z}) = \mathbf{u}} (\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}})^T \cdot \mathbf{V}(\hat{\mathbf{z}}) \cdot (\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}), \quad (3)$$

где вектор  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \dots, \mathbf{a}_{1N}, \mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{22}, \dots, \mathbf{a}_{2N}, \mathbf{a}_{N1}, \mathbf{a}_{N2}, \dots, \mathbf{a}_{NN})$  состоит из согласуемых между собой величин, оценки  $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{a}}_{11}, \hat{\mathbf{a}}_{12}, \dots)$  которых известны с погрешностями  $\varepsilon_z$ ,  $\mathbf{V}(\hat{\mathbf{z}})$  — ковариационная матрица этих оценок. Здесь и далее подразумевается, что случайные погрешности результатов измерений напряжения  $\{u_j\}$ , вызванные электромагнитными помехами и квантованием аналого-цифрового преобразователя, столь невелики в сравнении со случайными погрешностями параметров градуированных характеристик, что ими можно пренебречь, то есть положить  $\sigma_{u_j}^2 \approx 0$  для всех  $j$ . В противном случае в вектор  $\mathbf{z}$  включаются также значения  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \dots, \mathbf{a}_{1N}, \mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{22}, \dots, \mathbf{a}_{2N}, \mathbf{a}_{N1}, \mathbf{a}_{N2}, \dots, \mathbf{a}_{NN}, \mathbf{u}).$$

Таким образом, задача метрологической оценки результатов согласования результатов совместных измерений многоканальной системы газового анализа сводится к оценке погрешностей: прямых измерений, соответствующих решению системы (1), и результатов согласования, соответствующих оптимуму (3).

Перейдем от функциональных зависимостей, представленных в общем виде соотношений (1), к частной измерительной ситуации, подлежащей метрологическому анализу.

Пусть известно, что зависимость между входными и выходными значениями  $u$  используемых в составе измерительной системы для газового анализа датчиков концентрации носит преимущественно линейный характер. В силу специфики рассматриваемой измерительной ситуации считаем, что нулевой концентрации измеряемого вещества на входе датчика должна соответствовать нулевая разность потенциалов на его выходе. Тогда результат прямого измерения искомым концентраций записывается как

$$\mathbf{a}^T \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{u}}.$$

В рассмотренном газоанализаторе «ПОЛАР-7», изготовляемом ведущим отечественным производителем «Промэкоприбор», в целях расширения области его использования задействованные датчики применены на расширенном рабочем диапазоне, включающем в себя области измеряемых значений, в которой датчики уже имеют ярко выраженную нелинейность функции преобразования. Рабочие диапазоны датчиков рассмотренной системы газового анализа приведены в Таблице 1 (линейный диапазон соответствует «низким» концентрациям, расширенный диапазон — соответственно «высоким» концентрациям).

Таблица 1

**Диапазоны измерений газоанализаторов «ПОЛАР-7» заданной конфигурации по каналам измерений содержания газовых компонентов**

Определяемый компонент (канал измерений)	Диапазон измерений содержания определяемого компонента
Оксид углерода (CO низкий)	от 0 до 500 ppm
Оксид углерода (CO высокий)	от 0 до 5000 ppm
Диоксид азота (NO <sub>2</sub> низкий)	от 0 до 300 ppm
Диоксид азота (NO <sub>2</sub> высокий)	от 0 до 1000 ppm
Сернистый ангидрид (SO <sub>2</sub> низкий)	от 0 до 300 ppm
Сернистый ангидрид (SO <sub>2</sub> высокий)	от 0 до 5000 ppm
Сероводород (H <sub>2</sub> S низкий)	от 0 до 300 ppm
Сероводород (H <sub>2</sub> S высокий)	от 0 до 1000 ppm
Оксид азота (NO низкий)	от 0 до 300 ppm
Оксид азота (NO высокий)	от 0 до 4000 ppm

Таким образом, функции  $\{f_j\}$  для соотношений (1) и  $\{f_{ji}\}$  для соотношений (2) являются нелинейными. В качестве их аппроксимации был использован полином второй степени. Система уравнений прямых измерений тогда сводится к следующей:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_1^2 = \hat{u}_1, \\ a_{21} \cdot x_2 + a_{22} \cdot x_2^2 = \hat{u}_2, \\ \dots \\ a_{N1} \cdot x_N + a_{N2} \cdot x_N^2 = \hat{u}_N, \end{cases} \quad (4)$$

а система (2), описывающая функциональные взаимосвязи между измеряемыми величинами  $\mathbf{x}$  для  $N$  специализированных датчиков, сводится к

$$\begin{cases} f_{01}(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1) = \sum_{i=1}^N a_{1i(1)} \cdot x_i + \sum_{i=1}^N a_{1i(2)} \cdot x_i^2 - \hat{u}_1 = 0, \\ f_{02}(\mathbf{x}, \mathbf{a}_2) = \sum_{i=1}^N a_{2i(1)} \cdot x_i + \sum_{i=1}^N a_{2i(2)} \cdot x_i^2 - \hat{u}_2 = 0, \\ \dots \\ f_{0N}(\mathbf{x}, \mathbf{a}_N) = \sum_{i=1}^N a_{Ni(1)} \cdot x_i + \sum_{i=1}^N a_{Ni(2)} \cdot x_i^2 - \hat{u}_N = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Значения параметров  $a_{ji(k)}$ , определенные в рамках процедуры градуировки датчиков концентрации, приведены в Таблице 2.

**Диапазоны измерений газоанализаторов «ПОЛАР-7» заданной конфигурации  
по каналам измерений содержания газовых компонентов**

Функция взаимосвязи	Коэффициенты уравнений взаимосвязей, $a_{ji(k)}$ , мВ/ppm				
$f_{0j}$	$a_{j1(1)}, a_{j1(2)}$	$a_{j2(1)}, a_{j2(2)}$	$a_{j3(1)}, a_{j3(2)}$	$a_{j4(1)}, a_{j4(2)}$	$a_{j5(1)}, a_{j5(2)}$
$f_{01}$	17,5909, 1,9350	-0,0569, -0,0085	0,7817, 0,0391	3,1384, 0,3766	0,0194, 0,0014
$f_{02}$	0,0066, 0,0006	-203,7967, -42,7973	-4,5502, -0,5005	-8,3333, -1,1667	0,1097, 0,0055
$f_{03}$	0,0066, 0,0003	-0,5528, -0,0498	48,2239, 2,8934	28,3962, 2,5557	1,7107, 0,2053
$f_{04}$	0,0058, 0,0010	1,2927, 0,1680	0,0563, 0,0045	42,2421, 0,8448	0,3024, 0,0272
$f_{05}$	0,0044, 0,0005	-80,5894, -7,2530	-7,5672, -1,0594	-28,7484, -2,2999	53,7424, 4,0307

Отметим, что хотя значения коэффициентов  $a_{ji(k)}$  аппроксимирующих полиномов изменяются от датчика к датчику, на результаты метрологического анализа варьирование их численных значений существенно влияния не оказывает. Вместе с тем, так как в основе применяемого алгоритма лежит метод локальной линеаризации ограничивающего оптимум (3) функционала  $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ , с ростом отношений  $a_{ji(2)} / a_{ji(1)}$  будет расти неопределенность оценки погрешностей и меры повышения точности.

## 2. Метод метрологического анализа измерительной ситуации

В основе использованной методики оценки погрешностей и мер повышения точности за счет согласования совместных измерений лежат: метод декомпозиции задачи условной оптимизации [11], эквивалентной задаче согласования совместно выполненных измерений взаимосвязанных величин, и метод оценки погрешностей корней нелинейных уравнений (посредством локальной линеаризации). Кроме того, применен обобщенный метод наименьших квадратов: в итоге в полученных аналитических выражениях учтена возможная неравноточность уравнений, описывающих зависимости между совместно измеряемыми величинами (в данном случае — между концентрациями различных веществ в пробе).

При работе со случайными погрешностями подразумевается, что все измерения были выполнены независимо, следовательно корреляция как между значениями параметров уравнений  $a_{ji(k)}$ , так и между результатами прямых измерений величин  $x_j$  отсутствует, либо пренебрежимо мала.

Используя подход к формализации задачи согласования совместных измерений, изложенный в работе [11], определим дисперсии  $\{V(x_j^*)\}$  результатов согласования измерений величин  $\{x_j\}$  между собой и коэффициент  $\{k_j\}$ , показывающий, во сколько раз результаты согласования  $\{x_j^*\}$

точнее результатов прямых измерений  $\{\hat{x}_j\}$ , через дисперсии результатов прямых измерений  $\{V(\hat{x}_j)\}$  искомым величин и дисперсии оценок этих величин  $\{V(x_{Mj})\}$ :

$$k_j^2 = \frac{V(\hat{x}_j)}{V(x_{Mj}^*)}, \quad (6)$$

где  $x_{Mj}$  — оценка концентрации  $j$ -го вещества в исследуемой смеси, полученная из уравнений взаимосвязи  $\mathbf{f}_M(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{u}$  по имеющимся результатам прямых измерений  $\hat{x}_j, j = 1, 2, \dots, N$ .

Представим результат согласования прямого измерения  $\hat{x}_j$  с прочими совместными измерениями, как оценку средневзвешенным, полученным методом максимального правдоподобия в предположении, что совместное распределение величин  $\hat{x}_j$  и  $x_{Mj}$  является нормальным [12]:

$$x_j^* = w_1 \cdot \hat{x}_j + w_2 \cdot x_{Mj} = \frac{1}{\frac{V(\hat{x}_j)}{V(x_{Mj})} + 1} \cdot \hat{x}_j + \frac{1}{1 + \frac{V(x_{Mj})}{V(\hat{x}_j)}} \cdot x_{Mj},$$

где  $w_1$  и  $w_2$  — весовые коэффициенты, заданные через характеристики погрешностей значений  $\hat{x}_j$  и  $x_{Mj}$ .

Тогда в отсутствие корреляции между результатами  $\hat{x}_j$  и  $x_{Mj}$  дисперсия результата согласования может быть найдена как

$$V(x_j^*) = \frac{1}{\left(\frac{V(\hat{x}_j)}{V(x_{Mj})} + 1\right)^2} \cdot V(\hat{x}_j) + \frac{1}{\left(1 + \frac{V(x_{Mj})}{V(\hat{x}_j)}\right)^2} \cdot V(x_{Mj}). \quad (7)$$

Отсюда вследствие соотношения (6) степень уточнения, достигаемая за счёт согласования результатов измерений концентраций многоканальной системой газового анализа, равна

$$k_j = \sqrt{1 + \frac{V(\hat{x}_j)}{V(x_{Mj})}}. \quad (8)$$

Так как зависимости между измеряемыми величинами носят нелинейный характер, получить аналитическую оценку дисперсий  $V(\hat{x}_j)$  и  $V(x_{Mj})$  затруднительно. Заменим точные оценки их линейными приближениями  $V_{\text{лн}}(\hat{x}_j)$  и  $V_{\text{лн}}(x_{Mj})$  [13].

В линейном приближении отклонение  $\Delta x_j$  результата прямого измерения  $\hat{x}_j$  концентрации  $x_j$  может быть найдено из усеченного ряда Тейлора для функционала  $f_{0j}$ :

$$f_{0j}(\mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}) = f_{0j}(\mathbf{z}) + \Delta \hat{x}_j \cdot \frac{\partial f_{0j}}{\partial x_j} + \sum_{i=1} \frac{\partial f_{0j}}{\partial a_{ji}} \cdot \Delta \hat{a}_{ji},$$

где  $f_{0j}(\mathbf{z}) = 0$ .

Приняв  $f_{0j}(\mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}) - f_{0j}(\mathbf{z}) \approx 0$ , получим

$$\Delta \hat{x}_j = - \sum_{i=1} \frac{\partial f_{0j}}{\partial a_{ji}} / \frac{\partial f_{0j}}{\partial x_j} \cdot \Delta \hat{a}_{ji}.$$

Тогда дисперсия  $V(\hat{x}_j)$  решения системы (4) относительно  $x_j$  равна

$$\begin{aligned} V_{\text{пн}}(\hat{x}_j) &= \sum_{i=1} \left( \frac{\partial f_{0j}}{\partial a_{ji}} / \frac{\partial f_{0j}}{\partial x_j} \right)^2 \cdot V(\hat{a}_{ji}) = \\ &= \left( \frac{\hat{x}_j}{a_{j1+2 \cdot a_{j1}}} \right)^2 \cdot V(a_{j1}) + \left( \frac{\hat{x}_j^2}{a_{j1+2 \cdot a_{j1}}} \right)^2 \cdot V(a_{j2}), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $f_{0j}$  – функционал вида  $f_{0j}(\mathbf{x}, \mathbf{a}_j) = 0$ .

Аналогичным образом выполним оценку дисперсии  $V_{\text{пн}}(x_{Mj})$ .

В линейном приближении к математической модели, описывающей зависимости между величинами  $\mathbf{x}$  получим:

$$\begin{aligned} f_0(x_j + \Delta x_j, \mathbf{x}' + \Delta \mathbf{y}', \mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}) - f_0(x, \mathbf{a}) = \mathbf{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_{01}(x_j, \mathbf{x}', \mathbf{a}_1)}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial f_{01}(x_j, \mathbf{x}', \mathbf{a}_1)}{\partial x'_i} \cdot \Delta y'_i + \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_{01}(x, \mathbf{a}_1)}{\partial a_i} \cdot \Delta a_i = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f_{0m}(x_j, \mathbf{x}', \mathbf{a}_m)}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial f_{0m}(x_j, \mathbf{x}', \mathbf{a}_m)}{\partial x'_i} \cdot \Delta y'_i + \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_{0m}(x, \mathbf{a}_m)}{\partial a_i} \cdot \Delta a_i = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{cases} \Delta x_{j1} = - \left( \frac{\partial f_{01}(x_j, \mathbf{x}', \mathbf{a}_1)}{\partial x_j} \right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{k+N-1} \frac{\partial f_{01}(x_j, \mathbf{x}', \mathbf{a}_1)}{\partial x'_i} \cdot \Delta z_i, \\ \dots \dots \dots \\ \Delta x_{jm} = - \left( \frac{\partial f_{0m}(x_j, \mathbf{x}', \mathbf{a}_m)}{\partial x_j} \right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{k+N-1} \frac{\partial f_{0m}(x_j, \mathbf{x}', \mathbf{a}_m)}{\partial x'_i} \cdot \Delta z_i, \end{cases}$$

где  $\Delta z_i$  —  $i$ -ый элемент вектора  $\Delta \mathbf{z} = (\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{a})$ , а  $\mathbf{x}'$  — вектор из  $(N-1)$  искомым концентраций, не содержащий в себе  $x_j$ .

Найти оптимальное решение  $\Delta x_{Mj}$  на множестве  $(\Delta x_{j1}, \Delta x_{j2}, \dots, \Delta x_{jm})$  можно посредством обобщенного метода наименьших квадратов. Если в качестве характеристик погрешностей использованы оценки дисперсии, то тогда оптимальное решение отыскивается как

$$\arg \min_{\Delta x_{Mj}} \sum_{i=1}^m \frac{(\Delta x_{ji} - \Delta x_{Mj})^2}{V(\Delta x_{ji})}.$$

Следовательно,

$$\Delta x_{Mj} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{V_{\text{пн}}(\Delta x_{ji})}} \cdot \sum_{i=1}^m \frac{\Delta x_{ji}}{V_{\text{пн}}(\Delta x_{ji})}.$$



суммарной концентрации  $\text{sum}(\mathbf{x}')$  паразитных примесей  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_{N-1})^T$  к целевой измеряемой концентрации  $x_j$ . В предельном случае (то есть тогда, когда проба не содержит посторонних по отношению к  $j$ -му веществу примесей)  $\gamma = 0$ . Значения  $\{x'_i\}$  заданы равными друг другу. Например, при  $\gamma = 40\%$  получим в рассматриваемой измерительной ситуации  $x'_i/x_j \cdot 100 = 10\%$  для всех  $i$ , поскольку  $N = 5$ .

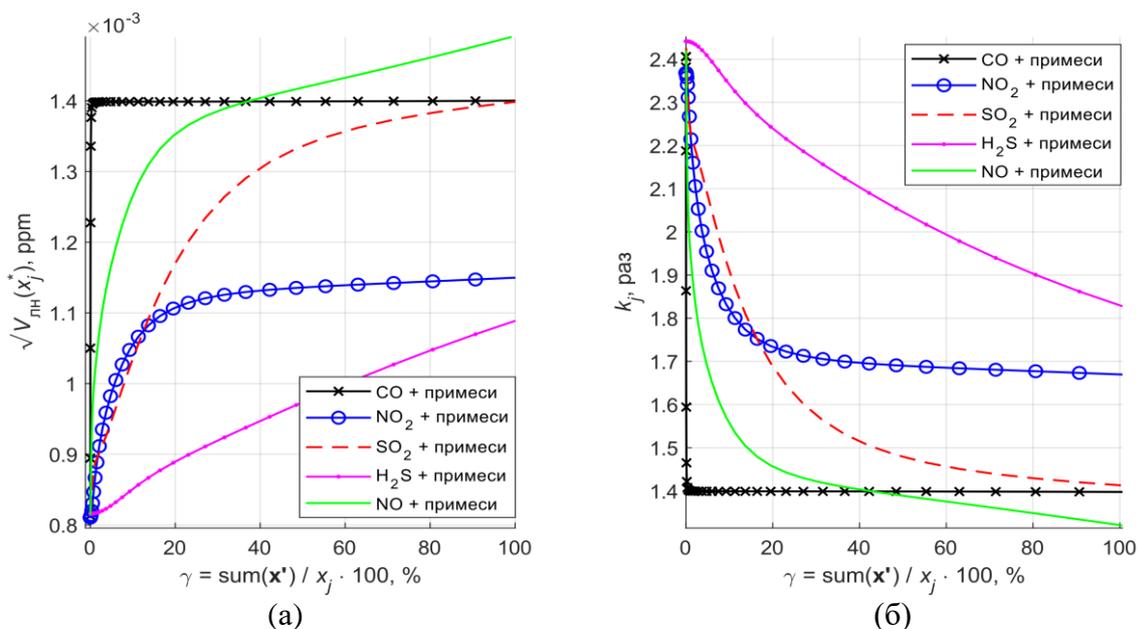


Рис. 1. Оценка дисперсии: а) результатов согласования и б) меры повышения точности измерений концентрации газовых компонентов в смеси за счет согласования совместно измеренных величин

Анализ показал, что наибольшее повышение точности за счет согласования прямых измерений  $j$ -ой концентрации достигается, когда в пробе отсутствуют сторонние примеси, к которым чувствительны используемые датчики концентрации. Если показания датчиков не возмущены сторонними примесями, тогда на результат согласования влияют только случайные погрешности коэффициентов чувствительности  $a_{ij(k)}$ , где  $i = 1, \dots, m$  и  $k = 1, 2$ . В наилучшем случае, когда  $\gamma = 0$ , согласование показаний нескольких чувствительных к  $j$ -му газу датчиков позволяет снизить среднеквадратическое отклонение результата измерения  $x_j$  до 2,4 раз.

Если в кювету подается газовая смесь, состоящая из нескольких веществ, к которым датчики концентрации имеют ненулевую чувствительность, то тогда с ростом отношения  $\text{sum}(\mathbf{x}')/x_j$  возрастает дисперсия результата согласования прямых измерений. Следовательно, снижается потенциал возможного уточнения результатов прямых совместных измерений концентрации за счет согласования их между собой (в смысле снижения дисперсии результата измерения, вызванной случайными отклонениями

результатов измерений). Вместе с тем, как видно из результатов, приведенных на рисунках 1 и 2, в рассматриваемой измерительной ситуации в зависимости от состава смеси дисперсия результата прямого измерения концентраций  $\{x_j\}$  снижается в диапазоне от 1,4 до 2,4 раз. Т. е. даже на многокомпонентных смесях учет априорно известных функциональных зависимостей (5) в большинстве случаев приводит к снижению неопределенности результатов измерений, по меньшей мере в  $\sqrt{2}$  раз.

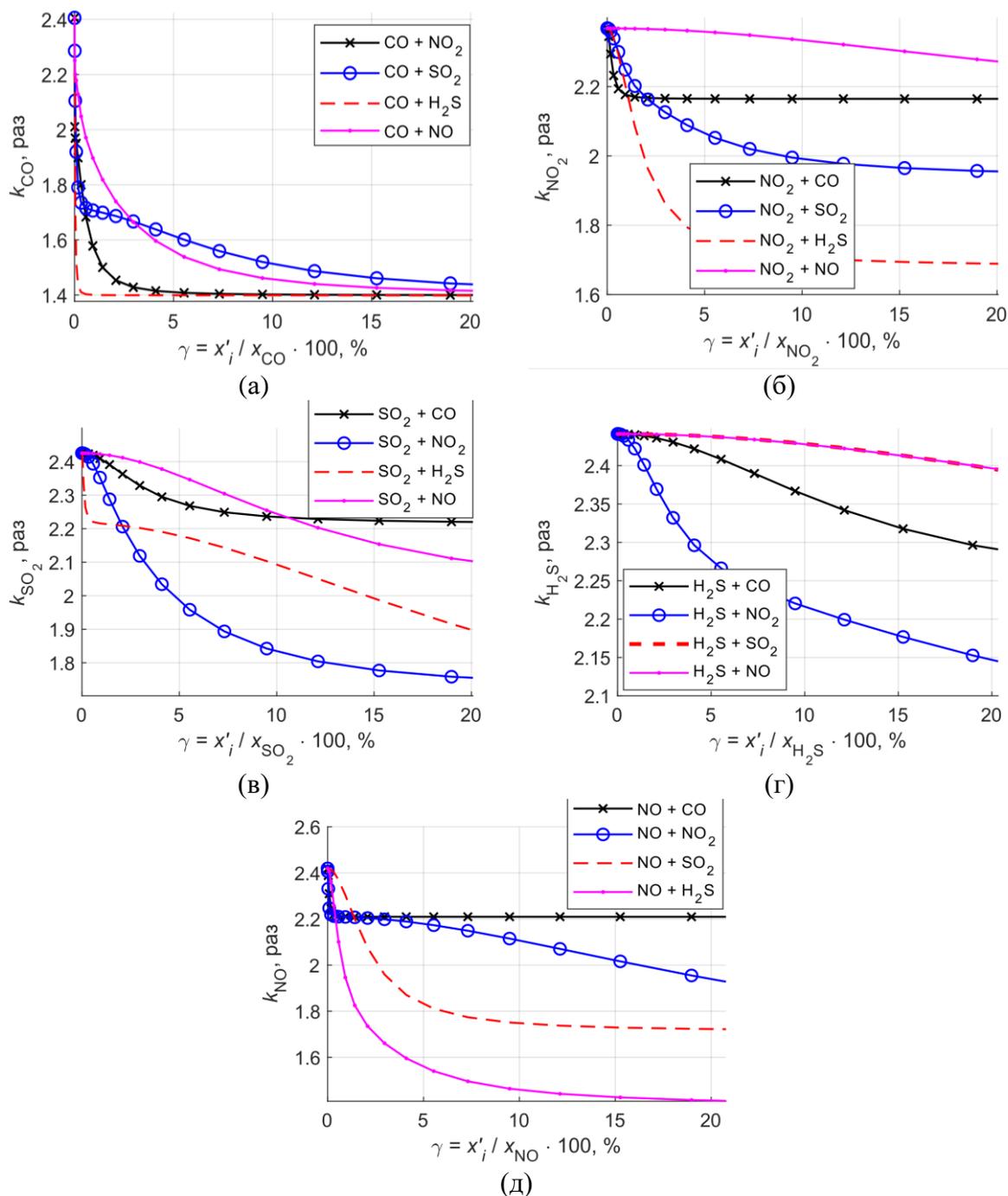


Рис. 2. Оценка меры повышения точности измерения концентрации компонента двухсоставной газовой смеси за счет согласования совместно выполненных измерений концентраций входящих в нее веществ: (а) CO; (б) NO<sub>2</sub>; (в) SO<sub>2</sub>; (г) H<sub>2</sub>S, (д) NO

На графиках, представленных на рисунке 2, приведены результаты метрологического анализа измерительной ситуации, допускающей учет взаимосвязей (5) для случая двухкомпонентной смеси.

Характер поведения мер повышения точности  $\{k_j\}$  схож со случаем согласования измерений концентраций в 5-тикомпонентной смеси (рис. 1, а и 1, б): в отсутствие примесей повышение точности оказывается максимальным, с ростом концентрации второго газа выигрыш от согласования постепенно снижется, однако не так существенно, как в случае с многокомпонентной смесью.

Наблюдается следующая закономерность: если градуировка датчиков концентрации выполнялась независимо, то тогда чем меньше различных примесей, к которым чувствительны использованные датчики, содержится в пробе, тем больше выигрыш от согласования прямых совместных измерений концентрации.

### **Заключение**

В рамках решения задачи метрологического анализа задачи согласования совместных измерений концентраций вещества в пробе, помещенной в кювету многоканальной системы газового анализа, была получена универсальная методика метрологического анализа результатов согласования совместных измерений между собой за счет учета математической модели объекта, формализованной в виде системы алгебраических уравнений, описывающих функциональные зависимости между измеряемыми величинами. Были получены аналитические выражения для дисперсии и степени повышения точности результатов согласования совместных измерений, выполняемых многоканальной измерительной системой.

Разработанная методика метрологического анализа была применена для расчёта погрешностей измерения концентраций веществ в газовой пробе с помощью пятиканального газоанализатора «ПОЛАР-7», предназначенного для измерения газов CO, NO<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>S и NO в различных пропорциях. Полученные результаты показали, что согласование показаний пяти датчиков между собой позволяет существенно повысить точность измерений не только с точки зрения исключения паразитного влияния сторонних примесей в пробе на первичные измерительные преобразователи, но и существенно уменьшить случайную погрешность результатов измерений. При этом степень повышения точности напрямую зависит от состава пробы: лучшие результаты достигаются в случае проб с малым числом компонент. С увеличением числа примесей и/или ростом их концентрации степень уточнения снижается. Диапазон значений коэффициента уточнения (т. е. значений степени уменьшения среднеквадратического отклонения погрешности результата согласования в сравнении с прямым непосредственным измерением, выполняемым без процедур согласования) составляет от 1,0 до 2,4 раз, что указывает на существенный выигрыш от использования процедуры согласования

данных. Все выполненные расчёты выполнялись в предположении, что градуировка каждого измерительного канала газоанализатора выполнялась независимо.

### **Благодарности**

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00694.

### **Список литературы**

1. Rafiee A., Behrouzshad F. Data reconciliation with application to a natural gas processing plant. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. – 2016. – Vol. 31. – P. 538–545.
2. Li X., Wang N., Wang L., Kantor I., Robineau J.L., Yang Y., Maréchal F. A data-driven model for the air-cooling condenser of thermal power plants based on data reconciliation and support vector regression // *Applied Thermal Engineering*. – 2018. – Vol. 129. – Pp. 1496–1507.
3. Guo S., Liu P., Li Z. Data reconciliation for the overall thermal system of a steam turbine power plant // *Applied energy*. – 2016. – Vol. 165. – Pp. 1037–1051.
4. de Chalendar J.A., Benson S.M. A physics-informed data reconciliation framework for real-time electricity and emissions tracking // *Applied Energy*. – 2021. – Vol. 304. – Paper 117761.
5. Su Q., Bommireddy Y., Shah Y., Ganesh S., Moreno M., Liu J., Gonsalez M., Yazdanpanah N., O'Connor T., Reklaitis G.V., Nagy Z.K. Data reconciliation in the Quality-by-Design (QbD) implementation of pharmaceutical continuous tablet manufacturing // *International journal of pharmaceutics*. – 2019. – Vol. 563. – Pp. 259–272.
6. Somplak R., Smidova Z., Smejkalova V., Nevrlý V. Statistical evaluation of large-scale data logistics system // *Mendel*. – 2018. – Vol. 24(2). – Pp. 9–16.
7. Fallucchi F., Tarquini M., De Luca E.W. Supporting humanitarian logistics with intelligent applications for disaster management // *Intelli*. – 2016. – Vol. 64. – Pp. 51–56.
8. Netten N., Bargh M.S., van den Braak S., Choenni S., Leeuw F. On enabling smart government: A legal logistics framework for future criminal justice systems // *Proceedings of the 17th International Digital Government Research Conference on Digital Government Research*. – 2016 – Pp. 293–302.
9. Margheri A., Masi M., Miladi A., Sassone V., Rosenzweig J. Decentralised provenance for healthcare data // *International Journal of Medical Informatics*. – 2020. – Vol. 141. – Paper 104197.
10. Kumar S.S., Koti M.S. Adaptive error approximate data reconciliation technique for healthcare framework // *International Journal of System Assurance Engineering and Management*. – 2022. – Vol. 2022. – Pp. 1–11.
11. Garanin V.A., Semenov K.K. (2021) The systematic approach for estimating the potential increase of measurement results accuracy achieved by the use of dependencies between measurands // *Proceedings of 2021 XXIV International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM), IEEE*. – Pp. 15-18.
12. Garanin V.A., Semenov K.K. Estimating the accuracy increase during the measuring two quantities with linear dependence // *Lecture Notes in Networks and Systems*. Vol. 95. *Proceedings of International Conference Cyber-Physical Systems and Control, CPS&C-2019*. – Springer: Cham, 2020. – Pp. 235–246. – DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-34983-7\\_23](https://doi.org/10.1007/978-3-030-34983-7_23).
13. Garanin V.A., Semenov K.K. Measured Data Reconciliation Processed within Nonlinear Constraints Models in Cyber-Physical Systems // *Lecture Notes in Networks and Systems*. Vol. 460. *Proceedings of International Conference Cyber-Physical Systems and Control II, CPS&C-2021*. – Springer: Cham, 2023. – Pp. 78–95. – DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-031-20875-1\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-031-20875-1_8).