

УДК 534.1

doi:10.18720/SPBPU/2/id24-101

С.Н. Игнатьев

МНОГОЧАСТОТНАЯ ПОПЕРЕЧНАЯ СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ТРОС В ПЛОСКОМ ВИХРЕВОМ ПОТОКЕ



Сергей Николаевич Игнатьев,
Открытое акционерное общество «Научно-
производственное общество по исследованию и
проектированию энергетического оборудования им.
И.И. Ползунова» (ОАО «НПО ЦКТИ»)
Россия, Санкт-Петербург
Тел.: (921)881-7278, E-mail: ignat.serg.nic@mail.ru

Аннотация

В плоской постановке задачи приводится вывод формулы для поперечной силы, действующей со стороны вихревой дорожки Кармана на цилиндр. Показано, что многочастотная поперечная сила имеет форму меандра и зависит от основных параметров вихревой дорожки. В задаче поперечных колебаний нити приводится решение при многочастотном и гармоническом воздействии потока. При выводе формулы используется функция тока для системы вихрей в плоскости. Поперечная сила определяется с помощью интегрирования изменения количества движения по контуру, охватывающего часть сформированной вихревой дорожки Кармана с длиной l – расстоянием между центрами вихрей одного уровня. Формула для поперечной силы может быть полезна для анализа и расчета автоколебаний, возникающих при поперечном обтекании длинномерных конструкций: нитей, тросов и труб.

Ключевые слова: вихревая дорожка Кармана, циркуляция вихря, скорость вихревой дорожки, число Струхала, лобовое сопротивление, поперечная сила гидродинамического воздействия.

1. Введение

Рассмотрим частный случай, когда ось недеформированного троса расположена поперек потока. Концы троса закреплены. Простые наблюдения колебаний тросов в потоке показывают, что трос совершает поперечные колебания относительно потока и статически отклоняется вдоль потока. Для относительно коротких тросов, при постепенном изменении скорости набегания потока, колебания совершаются по одной из форм колебаний с последующим резким перестроением на следующую форму. Широкополосный характер колебаний показывает, что поперечная сила, действующая на трос, является многочастотной.

Обычно выражение для поперечной силы записывают из соображений размерности, периодическая составляющая принимается гармонической [1,2]. Очевидно, что задание поперечной силы в таком виде, приведет к узкополосному резонансу при совпадении внешней частоты с одной из собственных частот. Однако, как отмечено выше, наблюдаются широкополосные поперечные колебания троса в потоке.

Выражение продольной силы по параметрам вихревой дорожки Кармана [3] было выполнено Л. Прандтлем [4]. Ниже в главе 2 приводится обобщение этого подхода для поперечной силы, где периодическая составляющая не ограничена допущением о гармонической форме. Далее в главе 3, более строго, поперечная многочастотная сила определена по периодической функции тока, зависящей от параметров вихревой дорожки [5].

В главе 4 рассмотрены поперечные колебания троса под действием гармонической и многочастотной силы. Показано, что при одинаковом малом внешнем трении многочастотное воздействие приводит к широкополосным колебаниям с меньшей амплитудой и кривизной. Широкополосный характер колебаний объясняет практическую невозможности отстройки от резонанса при изменении скорости потока и скачкообразном перестроении формы колебаний.

В главе 5 по упрощенной функции тока рассмотрены приближенные решения для поперечной гармонической силы и продольной силы с двойной внешней частотой. Показано, что решение для поперечной гармонической силы менее точно соответствует численным решениям.

В главе 6 по многочисленным публикациям представлены отдельные результаты численных решений и решений при гармонической поперечной силе. Приводится сопоставление результатов.

2. Формулирование проблемы; два способа выражения поперечной силы

Для решения многочисленных задач механики поперечных колебаний цилиндрического тела обтекаемого потоком необходимо знать силу гидродинамического воздействия со стороны потока. Выражение этой силы при обтекании цилиндра обычно записывают из соображений размерности: пропорционально гидродинамическому напору и площади сечения [1,2]

$$F_y = c_f d \rho \frac{U^2}{2} \sin(\omega t), \quad (1)$$

где U - скорость набегающего потока, d - диаметр цилиндра, ρ - плотность среды, $\omega = \frac{2\pi 0,22 \cdot U}{d}$ - частота с числом $St=0,22$. Коэффициент $c_f \approx 0,6 - 0,9$ определяется численно, либо экспериментально. Отметим, что только частота связана с частотой схода вихрей.

Рассмотрим прямую задачу выражения сил по параметрам вихревой дорожки. Аналитическое определение продольной силы, действующей на неподвижный цилиндр со стороны вихревой дорожки Кармана, дано Л. Прандтлем [4] и позже подтверждено в работе [5]. Для нахождения силы лобового сопротивления в работе [4] использовано изменение импульса $\rho \Gamma h$ за период $T = \frac{l}{(U-u)}$. Здесь ρ - плотность набегающего потока, Γ - циркуляция отдельного вихря вихревой дорожки Кармана, h - расстояние между рядами вихревой дорожки, l - расстояние между вихрями одного уровня, U - скорость набегающего потока, u - продольная скорость вихревой дорожки.

В результате получена основная часть продольной по оси x силы воздействия потока с вихревой дорожкой на тело

$$F_{x0} = \rho \frac{\Gamma h}{l} (U - u).$$

В работе [4] к этой силе добавляется усилие сопротивления на продольных границах выделенной области $-\rho \frac{\Gamma h}{l} u$ и гидростатическое сопротивление $\rho \frac{\Gamma^2}{2\pi l}$, которыми мы пренебрегаем.

При формировании вихревой дорожки этот же импульс создает вертикальное усилие при условии, что весь поток за телом, охваченным одним контуром, после поворота на 90° сохраняет направление движения в течение полупериода. В этом случае поперечная сила будет периодической, а её амплитуда будет равна половине изменения продольного импульса за период:

$$F_{y1} = \rho \frac{\Gamma h}{2l} (U - u) \text{sign}[\sin(\omega t)] \approx \rho \frac{\Gamma h}{2l} \frac{4}{\pi} (U - u) \sin(\omega t), \quad (2)$$

где $\omega = \frac{2\pi(U - u)}{l} = \frac{2\pi(U - u)}{4,3d} = \frac{2\pi \cdot 0,2 U}{d} = \frac{2\pi \text{St}(\text{Re}) U}{d}$ - частота схода вихрей,

d – поперечный размер тела, $\frac{h}{l} = 0,2806$, $\frac{u}{U} = 0,14$ - для цилиндра [5].

Полученное решение (2) исходит из рассмотрения изменения количества движения внутри одного контура и предположения о равенстве нулю среднего значения вертикального импульса за период.

3. Определение поперечной силы по периодической функции тока, зависящей от параметров вихревой дорожки, с помощью двух контуров по методу Л. Прандтля

Приведем ещё один вывод формулы для поперечной силы. Рассмотрим два состояния тела и вихревой дорожки: исходное, частично установившееся состояние, и состояние после приращения дорожки Кармана на длину l – расстояния между центрами вихрей одного уровня в зоне законченного формирования дорожки Кармана. Первый контур условно охватывает обтекаемое тело и часть дорожки на участке её формирования. Второй контур охватывает первый контур и дополнительно установившийся участок дорожки длиной l . Вычитая одно состояние системы из другого, мы получим периодическое, установившееся возмущение потока на участке l [4]. Теорема импульсов дает в этом случае среднее значение силы действия жидкости на тело для одного периода. Вертикальное усилие определим с помощью интегрирования изменения количества движения по контуру, охватывающего часть вихревой дорожки с длиной l (см. рис. 1):

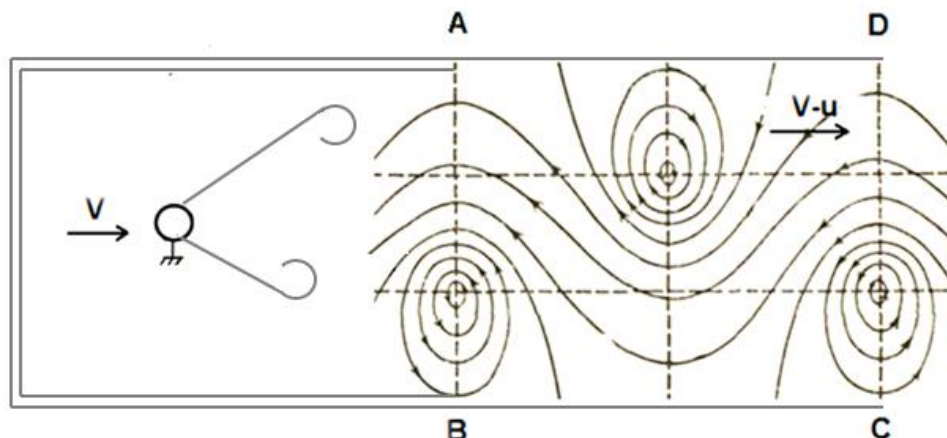


Рис. 1. Условные границы двух контуров, охватывающих часть сформированной вихревой дорожки длиной l

$$F_{y2} = -\frac{dK}{dt} = -\rho \int_{AB,CD} (\vec{v} \cdot \vec{n}) v_y dy = \rho \int_{-\infty}^{\infty} v_x v_y dy - \rho \int_{-\infty}^{\infty} v_x v_y dy = -2\rho \int_{-\infty}^{\infty} v_x v_y dy, \quad (3)$$

где $\vec{v} = \underline{i}_1 v_x + \underline{i}_2 v_y$ - вектор возмущения потока, $\underline{i}_1, \underline{i}_2$ - орты продольного и поперечного направления, \vec{n} - вектор положительной нормали к контуру, ρ - плотность среды. При этом используется равенство нулю произведения поперечного и продольного возмущения потока $v_x v_y \lim_{y \rightarrow +/\infty} = 0$ на горизонтальных площадках контура AD, BC.

Для вычисления интеграла (3) поперечное и продольное возмущение от вихревого потока определим через периодическую функцию тока, зависящую от параметров вихревой дорожки, следующим образом [5]:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

где функция тока есть

$$\Psi(x, y) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{l} \left(y + \frac{h}{2} \right) + \sin \left(\frac{2\pi x}{l} \right)}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{l} \left(y - \frac{h}{2} \right) - \sin \left(\frac{2\pi x}{l} \right)}, \quad (4)$$

причем Γ - модуль циркуляции отдельного вихря, x, y - координаты элементов среды, h - расстояние между рядами вихрей с шахматным расположением, l - расстояние между вихрями одного уровня, $\frac{h}{l} = 0,2806$.

Определим скорости возмущений:

$$v_x = -\frac{\Gamma}{2l} \left[\frac{\operatorname{sh} \left(y' + \frac{h'}{2} \right)}{a} - \frac{\operatorname{sh} \left(y' - \frac{h'}{2} \right)}{b} \right], \quad (5)$$

$$v_y = \frac{\Gamma}{2l} \cos x' \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{\Gamma}{l} \frac{\cos x' \operatorname{ch} \frac{h'}{2} \operatorname{ch} y'}{a b}, \quad (6)$$

где при выполнении преобразований используются обозначения:

$$h' = \frac{2\pi h}{l}, \quad x' = \frac{2\pi x}{l}, \quad y' = \frac{2\pi y}{l},$$

$$a = a(x', y') = \operatorname{ch} \left(y' + \frac{h'}{2} \right) + \sin x', \quad b = b(x', y') = \operatorname{ch} \left(y' - \frac{h'}{2} \right) - \sin x'.$$

Для последующего интегрирования преобразуем произведение функций

$$\begin{aligned}
ab &= \operatorname{ch}\left(y' + \frac{h'}{2}\right) \operatorname{ch}\left(y' - \frac{h'}{2}\right) - \sin x' \left[\operatorname{ch}\left(y' + \frac{h'}{2}\right) - \operatorname{ch}\left(y' - \frac{h'}{2}\right) \right] - \sin^2 x' = \\
&= \operatorname{sh}^2 y' - 2 \operatorname{sh} y' \operatorname{sh} \frac{h'}{2} \sin x' + \left(\operatorname{sh}^2 \frac{h'}{2} + \cos^2 x' \right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Первоначально, используя описание скорости возмущения (6) и обозначение (7), вычислим интеграл от поперечного возмущения потока [6]

$$\begin{aligned}
\int_{CD} v_y dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v_y dy' = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{ch} \frac{h'}{2} \cos x' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{p^2 + pq_1 + q_2} = \\
&= \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{ch} \frac{h'}{2} \cos x' \right) \frac{2}{\sqrt{4q_2 - q_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{2p + q_1}{\sqrt{4q_2 - q_1^2}} \Bigg|_{p=-\infty}^{p=+\infty} = \\
&= \frac{\Gamma \cos x'}{2\pi |\cos x'|} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\Gamma}{2} \operatorname{sign}(\cos x'),
\end{aligned} \tag{8}$$

где дополнительно используются обозначения:

$$\begin{aligned}
p &= \operatorname{sh} y', \quad q_1 = -2 \operatorname{sh} \frac{h'}{2} \sin x', \quad q_2 = \operatorname{sh}^2 \frac{h'}{2} + \cos^2 x', \\
4q_2 - q_1^2 &= 4 \left(\operatorname{sh}^2 \frac{h'}{2} + \cos^2 x' \right) - 4 \operatorname{sh}^2 \frac{h'}{2} \sin^2 x' = 4 \operatorname{ch}^2 \frac{h'}{2} \cos^2 x'.
\end{aligned} \tag{9}$$

Используя далее описание скоростей возмущений (5,6), найдем интеграл от произведения составляющих компонентов возмущения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_x v_y dy = \frac{1}{2\pi} \int_{AB} v_x v_y dy' = -\frac{\Gamma^2 \cos x'}{8\pi l} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(\frac{\operatorname{sh}\left(y' + \frac{h'}{2}\right)}{a} - \frac{\operatorname{sh}\left(y' - \frac{h'}{2}\right)}{b} \right) dy'. \tag{10}$$

Отмечая равенство нулю интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(y' + \frac{h'}{2}\right) dy'}{a^2} = -\frac{1}{\operatorname{ch}(\infty)} + \frac{1}{\operatorname{ch}(-\infty)} = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(y' - \frac{h'}{2}\right) dy'}{b^2} = 0,$$

упростим подынтегральное выражение (10) и, используя обозначения (7,9), найдем искомый интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_x v_y dy = -\frac{\Gamma^2 \cos x'}{8\pi l} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[\operatorname{sh}\left(y' + \frac{h'}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(y' - \frac{h'}{2}\right) \right] dy'}{ab} = \tag{11}$$

$$= -2 \operatorname{sh} \frac{h'}{2} \frac{\Gamma^2 \cos x'}{8\pi l} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{p^2 + pq_1 + q_2} = -\frac{\operatorname{th} \frac{h'}{2} \Gamma^2 \cos x'}{4l |\cos x'|} = -\frac{u \Gamma \cos x'}{2 |\cos x'|} = -u \int_{-\infty}^{+\infty} v_y dy,$$

где $u = \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l} = \frac{\Gamma}{2\sqrt{2}l}$ - абсолютное значение групповой скорости вихрей [5].

После подстановки интеграла (11) в (3) получим формулу для поперечной силы, действующей на цилиндр со стороны вихревой дорожки Кармана

$$F_{y2} = -2\rho \int_{-\infty}^{+\infty} v_x v_y dy = \rho u \Gamma \operatorname{sign}[\sin(\omega t)] = \frac{4\rho u \Gamma}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \dots \right]. \quad (12)$$

Как видно, поперечная сила является многочастотной периодической силой и носит характер меандра. Амплитуда поперечной силы представляет собой обобщение силы Н.Е. Жуковского [7]. Причем, воздействие всей вихревой дорожки на периоде колебаний определяется циркуляцией и скоростью одного вихря на установившемся участке с длиной 1. Периодичность и форма решения определяется интегралом (8), который входит в решение интеграла (11). Физический смысл меандра можно определить, как переключатель знака циркуляции вихря, сходящего с тела.

Для приведения интеграла (8) к более естественному виду, принятому в формуле (12), к параметру $x' = \frac{2\pi x}{l}$, добавляется начальная фаза $\delta = -\pi/2$.

При обтекании цилиндра выполняется соотношение $l = 4,3 d$, где d - диаметр цилиндра [5]. Отсюда следует, что для цилиндра наименьшая частота поперечных колебаний равна частоте

$$\omega = \frac{2\pi(U-u)}{l} = \frac{2\pi \operatorname{St}(\operatorname{Re})U}{d}, \quad (13)$$

где U - скорость набегающего потока, $\operatorname{St}(\operatorname{Re})$ - число Струхала.

Выражение для поперечной силы (12) выведено в предположении о неподвижности обтекаемого тела и является вынуждающей силой для подвижного тела.

Отметим, что формула (2) получена с помощью одноконтурного решения без учета усилия на грани АВ (см. рис.1). Но это усилие равно половине усилия (12). Отсюда получаем уточнение формулы (2)

$$F_{y1} = \rho \frac{\Gamma}{2} \left[\frac{h}{l} (U-u) + u \right] \operatorname{sign}[\sin(\omega t)]. \quad (14)$$

Учитывая равенства $\frac{h}{l} = 0,2806$, $\frac{u}{U} = 0,14$ - для цилиндра [5], отметим небольшое отличие амплитуд в формулах (12) и (14) при их численной реализации.

Отметим, что амплитуда поперечной силы с помощью соотношений: $l = 4,3d$, $u = \frac{\Gamma}{2\sqrt{2}l}$, $\frac{u}{U} = 0,14$ - для цилиндра может быть приведена в традиционной форме

$$\rho u \Gamma = 2\sqrt{2}\rho u^2 l = 4,3 \cdot 2\sqrt{2}\rho d u^2 = (0,14)^2 \cdot 4,3 \cdot 4\sqrt{2}\rho d \frac{U^2}{2} = 0,477\rho d \frac{U^2}{2}. \quad (15)$$

Продольная сила [4,5] также может быть представлена в традиционной форме

$$\rho \frac{\Gamma h}{l} (U - 2u) + \rho \frac{\Gamma^2}{2\pi l} = \rho d \frac{U^2}{2} \left[4,91 \frac{u}{U} + 10,95 \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right] = 0,90\rho d \frac{U^2}{2}. \quad (16)$$

Рассмотрим отношение амплитуды поперечной силы к продольной силе, полученной Прандтлем [4]. Отметим, что продольная сила не зависит от частоты колебаний

$$\frac{\text{амп}F_{y2}}{F_x} = \frac{\rho u \Gamma}{\rho \frac{\Gamma h}{l} (U - 2u) + \rho \frac{\Gamma^2}{2\pi l}} = f\left(\frac{u}{U}\right) = \frac{u}{\frac{h}{l} (U - 2u) + \frac{u\sqrt{2}}{\pi}}. \quad (17)$$

Полученное отношение (17) зависит от скорости потока и скорости вихревой дорожки. Для цилиндра $\frac{u}{U} = 0,14$, отсюда отношение амплитуды поперечной силы к продольной равно 0,528. Отметим, что для амплитуд различных гармоник (12) это отношение равно $0,528 \frac{4}{\pi k} = \frac{0,672}{k}$, где $k = 1, 3, 5, \dots$ - номер гармоники.

Для сравнения приведем это же отношение, полученное численным решением задачи обтекания цилиндра [9]

$$C_1 = 0,52 - 0,06 x^{2,6}, \text{ где } x = \log_{10}(\text{Re}/1600), 5400 \leq \text{Re} \leq 220\,000. \quad (18)$$

Без учета Re численные результаты формул (17,18) близки.

4. Поперечные колебания нити при многочастотном и гармоническом воздействии

Определим насколько существенно многочастотное действие внешней силы в форме меандра на колебания нити по сравнению с гармоническим воздействием. Рассмотрим вынужденные поперечные колебания нити с ограниченной длиной, малым внешним сопротивлением и обобщенной внешней силой, которая может быть гармонической или в форме меандра. Принимая перемещения нити на границах нулевыми и используя метод разложения по собственным функциям, определим

уравнение колебаний для одной из синусоидальных форм с собственной частотой, близкой к частоте внешних колебаний

$$\ddot{q}_s + 2n\dot{q}_s + k_s^2 q_s = Q(t), \quad (19)$$

где n - коэффициент внешнего трения, $k_s = \frac{\pi s}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_{cp}}}$ - рассматриваемая собственная частота нити, $s=1,2,3,\dots$, T_0 - натяжение нити, ρ_{cp} - погонная масса нити, l - длина нити, q_s - поперечное перемещение для выбранной частоты.

Первоначально рассмотрим гармоническое действие силой, определяемой первым членом ряда (12)

$$Q(t) = \frac{4Q_0}{\pi} \sin \omega t,$$

где $Q_0 = \frac{\rho \Gamma u}{\rho_{cp}}$ - постоянная составляющая обобщенной силы - отношение амплитуды поперечной силы к погонной массе нити.

Ограничимся колебаниями по одной форме колебаний с максимальной амплитудой. В этом случае вынужденные колебания будут происходить с частотой внешнего воздействия по форме колебаний, соответствующей собственной частоте, близкой к частоте возмущения. Амплитуда колебаний определится выражением [8]

$$q_1(t) = \frac{4}{\pi} q_{ct} \lambda_1(z) \sin(\omega t - \varepsilon),$$

где q_1 - перемещение нити для выбранной собственной частоты, $q_{ct} = \frac{Q_0}{k^2}$, ω - частота внешнего воздействия, $k = k_s$ (19) - рассматриваемая собственная частота нити, $\lambda_1(z) = \frac{1}{\sqrt{y_1(z)}}$ - коэффициент динамичности,

$$y_1(z) = (1 - z^2)^2 + 4v^2 z^2, \quad z = \frac{\omega}{k}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2vz}{1 - z^2}, \quad v = \frac{n}{k}.$$

На резонансе при совпадении внешней частоты с собственной $z=1$, отсюда коэффициент динамичности равен

$$\lambda_1(1) = \frac{1}{2v}.$$

Амплитуда колебаний на резонансе определится формулой

$$q_{1m} = \frac{4q_{ct}}{\pi 2v} = \frac{q_{ct}}{\mu}, \quad (20)$$

где $\mu = 0,5\pi v$. Определим также кривизну коэффициента динамичности и линии перемещения на резонансе

$$\lambda_1''(1) = -\frac{y_1''}{2(y_1(1))^{3/2}} + \frac{3y_1'^2}{4(y_1(1))^{5/2}}, y_1''(1) = 8(1+v^2),$$

$$\lambda_1''(1) \approx -\frac{8(1+v^2)}{2(y_1(1))^{3/2}} + 0(3/2v) = -\frac{(1+v^2)}{2(v)^3},$$

$$q_{1m}'' = \frac{4}{\pi} q_{cr} \lambda_1''(1) = -\frac{4}{2\pi} q_{cr} \lambda_1^3(1) y_1'' = -\frac{q_{cr} \pi^2 (1+v^2)}{4\mu^3}. \quad (21)$$

Из условия $y_1'(z_m) = 0$ определяется $z_m = \sqrt{1-2v^2}$ [8], откуда следует ограничение $0 < v < 0,707$ для параметра v .

Отметим, что кривизна линии перемещения на резонансе имеет отрицательное значение на максимуме перемещения.

Определим теперь амплитуду колебаний при действии силы в форме меандра

$$Q(t) = Q_0 \operatorname{sign}(\sin \omega t).$$

Ограничимся колебаниями по одной форме колебаний с максимальной амплитудой. Воспользуемся решением, полученном для обобщенной силы меняющей знак на половине периода τ для интервала времени $0 \leq t < \tau/2$ [8]

$$q_2(t) = \frac{e^{-nt}}{k} \left[S_1 \frac{e^{n\tau/2} \cos k(t + \tau/2) + \cos kt}{1 + 2e^{n\tau/2} \cos(k\tau/2) + e^{n\tau}} - C_1 \frac{e^{n\tau/2} \sin k(t + \tau/2) + \sin kt}{1 + 2e^{n\tau/2} \cos(k\tau/2) + e^{n\tau}} + \dots \right],$$

где при задании силы в форме меандра

$$S_1 = Q_0 \int_0^{\tau/2} e^{n\xi} \sin k_n \xi d\xi = \frac{kQ_0(\zeta + 1)}{k^2 + n^2},$$

$$C_1 = Q_0 \int_0^{\tau/2} e^{n\xi} \cos k_n \xi d\xi = \frac{-nQ_0(\zeta + 1)}{k^2 + n^2}, \zeta = e^{v\pi},$$

где q_2 - перемещение нити для выбранной собственной частоты, τ - период прикладываемой силы, τ_1 - период свободных колебаний без учета трения, k - собственная частота нити, n - коэффициент внешнего трения.

Поперечное перемещение преобразуем к виду с коэффициентом динамичности

$$q_2(t) = \frac{e^{-nt} [S_1(\psi_1 \cos kt - \psi_2 \sin kt) - C_1(\psi_1 \sin kt + \psi_2 \cos kt)]}{k [1 + 2e^{n\tau/2} \cos(k\tau/2) + e^{n\tau}]} =$$

$$= \frac{e^{-nt} [S_1 \cos(kt + \varepsilon_1) - C_1 \sin(kt + \varepsilon_1)]}{k \sqrt{[1 + 2e^{n\tau/2} \cos(k\tau/2) + e^{n\tau}]}} = \frac{S_1 e^{-nt} \sqrt{1 + \psi_3^2} \cos(kt + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{k \sqrt{1 + 2e^{n\tau/2} \cos(k\tau/2) + e^{n\tau}}} =$$

$$= \frac{S_1 e^{-nt} \sqrt{1 + v^2} \cos(kt + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{k \sqrt{1 + 2e^{n\tau/2} \cos(k\tau/2) + e^{n\tau}}},$$

где

$$\begin{aligned}\psi_1 &= e^{n\tau/2} \cos(k\tau/2) + 1, \\ \psi_2 &= e^{n\tau/2} \sin(k\tau/2), \\ \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} &= 1 + 2e^{n\tau/2} \cos(k\tau/2) + e^{n\tau}, \\ \operatorname{tg}\varepsilon_1 &= \frac{\psi_2}{\psi_1}, \quad \operatorname{tg}\varepsilon_2 = \psi_3 = \frac{C_1}{S_1} = v.\end{aligned}$$

Отметим, что при действии силы в форме меандра вынужденные колебания происходят с собственной частотой, близкой к частоте внешнего действия, а максимальное перемещение происходит на резонансе, при совпадении частоты возмущения с собственной [8].

Используя преобразования:

$$\frac{\zeta^{-1} S_1 \sqrt{1+v^2}}{k} = \frac{Q_0 \sqrt{1+v^2} \zeta^{-1} (1+\zeta)}{k^2 + n^2} = \frac{q_{cr} \zeta^{-1} (1+\zeta)}{\sqrt{1+v^2}},$$

приведем перемещение в зоне резонанса к виду

$$q_2(\tau/2) = \frac{q_{cr} \zeta^{-1} (1+\zeta)}{\sqrt{1+v^2}} \frac{1}{\sqrt{1+2e^{n\tau/2} \cos(k\tau/2) + e^{n\tau}}}. \quad (22)$$

Подкоренное выражение на резонансе стремится к малой величине. Откуда определим максимальное перемещение на резонансе при совпадении периода возмущения τ с периодом свободных колебаний τ_1

$$q_{2m} = \frac{q_{cr} \zeta^{-1} (1+\zeta)}{\sqrt{1+v^2} (\zeta-1)} = \frac{q_{cr} e^{-2\mu} \operatorname{ch}\mu}{\sqrt{1+v^2} \operatorname{sh}\mu},$$

где, как и прежде, $\mu = 0,5\pi v$, $v = \frac{n}{k}$.

Используя (20), найдем отношение амплитуд на резонансе при действии внешней силы в форме меандра и при гармоническом действии

$$\frac{q_{2m}}{q_{1m}} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \frac{e^{-2\mu} \operatorname{ch}\mu}{\operatorname{sh}\mu} \approx \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} e^{-2\mu}. \quad (23)$$

Отсюда следует вывод, что задание внешней силы в форме меандра с принятым одинаковым параметром v приводит к колебаниям с меньшей амплитудой по сравнению с гармоническим действием.

Определим теперь кривизну линии перемещения на резонансе.

Подкоренное выражение в (22) перепишем в виде функции с малым параметром

$$y_2(\delta) = 1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos \pi(1+\delta), \quad y_2(\delta=0) = (\zeta-1)^2,$$

где малый параметр δ найдем из равенства нулю первой производной

$$y_2'(\delta) = 2v\pi\zeta^2 + 2v\pi\zeta \cos \pi(1+\delta) - 2\pi\zeta \sin \pi(1+\delta) \approx \\ \approx 2\pi\zeta [v + v^2\pi(1+\delta) - v + \pi\delta],$$

откуда

$$\delta_* = \frac{-v^2}{1+v^2} \approx -v^2, \quad y_2'(\delta_*) = 0.$$

Определим вторую производную подкоренного выражения

$$y_2''(\delta) = (2v\pi)^2\zeta^2 + 2(v\pi)^2\zeta \cos \pi(1+\delta) - 4v\pi^2\zeta \sin \pi(1+\delta) - \\ - 2(\pi)^2\zeta \cos \pi(1+\delta) \approx 2\pi^2\zeta [2v^2(1+v\pi) + (1-v^2) + 2v\pi\delta].$$

Отсюда находим вторую производную подкоренной функции на резонансе

$$y_2''(\delta = \delta_*) \approx 2\pi^2\zeta(1+v^2)$$

и вторую производную коэффициента динамичности на резонансе

$$\lambda_2''(\delta_*) \approx -\frac{y_2''}{2(y_2)^{3/2}} = -\frac{2\pi^2\zeta(1+v^2)}{2(\zeta-1)^3}.$$

Вторая производная перемещения на резонансе определится выражением

$$q_{2m}'' = \frac{Q_0\sqrt{1+v^2}\zeta^{-1}(1+\zeta)}{k^2+n^2} \lambda_2''(\delta_*) = \frac{q_{cr}\zeta^{-1}(1+\zeta)}{\sqrt{1+v^2}} \lambda_2''(\delta_*) = \\ = -\frac{q_{cr}\pi^2\sqrt{1+v^2}(\zeta+1)}{(\zeta-1)^3} = -\frac{q_{cr}\pi^2\sqrt{1+v^2}e^{-2\mu}ch\mu}{4sh^3\mu},$$

где, как и прежде, $\mu = 0,5\pi v$.

Отметим, что кривизна линии перемещения на резонансе имеет отрицательное значение на максимуме перемещения.

Используя формулу (21) для гармонической силы, определим отношение кривизны линии перемещения на резонансе при действии внешней силы в форме меандра к кривизне при гармоническом действии

$$\frac{q_{2m}''}{q_{1m}''} = \frac{1}{\sqrt{(1+v^2)}} \frac{e^{-2\mu}\mu^3 ch\mu}{sh^3\mu} \approx \frac{1}{\sqrt{(1+v^2)}} e^{-2\mu}. \quad (24)$$

Полученное ранее отношение для амплитуды (23) совпадет с отношением для кривизны (24), причем, при весьма малом трении эти отношения равны 1. Сравнивая полученные отношения для амплитуды и кривизны, приходим к выводу: при одинаковом малом значении параметра $v > 0$ амплитуда колебаний нити и её кривизна на резонансе при действии внешней силы в форме меандра меньше амплитуды и кривизны, возникающих при гармоническом воздействии, когда используется только первый член разложения в ряд меандра. При одинаковом малом внешнем трении задание внешней силы в форме меандра приводит к широкополосным колебаниям с меньшей амплитудой и кривизной по сравнению с узкополосными колебаниями при гармоническом

воздействии. Дополнительная существенная особенность: при действии силой в форме меандра, вынужденные колебания происходят с собственной частотой нити, ближайшей к внешней частоте действия, на резонансе частота возмущения и собственная частота совпадают. При гармоническом же воздействии частота колебаний совпадает с внешней частотой и меняется постепенно по мере изменения скорости потока.

Особенностью колебаний относительно коротких нитей в потоке, когда на длине нити укладывается несколько полуволн, является отсутствие зон с относительно малыми колебаниями и скачкообразное изменение формы колебаний при изменении скорости потока. Переход на следующую собственную частоту и форму колебаний происходит при незначительном изменении скорости потока при $Re \approx 1000$, как при увеличении скорости, так и при ее уменьшении.

На натуральных испытаниях при поперечном обтекании длинномерных струн отчетливые формы колебаний проявляются только у креплений на концах нити, на отдалении от точек крепления поперечные колебания происходят по многим размытым формам без проявлений узлов колебаний на всех скоростях потока при $Re \approx 1000$. Эти эффекты объясняются многочастотным воздействием потока на элементы нити. Широкополосную зону резонанса и скачкообразное изменение формы колебаний при изменении скорости потока невозможно объяснить только гармоническим воздействием потока и малым линейным сопротивлением.

5. Получение периодической продольной силы с двойной частотой и гармонической поперечной силы по упрощенной функции тока

Как следует из формул (12,16), продольная сила сопротивления Прандтля является наибольшей из рассматриваемых сил. Для определения меньшей динамической периодической части продольного усилия воспользуемся разложением в ряд по малому параметру функции тока (4), ограничиваясь первым членом этого ряда [5]

$$\Psi(x, y) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \left[\frac{1 + \operatorname{th}(y') \operatorname{th}\left(\frac{h'}{2}\right) + \frac{\sin(x')}{\operatorname{ch}(y') \operatorname{ch}\left(\frac{h'}{2}\right)}}{1 - \operatorname{th}(y') \operatorname{th}\left(\frac{h'}{2}\right) - \frac{\sin(x')}{\operatorname{ch}(y') \operatorname{ch}\left(\frac{h'}{2}\right)}} \right] \approx -\frac{\Gamma}{2\pi} \left[\operatorname{th}(y') \operatorname{th}\left(\frac{h'}{2}\right) + \frac{\sin(x')}{\operatorname{ch}(y') \operatorname{ch}\left(\frac{h'}{2}\right)} \right] =$$

$$= -\frac{\Gamma}{2\sqrt{2}\pi} \left[\operatorname{th}(y') + \frac{\sin(x')}{\operatorname{ch}(y')} \right].$$

В преобразовании использованы равенства: $\operatorname{th}\left(\frac{\pi h}{l}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{ch}\left(\frac{\pi h}{l}\right) = \sqrt{2}$ [5].

Откуда получаем скорости возмущений:

$$v_x = \frac{d\Psi}{dy} \approx -\frac{\Gamma}{\sqrt{2}l} \left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2(y')} - \frac{\operatorname{sh}(y') \sin(x')}{\operatorname{ch}^2(y')} \right], \quad v_y = -\frac{d\Psi}{dx} \approx \frac{\Gamma}{\sqrt{2}l} \frac{\cos(x')}{\operatorname{ch}(y')}. \quad (25)$$

Используя далее интегралы [6]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy'}{\operatorname{ch}^4(y')} = \left[\operatorname{th}(y') - \frac{\operatorname{th}^3(y')}{3} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{4}{3}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}^2(y') dy'}{\operatorname{ch}^4(y')} = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy'}{\operatorname{ch}^2(y')} = \frac{2}{3},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy'}{\operatorname{ch}^3(y')} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(y') dy'}{\operatorname{ch}^4(y')} = 0,$$

определим интегралы от половины квадратов скоростей возмущений по двум направлениям

$$\int_{CD} \frac{v_x^2}{2} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_x^2}{2} dy' =$$

$$= \left(\frac{\Gamma^2}{2\pi l} \right) \frac{1}{4} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy'}{\operatorname{ch}^4(y')} - 2 \sin(x') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(y') dy'}{\operatorname{ch}^4(y')} + \sin^2(x') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}^2(y') dy'}{\operatorname{ch}^4(y')} \right] =$$

$$= \left(\frac{\Gamma^2}{2\pi l} \right) \frac{1}{12} [5 - \cos(2x')],$$

$$\int_{CD} \frac{v_y^2}{2} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_y^2}{2} dy' = \left(\frac{\Gamma^2}{2\pi l} \right) \frac{1}{4} \cos^2(x') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy'}{\operatorname{ch}^2(y')} = \frac{\Gamma^2}{4\pi l} \cos^2(x') =$$

$$= \left(\frac{\Gamma^2}{2\pi l} \right) \frac{1}{4} [1 + \cos(2x')].$$

Используя полученные значения интегралов, определим величину установившегося гидродинамического продольного усилия с учетом периодической составляющей

$$\frac{\rho}{2} \int_{CD} (v_x^2 + v_y^2) dy = \frac{\rho \Gamma^2}{2\pi l} \left[\frac{2}{3} + \frac{\cos(2\omega t)}{6} \right].$$

Постоянная составляющая этой силы отличается от третьего слагаемого продольного усилия Прандтля (16) множителем $\frac{2}{3}$. Амплитуда динамической составляющей продольной силы, действующая с двойной частотой, определяется с помощью соотношений: $l = 4,3d$, $u = \frac{\Gamma}{2\sqrt{2}l}$,

$\frac{u}{U} = 0,14$ - для цилиндра, может быть приведена в традиционной форме

$$A_{x\text{din}} = \frac{\rho \Gamma^2}{12\pi l} = \frac{16 \cdot 4,3}{12\pi} \left(\frac{u}{U}\right)^2 \rho d \frac{U^2}{2} = 1,82 \left(\frac{u}{U}\right)^2 \rho d \frac{U^2}{2} = 0,0357 \rho d \frac{U^2}{2}.$$

Сравнивая полученный результат с (16), получим отношение динамической составляющей продольной силы к постоянной силе

$$\frac{A_{x\text{din}}}{F_x} = 0,0397.$$

Также рассмотрим отношение амплитуд динамической продольной и поперечной составляющих усилий

$$\frac{A_{x\text{din}}}{A_{y\text{din}}} = \frac{\left(\frac{\rho \Gamma^2}{12\pi l}\right)}{\left(\frac{4\rho \Gamma u}{\pi}\right)} = 0,059.$$

Это отношение мало, но объясняет движение троса в потоке в плоскости поперечного сечения в форме «восьмёрки», вытянутой в поперечном направлении потока.

Дополнительно, после интегрирования произведения скоростей (25), полученных по упрощенному выражению функции тока (4), определим приближенное выражение для поперечной силы в форме гармонического воздействия

$$F_{y3} = -2\rho \int_{-\infty}^{+\infty} v_x v_y dy \approx \frac{\rho u \Gamma}{\sqrt{2}} \sin(\omega t).$$

Это приближение по амплитуде колебаний менее точно согласуется с работой [9], так как отношение амплитуды поперечной силы к продольной силе меньше, чем (17) и равно 0,373.

6. Сопоставление продольных и поперечных сил, полученных по гидродинамическому напору

Рассмотрим более традиционное выражение для сил, действующих на цилиндр. Различное описание вихревой дорожки и срывного флаттера рассматривалось в книгах [1,2,9-18]. Определение сил воздействия вихревой дорожки на тело в продольном и поперечном направлении в работе [20] относят к «нерешаемым» задачам. В работах [20,21] проводится обширный анализ работ по колебаниям цилиндра, откуда делается вывод об общепринятой форме определения подъемной силы и силы лобового сопротивления из соображений размерности: пропорционально гидродинамическому напору и площади сечения. Частота колебаний связана с числом St. Коррекция частоты колебаний и

амплитуды колебаний цилиндра осуществляется моделированием автоколебаний в виде генератора Ван дер Поля [20-22]. При этом частота колебаний продольной силы принимается в два раза больше частоты поперечных колебаний.

Во многих работах (см., например, [23-26]) задача о срывном флаттере ограничивается расчетом турбулентных струй и вихревых следов за плохообтекаемыми телами с использованием, так называемого, метода дискретных вихрей. В работе [27] использован численный модернизированный метод дискретных вихрей для расчета автоколебаний конструкций различного вида. Проводится совместное решение системы уравнений, описывающих колебания тела и определяющих соответствующие гидродинамические силы на каждом шаге расчета. Усилие на тело представляет собой обобщенную силу Н.Е. Жуковского [7]. В работе [27] представлен численный расчет коэффициентов гидродинамических сил C_x , C_y при автоколебаниях цилиндра в потоке. При установившихся колебаниях C_y (поперечное направление) немного превышает $C_x \approx 1$. При малых безразмерных скоростях обтекания цилиндр колеблется с частотой отрыва вихрей. В этой зоне пропорционально скорости потока меняется частота отрыва вихрей так, что число St остается постоянной величиной. При увеличении скорости потока происходит синхронизация, т.е. совпадение частоты отрыва вихрей с собственной частотой колебаний цилиндра.

Рассмотрим различные численные решения определения продольной силы, образующейся при обтекании цилиндра. Средний коэффициент сопротивления C_x для неподвижного цилиндра по данным разных авторов [28-32] находится в диапазоне 1,34-1,39. Число St в диапазоне 1,97-2,00 ($Re \leq 200$). В работе [33] приведены данные по обтеканию неподвижного цилиндра. На установившемся режиме коэффициент подъемной силы C_y неподвижного цилиндра приблизительно равен 0,7. Отсюда, отношение коэффициентов равно $C_y/C_x \approx 0,7/1,37=0,51$. Это отношение близко к полученному выше отношением, определенном по формуле (17). Также в работе [33] приведены данные о влиянии на коэффициент подъемной силы C_y собственного вращения цилиндра при его обтекании.

В силу сложности описания вихревого следа многочисленными работами по обтеканию цилиндра являются работы по численному решению уравнений Навье–Стокса. Так в работе [19] численно определялась зависимость коэффициента лобового сопротивления от чисел $32 \leq Re \leq 281$. Отмечено уменьшение коэффициента с увеличением Re : $C_x(32) \approx 1,8$; $C_x(100) \approx 1,5$; $C_x(281) \approx 1,35$.

При традиционном подходе определения сил, действующих на тело, параметры вихревой дорожки являются скрытыми внутренними

параметрами. В этом случае отношение сил $\frac{F_y}{F_x}$ - число, зависящее от Re .

При выражении этих сил через параметры вихревой дорожки (17) отношение $\frac{F_y}{F_x} = f\left(\frac{u}{U}\right)$ пропорционально отношению скорости вихревой дорожки к скорости потока. Сопоставляя эти результаты, приходим к выводу, что отношение $\frac{u}{U}$ зависит от Re .

В задачах колебаний нитей наиболее сложным является способ задания внешней силы, действующей со стороны потока, учет внешнего и внутреннего трения. В работах [20-22] внешнее трение задается в нелинейной форме. В работе [34] рассматривается влияние внутреннего трения на колебания струны. Также сложной задачей является исследование влияния контактного взаимодействия проволок троса на его жесткость [35]. Анализ даже одного из перечисленных факторов является трудной задачей.

Результаты работы докладывались на кафедре «Механика и процессы управления» СПбПУ сотрудникам института д.физ-мат.н.: А.К. Беляеву, Д.А. Индейцеву, Е.М. Смирнову, к.физ-мат.н.: Б.А. Смольникову, О.Б. Колешко и др., которым автор статьи выражает свою благодарность.

Заключение

1. В плоской постановке задачи определена формула для поперечной силы, действующей на цилиндр при его обтекании потоком с вихревой дорожкой Кармана. При выводе формулы реализована методика Л. Прандтля двухконтурного охвата обтекаемого потоком тела. Выражение для поперечной силы содержит параметры вихревой дорожки: u - продольную скорость вихрей, Γ - циркуляцию вихря.
2. Многочастотная поперечная сила носит характер меандра-переключателя знака циркуляции

$$F_{y2} = \rho u \Gamma \text{sign}[\sin(\omega t)] = \frac{4\rho u \Gamma}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \dots \right],$$

где $\omega = \frac{2\pi St(Re)U}{d}$, ρ - плотность среды.

3. Амплитуда поперечной силы представляет собой обобщение подъемной силы Н.Е. Жуковского.
4. При одинаковом малом внешнем трении задание внешней силы в форме меандра приводит к широкополосным колебаниям с меньшей амплитудой и кривизной по сравнению с узкополосными колебаниями при гармоническом воздействии. Широкополосные колебания тросов в

поперечном потоке осуществляются практически всегда в реальных границах изменения скорости потока.

5. Отношение амплитуд основных гармоник поперечных колебаний к постоянной составляющей силы сопротивления определяется отношением групповой скорости вихрей u к скорости потока U . Это отношение зависит от Re .

$$\frac{\text{амп}F_{y2}}{F_x} = f\left(\frac{u}{U}\right) = \frac{4}{\pi k} \frac{u}{\left[\frac{h}{1}(U-2u) + \frac{u\sqrt{2}}{\pi}\right]} = 0,528 \frac{4}{\pi k} \left(\frac{u}{U} = 0,14\right),$$

где $k = 1, 3, 5, \dots$ - номер гармоники.

6. Отношение амплитуды динамической составляющей продольной силы, действующей с двойной частотой колебаний, к продольной постоянной силе составляет величину $\frac{A_{x \text{ din}}}{F_x} = 0,0397$.
7. Многочастотное возмущение приводит к широкополосному характеру колебаний троса в потоке и объясняет практическую невозможности отстройки от резонанса при изменении скорости потока и скачкообразном перестроении формы колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пановко Я.Г., Губанова И.И.. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. - 4-е изд., перераб. - М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1987. Стр. 215.
- [2] Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Наука. Москва. 1979. Стр. 384.
- [3] Karman Th. von Uber den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter in einer Flussigkeit erfahrt. Gottingen Nachrichten. 1911. P. 178; 1912. C. 186.
- [4] Титъенс О. Гидро и Аэромеханика. По лекциям проф. Прандтль Л. Движение жидкостей с трением и технические приложения. / О. Титъенс. Т. №2. – М., Ленинград. ОНТИ НКТИ СССР. 1935. - С. 145-149.
- [5] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.. Теоретическая гидромеханика. Часть 1./ Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. - 6-изд. М., 1963. - С. 225-235.
- [6] Двайт. Г. Таблицы интегралов и другие математические формулы. / Г.Двайт. - М. Наука. Главная редакция физико-матем. литературы. 1977. - С.36.

- [7] Седов Л.И. - Механика сплошной среды. Том 2. М.: Наука, 1970. Стр. 301.
- [8] Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т.2. Динамика. 6-изд. М.: Гл. Ред. Физ.-мат. Литературы, 1983.
- [9] Dong S., Karniadakis G.E. DNS of flow past a stationary and oscillating cylinder at Re 10 000. Journal of Fluids and Structures 20 (2005) Division of Applied Mathematics, Center for Fluid Mechanics, Brown University, Box 1966, 37 Manning Street, Providence, RI 02912, USA.p. 519–531.
- [10] Rocard Y. Dynamique G'enerale des Vibrations. Paris, Masson et Cie, Editeurs, 1949.
- [11] Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956.
- [12] Рокар И. Неустойчивость в механике. М.: ИЛ, 1959.
- [13] Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.Л. Аэроупругость. М.: ИЛ, 1958.
- [14] Казакевич М.И. Аэродинамика мостов. М.: Транспорт, 1987.
- [15] Фын Я.Ц. Введение в теорию аэроупругости. М.: Физматгиз, 1959.
- [16] Девнин С.И. Гидроупругость конструкций при отрывном обтекании. Л.: Судостроение, 1975.
- [17] Фершинг Г. Основы аэроупругости. М.: Машиностроение, 1984.
- [18] A Modern Course of Aeroelasticity. Ed. Dowell E.H. Kluwer Acad. Publ., 2004.
- [19] Мышенков В.И., Малашин А.А., Галахов Г.Д., Орехов А.Д., Пименов А.С., Пронин К.Н.. Исследование пригодности ППП NUMECA для численного моделирования задач внешнего обтекания/ISSN 2542-1468, Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2018. Т. 22. № 6. С. 123–131. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018.
- [20] Ланда П.С., Гиневский А.С. Исследование математических моделей для решения «нерешаемых» задач. В сб. «Нелинейные проблемы теории колебаний и теории управления. Вибрационная механика», под ред. В.В. Белецкого, Д.А. Индейцева, А.Л. Фрадкова; Ин-т проблем машиноведения РАН. – СПб.: Наука, 2009, С. 349-367.
- [21] Ланда П.С. Срывной флаттер как один из механизмов возбуждения автоколебаний линий электропередачи / Изв. вузов «ПНД», т.16, №2, 2009. С. 3-15.
- [22] Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука-Физматлит, 1997.
- [23] Lewis R.I., Porterhouse D.T.C. A generalized numerical method for bluff body stalling aerofoil flow. ASME Paper 82-GT-70, 1982.
- [24] Spalart P.R. Numerical simulation of separated flows. NASA-TM-84238, 1983.

- [25] Sisto F., Thangam S. Abdelrahim A. Computational study of stall flutter in linear cascades. *ASME J. of Turbomachinery*, vol. 115, No 1, 1993.
- [26] Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов методом дискретных вихрей. М.: Наука, 1995, 365 с.
- [27] Самолысов А.В., Масевич А.В., Вальес Н.Г.. Расчет вихревого обтекания неподвижных и колеблющихся цилиндрических тел методом дискретных вихрей. Применение метода дискретных вихрей для расчета вихревого обтекания неподвижных и колеблющихся цилиндрических тел. *Вестник научно-технического развития* №6 (82), 2014 г.
- [28] Henderson R.D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition // *J. Fluid Mech.* 1997. Vol. 352. P. 65–112.
- [29] He J.W., Glowinski R., Metcalfe R., Nordlander A., Periaux J. Active control and drag optimization for flow past a circular cylinder I: Oscillatory cylinder // *J. Comput. Physics.* 2000. Vol. 163, No. 1. P. 83–117.
- [30] Homescu C., Navon I.M., Li Z. Suppression of vortex shedding for flow around a circular cylinder using optimal control // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2002. Vol. 38. P. 43–69.
- [31] Bergmann M., Cordier L., Brancher J.-P. Optimal rotary control of the cylinder wake using proper orthogonal decomposition reduced-order model // *Phys. Fluids.* 2005. Vol. 17. P. 097101-1–097101-21.
- [32] Góis E.R.C., Souza L.F. An eulerian immersed boundary method for flow simulations over stationary and moving rigid bodies // *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng. Special Issue.* 2010. Vol. 32, No. 5. P. 477–484.
- [33] Моренко И.В. Ламинарное обтекание вязкой несжимаемой жидкостью цилиндра, совершающего вращательные колебания. *Теплофизика и аэромеханика*, 2017, том 24, № 3. Ст. 368.
- [34] Смольников Б.А., Смирнов А.С. Колебания струны с внутренним трением. Современное машиностроение: Наука и образование 2021 (ММЕСЕ-2021): материалы 10-й Международной научной конференции 24 июня 2021 г. / под ред. А.Н. Евграфова, А.А. Поповича. - СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. С. 192-203.
- [35] Мельникова Н.Б., Осман А.А., Кудряшов Е.В. Анализ влияния контактного взаимодействия проволок на жесткость спирального каната. Современное машиностроение: наука и образование 2023: материалы 12-й Международной научной конференции, 22 июня 2023 г. / под ред. А.Н. Евграфова, А.А. Поповича.- СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. С. 388-404.

MULTI-FREQUENCY TRANSVERSE FORCE ACTING ON A CABLE IN A FLAT VORTEX FLOW

Open Joint Stock Company "Scientific and Production Society for Research
and Design of Power Equipment named after I.I. Polzunov" (JSC "NPO
CCTI"), Russia

Abstract

In the flat formulation of the problem, a formula is derived for the transverse force acting from the side of the Karman vortex path on the cylinder. It is shown that the multi-frequency transverse force has the shape of a meander and depends on the main parameters of the vortex track. In the problem of transverse vibrations of the thread, a solution is given for multi-frequency and harmonic flow effects. When deriving the formula, the current function for a system of vortices in the plane is used. When deriving the formula, the current function for a system of vortices in the plane is used. The transverse force is determined by integrating the change in the amount of motion along the contour covering a part of the formed vortex path of the Karman with a length – the distance between the centers of vortices of the same level l . The formula for the transverse force can be useful for analyzing and calculating self-oscillations that occur during the transverse flow of long structures: threads, cables and pipes.

Key words: Karman vortex path, circulation of the vortex, the speed of the vortex track, the Strouhal number, head-on resistance, the transverse force of the hydrodynamic action.

REFERENCES

- [1] Panovko Ya.G., Gubanova I.I. Stability and oscillations of elastic systems: Modern concepts, paradoxes and errors. -4th ed., reprint. - M.: Nauka. Gl. ed. Phys.-mat. lit., 1987. Page 215. (rus.)
- [2] Panovko Ya.G., Gubanova I.I. Stability and oscillations of elastic systems. Science. Moscow. 1979. Page 384. (rus.)
- [3] Karman Th. von Uber den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter in einer Flussigkeit erf'ahrt. Gottingen Nachrichten. 1911. P. 178; 1912. C. 186.
- [4] Tityens O. Hydro and Aeromechanics. According to the lectures of Prof. Prandtl L. Motion of liquids with friction and technical applications. / O. Titjens. T No. 2. – M., Leningrad. ONTI NKTi USSR. 1935. - pp. 145-149. (rus.)

- [5] Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. Theoretical hydromechanics. Part 1. / N.E. Kochin, I.A. Kibel, N.V. Roze. - 6th ed. M.: 1963. - pp. 225-235.149. (rus.)
- [6] Dwight. G. Tables of integrals and other mathematical formulas. / G.Dwight. - M.: Nauka. The main editorial office of physico-math. literatures. 1977. - p. 36. (rus.)
- [7] Sedov L.I. - Continuum mechanics. Volume 2. M.: Nauka. 1970. Article 301. (rus.)
- [8] Loitsyansky L.G., Lurie A.I. Course of theoretical mechanics T2. Dynamics. 6th ed. Moscow. Gl. Ed. Phys.-mat. References. 1983. (rus.)
- [9] Dong S., Karniadakis G.E. DNS of flow past a stationary and oscillating cylinder at Re 10 000. Journal of Fluids and Structures 20 (2005) Division of Applied Mathematics, Center for Fluid Mechanics, Brown University, Box 1966, 37 Manning Street, Providence, RI 02912, USA. p. 519–531.
- [10] Rocard Y. Dynamique G'en'erale des Vibrations. Paris, Masson et Cie, Editeurs, 1949.
- [11] Bolotin V.V. Dynamic stability of elastic systems. M.: Gostekhizdat, 1956. (rus.)
- [12] Rocard I. Instability in mechanics. M.: IL, 1959. (rus.)
- [13] Bisplinghoff R.L., Ashley H., Halfman R.L. Aeroelasticity. M.: IL, 1958. (rus.)
- [14] Kazakevich M.I. Aerodynamics of bridges. M.: Transport, 1987. (rus.)
- [15] Fyn Ya.Ts. Introduction to the theory of aeroelasticity. M.: Fizmatgiz, 1959. (rus.)
- [16] Devnin S.I. Hydroelasticity of structures with detachable flow. L.: Shipbuilding, 1975. (rus.)
- [17] Fershing G. Fundamentals of aeroelasticity. M.: Mechanical Engineering, 1984. (rus.)
- [18] A Modern Course of Aeroelasticity. Ed. Dowell E.H. Kluwer Acad. Publ., 2004.
- [19] Myshenkov V.I., Malashin A.A., Galakhov G.D., Orekhov A.D., Pimenov A.S., Pronin K.N. A study of the suitability of NUMECA PPP for numerical modeling of external flow problems/ISSN 2542-1468, Forest Bulletin / Forestry Bulletin, 2018. Vol. 22. No. 6. pp. 123-131. MGТУ named after N.E. Bauman, 2018. (rus.)
- [20] Landa P.S., Ginevsky A.S. The study of mathematical models for solving "unsolvable" problems. In the collection "Nonlinear problems of oscillation theory and control theory. Vibrational Mechanics", edited by V.V. Beletsky, D.A. Indertsev, A.L. Fradkov; Institute of Problems of Machine Science of the Russian Academy of Sciences. - St. Petersburg; Nauka, 2009, pp. 349-367. (rus.)

- [21] Landa P.S. Disruptive flutter as one of the mechanisms of excitation of self-oscillations of power transmission lines / *Izv. vuzov "HDPE"*, vol.16, No.2, 2009. P. 3-15. (rus.)
- [22] Landa P.S. *Nonlinear oscillations and waves*. M.: Nauka-Fizmatlit, 1997. (rus.)
- [23] Lewis R.I., Porterhouse D.T.C. A generalized numerical method for bluff body stalling aerofoil flow. ASME Paper 82-GT-70, 1982.
- [24] Spalart P.R. Numerical simulation of separated flows. NASA-TM-84238, 1983.
- [25] Sisto F., Thangam S. Abdelrahim A. Computational study of stall flutter in linear cascades. *ASME J. of Turbomachinery*, vol. 115, No 1, 1993.
- [26] Belotserkovsiy S.M., Ginevsky A.S. Modeling of turbulent jets and traces by the method of discrete vortices. M.: Nauka, 1995, 365 p. (rus.)
- [27] Samolysov A.V., Masevich A.V., Valles N.G. Calculation of vortex flow around stationary and oscillating cylindrical bodies by the method of discrete vortices. Application of the discrete vortex method to calculate the vortex flow around stationary and oscillating cylindrical bodies. *Bulletin of Scientific and Technical Development* No. 6 (82), 2014. (rus.)
- [28] Henderson R.D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition // *J. Fluid Mech.* 1997. Vol. 352. P. 65–112.
- [29] He J.W., Glowinski R., Metcalfe R., Nordlander A., Periaux J. Active control and drag optimization for flow past a circular cylinder I: Oscillatory cylinder // *J. Comput. Physics*. 2000. Vol. 163, No. 1. P. 83–117.
- [30] Homescu C., Navon I.M., Li Z. Suppression of vortex shedding for flow around a circular cylinder using optimal control // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2002. Vol. 38. P. 43–69.
- [31] Bergmann M., Cordier L., Brancher J.-P. Optimal rotary control of the cylinder wake using proper orthogonal decomposition reduced-order model // *Phys. Fluids*. 2005. Vol. 17. P. 097101-1–097101-21.
- [32] Góis E.R.C., Souza L.F. An eulerian immersed boundary method for flow simulations over stationary and moving rigid bodies // *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng. Special Issue*. 2010. Vol. 32, No. 5. P. 477–484.
- [33] Morenko I.V. Laminar flow of a viscous incompressible liquid around a cylinder performing rotational vibrations. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2017, Volume 24, No. 3. Article 368. (rus.)
- [34] Smolnikov B.A., Smirnov A.S. Vibrations of a string with internal friction. *Modern mechanical engineering: Science and Education 2021(MMESE-2021): proceedings of the 10th International Scientific Conference on June 24, 2021 / edited by A.N. Evgrafov, A.A. Popovich. - St. Petersburg: POLYTECH PRESS, 2021. P. 192-203. (rus.)*
- [35] Melnikova N.B., Osman A.A., Kudryashov E.V. Analysis of the effect of the contact interaction of wires on the stiffness of a spiral rope. *Modern*

Mechanical Engineering: Science and Education 2023: proceedings of the 12th International Scientific Conference, June 22, 2023 / edited by A.N. Evgrafov, A.A. Popovich. - St. Petersburg: POLYTECH PRESS, 2023. P. 388-404. (rus.)