

УДК 621.01

doi:10.18720/SPBPU/2/id24-102

Н.Б. Мельникова¹, Е.В. Кудряшов²

ИЗГИБ ЖЕСТКОЙ НАТЯНУТОЙ СТРУНЫ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ



¹Наталья Борисовна Мельникова,
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра
Великого
Россия, Санкт-Петербург
Тел.: (812)552-7770, E-mail: melnikova_nb@spbstu.ru



²Евгений Владимирович Кудряшов,
Инжиниринговый центр железнодорожного транспорта
Россия, Сколково
Тел.: +7 (495) 909-17-99 доб. 151,
E-mail: eugeniy.kudryashov@ecrt.ru

Аннотация

В работе рассмотрены аналитические решения задач статики жесткой натянутой струны под действием поперечной сосредоточенной нагрузки F . Проанализирован характер решений в зависимости от граничных условий, включающих жесткую заделку и шарнирное опирание. Выявлен безразмерный параметр κ , по величине которого можно сделать вывод о необходимости учета изгибной жесткости струны. Приведено сравнение полученных решений с классическими решениями, полученными для идеально гибкой струны.

Результаты показали, что при больших значениях $\kappa \gg 1$ влиянием изгибной жесткости на перемещения провода можно пренебречь, когда нагрузка находится в центральной части пролета. Когда нагрузка у опор, влияние изгибной жесткости на перемещения велико в любом случае.

Для гибкого провода с $\kappa \gg 1$ максимальный изгибающий момент $M = \frac{F}{2\alpha}$ возникает в центральной части пролета и не зависит от длины пролета. Величина момента определяется, помимо величины нагрузки, параметром α , характеризующим соотношение геометрической и изгибной жесткостей провода.

Ключевые слова: жесткая струна, балка с натяжением, изгиб, растяжение, геометрическая и изгибная жесткости

Введение

Задачи механики натянутых струн, несущих поперечные нагрузки, представляют интерес при проектировании контактных подвесок железнодорожных магистралей [1–4].

Провода контактных подвесок высокоскоростных железнодорожных магистралей (ВСЖМ) обладают высокой геометрической жесткостью вследствие большого осевого натяжения и при этом имеют относительно малую изгибную жесткость.

Высокое значение осевого натяжения необходимо для обеспечения высокого качества токосъема, при котором сила контактного взаимодействия между токоприемником и контактным проводом не выходила бы за границы заданного нормами [5] диапазона. Выполнение данного условия возможно при ограничении скорости движения поезда уровнем 60% от критической скорости, равной скорости распространения волн поперечных колебаний в подвеске [5]. Большое натяжение проводов вкупе с их достаточно малым погонным весом обеспечивают должное значение критической скорости.

На начальных этапах разработки стандартов проектирования контактных подвесок ВСЖМ было принято моделировать провода подвески идеально гибкими натянутыми струнами. Модель гибких струн зачастую используется и в наше время [1]. Однако, по мере увеличения рабочих скоростей движения все большее влияние на динамику взаимодействия подвески и токоприемника оказывают высокочастотные колебания [6]. При этом из теории известно [7], что изгибная жесткость натянутой балки Бернулли-Эйлера оказывает тем большее влияние на частоты и формы колебаний, чем выше номер гармоники. Пренебрежение изгибной жесткостью контактного провода и несущего троса, особенно контактного провода, действует как фильтр низких частот, срезая высокочастотные моды, реально возбуждаемые в контактных подвесках. Поэтому в настоящее время продвинутые модели взаимодействия токоприемника и подвески учитывают изгибную жесткость, как минимум, контактного провода [8-19].

Таким образом, в научном и инженерном сообществе достигнут консенсус о том, что учет изгибной жесткости контактного провода необходим, прежде всего, в динамических задачах, для корректного моделирования взаимодействия токоприемника и подвески.

В статических задачах для достаточно гибких проводов (таких, как контактный провод реальной подвески) влияние изгибной жесткости на перемещения довольно мало, что будет показано ниже при рассмотрении аналитических решений задач. Тем не менее, в точках приложения сосредоточенных нагрузок (например, в зоне контакта с токоприемником), а также у подвесов, вследствие немалой кривизны провода, возникают изгибные напряжения. Часть изгибных напряжений переменна во времени и может вносить вклад в усталостное разрушение контактного провода, которое в последнее время, по мере увеличения скоростей движения, стало рассматриваться как одна из возможных причин обрыва провода, наряду с более традиционными причинами, такими как термомеханический и электрический износ [20]. Классическая модель идеально гибкой струны, естественно, не дает информации об изгибных напряжениях в контактном проводе. В то же время, в литературе практически не встречаются решения задач о напряженно-деформированном состоянии (НДС) жестких натянутых струн. Поэтому целью данного исследования стало получение аналитических решений задач статики жесткой натянутой струны. Рассматривалось действие на струну поперечной сосредоточенной нагрузки. Задавались граничные условия двух типов – шарнирное опирание и жесткая заделка.

Методы

1. Постановка задачи

Провод натянут в пролете длиной L с силой натяжения H и нагружен сосредоточенной поперечной силой F в произвольном сечении, находящемся на расстоянии a от левой опоры и $b=L-a$ от правой опоры, соответственно. Модель провода – балка Эйлера – Бернулли с предварительным натяжением.

Рассматриваются два варианта граничных условий – шарнирное опирание и жесткое защемление на концах, соответственно.

2. Шарнирное опирание

Располагаем начало координат $x=0$ в точке приложения силы.

Из уравнений равновесия определяем реакции R_1 и R_2 на левой и правой опорах, соответственно:

$$R_1 = \frac{Fb}{L}, R_2 = \frac{Fa}{L}$$

Поскольку распределенной нагрузки в данной задаче нет, для получения формы прогиба можно использовать дважды проинтегрированное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$EJy'' - Hy = \begin{cases} -R_1(a+x) = -\frac{Fb(a+x)}{L}, & -a \leq x \leq 0, \\ -R_2(b-x) = -\frac{Fa(b-x)}{L}, & 0 \leq x \leq b. \end{cases}$$

Общее решение задачи запишется в виде:

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 \operatorname{sh}(\alpha(x+a)) + C_2 \operatorname{ch}(\alpha(x+a)) + \frac{Fb}{LH}(a+x), & -a \leq x \leq 0, \\ y_2(x) = C_3 \operatorname{sh}(\alpha(b-x)) + C_4 \operatorname{ch}(\alpha(b-x)) + \frac{Fa}{LH}(b-x), & 0 \leq x \leq b. \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования;

α – коэффициент, который определяется по формуле:

$$\alpha = \sqrt{\frac{H}{EJ}}$$

Граничные условия, с учетом условий сопряжения, запишутся в виде:

$$y_1|_{x=-a} = y_2|_{x=b} = 0, \quad y_1''|_{x=-a} = y_2''|_{x=b} = 0, \quad y_1|_{x=0} = y_2|_{x=0}, \quad y_1'|_{x=0} = y_2'|_{x=0}$$

Тогда получаем следующую систему уравнений для определения констант интегрирования:

$$\begin{cases} C_2 = C_4 = 0, \\ C_1 \operatorname{sh}(\alpha a) = C_3 \operatorname{sh}(\alpha b), \\ \alpha C_1 \operatorname{ch}(\alpha a) + \frac{Fb}{LH} = -\alpha C_3 \operatorname{ch}(\alpha b) - \frac{Fa}{LH} \end{cases}$$

Откуда следует:

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{F \operatorname{ch}(\alpha b)}{\alpha H \operatorname{sh}(\alpha L)}, \\ C_3 = -\frac{F \operatorname{sh}(\alpha a)}{\alpha H \operatorname{sh}(\alpha L)}. \end{cases}$$

Тогда прогиб провода запишется в виде:

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) = -\frac{F}{\alpha H} \frac{\operatorname{ch}(\alpha b)}{\operatorname{sh}(\alpha L)} \operatorname{sh}(\alpha(a+x)) + \frac{Fb}{LH}(a+x), & -a \leq x \leq 0, \\ y_2(x) = -\frac{F}{\alpha H} \frac{\operatorname{sh}(\alpha a)}{\operatorname{sh}(\alpha L)} \operatorname{sh}(\alpha(b-x)) + \frac{Fa}{LH}(b-x), & 0 \leq x \leq b \end{cases}$$

Кривая статического отжатия провода в точке приложения силы как функция расстояния a от левой опоры до точки приложения силы выразится формулой:

$$\begin{aligned} y_{отж}(a) = y_2(0) &= \frac{F}{H} \left(\frac{(L-a)a}{L} - \frac{\operatorname{sh}(\alpha(L-a))\operatorname{sh}(\alpha a)}{\alpha \operatorname{sh}(\alpha L)} \right) = \\ &= \frac{F}{H} \left(\frac{a(L-a)}{L} - \frac{1}{\alpha(\operatorname{cth}(\alpha a) + \operatorname{cth}(\alpha(L-a)))} \right), \quad 0 \leq a \leq L \end{aligned} \quad (1)$$

Первое слагаемое в выражении (1) соответствует решению для идеально гибкой натянутой струны, второе – учитывает изгибную жесткость провода.

Распределение эластичности провода вдоль пролета можно определить как отношение перемещения провода в точке приложения силы к величине силы:

$$\lambda(a) = \frac{1}{H} \left(\frac{a(L-a)}{L} - \frac{1}{\alpha(\operatorname{cth}(\alpha a) + \operatorname{cth}(\alpha(L-a)))} \right), \quad 0 \leq a \leq L$$

Изгибающий момент в проводе определится по формулам:

$$M(x) = \begin{cases} EJy_1''(x) = -\frac{F}{\alpha} \frac{\operatorname{ch}(\alpha b)}{\operatorname{sh}(\alpha L)} \operatorname{sh}(\alpha(a+x)), & -a \leq x \leq 0, \\ EJy_2''(x) = -\frac{F}{\alpha} \frac{\operatorname{sh}(\alpha a)}{\operatorname{sh}(\alpha L)} \operatorname{sh}(\alpha(b-x)), & 0 \leq x \leq b \end{cases}$$

Максимальный по модулю изгибающий момент возникает в точке приложения нагрузки, когда нагрузка находится в центре пролета:

$$|M_{\max}| = \frac{F}{\alpha} \frac{\operatorname{ch}(\alpha L/2)\operatorname{sh}(\alpha L/2)}{\operatorname{sh}(\alpha L)} = \frac{F}{2\alpha},$$

Таким образом, максимальный изгибающий момент не зависит от длины пролета и определяется, помимо величины нагрузки, параметром α , характеризующим соотношение геометрической и изгибной жесткостей провода.

3. Жесткая заделка

Теперь рассмотрим вариант с жесткой заделкой провода на концах.

Из уравнений равновесия определяются следующие соотношения между реакциями и моментами R_1 , R_2 , M_1 и M_2 на левой и правой опорах, соответственно:

$$\begin{cases} R_2 = F - R_1, \\ M_2 = M_1 - Fb + R_1L. \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение для прогиба запишется в виде:

$$EJy'' - Hy = \begin{cases} -R_1(a+x) - M_1, & -a \leq x \leq 0, \\ -R_2(b-x) - M_2, & 0 \leq x \leq b. \end{cases}$$

Общее решение задачи определяется следующими формулами:

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 \operatorname{sh}(\alpha(x+a)) + C_2 \operatorname{ch}(\alpha(x+a)) + \frac{M_1 + R_1(a+x)}{H}, & -a \leq x \leq 0, \\ y_2(x) = C_3 \operatorname{sh}(\alpha(b-x)) + C_4 \operatorname{ch}(\alpha(b-x)) + \frac{M_2 + R_2(b-x)}{H}, & 0 \leq x \leq b. \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования.

Граничные условия, с учетом условий сопряжения, запишутся в виде:

$$y_1|_{x=-a} = y_2|_{x=b} = 0, \quad y_1'|_{x=-a} = y_2'|_{x=b} = 0, \quad y_1|_{x=0} = y_2|_{x=0}, \quad y_1'|_{x=0} = y_2'|_{x=0}$$

Обозначим $M_1 = M, R_1 = R$. Тогда получаем следующую систему уравнений для определения констант интегрирования и реакций:

$$\begin{cases} C_2 + \frac{M}{H} = 0, \\ C_4 + \frac{M - Fb + RL}{H} = 0, \\ \alpha C_1 + \frac{R}{H} = 0, \\ \alpha C_3 + \frac{F - R}{H} = 0, \\ C_1 \operatorname{sh}(\alpha a) + C_2 \operatorname{ch}(\alpha a) = C_3 \operatorname{sh}(\alpha b) + C_4 \operatorname{ch}(\alpha b), \\ \alpha C_1 \operatorname{ch}(\alpha a) + \alpha C_2 \operatorname{sh}(\alpha a) = -\alpha C_3 \operatorname{ch}(\alpha b) - \alpha C_4 \operatorname{sh}(\alpha b) - \frac{F}{H} \end{cases}$$

Исключив C_1, C_2, C_3, C_4 , получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} -R \operatorname{sh}(\alpha a) - \alpha M \operatorname{ch}(\alpha a) = -(F - R) \operatorname{sh}(\alpha b) - \alpha(M - Fb + RL) \operatorname{ch}(\alpha b), \\ -R \operatorname{ch}(\alpha a) - \alpha M \operatorname{sh}(\alpha a) = (F - R) \operatorname{ch}(\alpha b) + \alpha(M - Fb + RL) \operatorname{sh}(\alpha b) - F. \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} R(-\operatorname{sh}(\alpha a) - \operatorname{sh}(\alpha b) + \alpha L \operatorname{ch}(\alpha b)) + \alpha M(\operatorname{ch}(\alpha b) - \operatorname{ch}(\alpha a)) = F(-\operatorname{sh}(\alpha b) + \alpha b \operatorname{ch}(\alpha b)), \\ R(-\operatorname{ch}(\alpha a) + \operatorname{ch}(\alpha b) - \alpha L \operatorname{sh}(\alpha b)) + \alpha M(-\operatorname{sh}(\alpha a) - \operatorname{sh}(\alpha b)) = F(\operatorname{ch}(\alpha b) - \alpha b \operatorname{sh}(\alpha b) - 1). \end{cases}$$

Определитель системы равен:

$$\begin{cases} \det = \alpha(-\operatorname{sh}(\alpha a) - \operatorname{sh}(\alpha b) + \alpha L \operatorname{ch}(\alpha b))(-\operatorname{sh}(\alpha a) - \operatorname{sh}(\alpha b)) + \\ + \alpha(\operatorname{ch}(\alpha a) - \operatorname{ch}(\alpha b) + \alpha L \operatorname{sh}(\alpha b))(\operatorname{ch}(\alpha b) - \operatorname{ch}(\alpha a)) = \\ = \alpha(2 \operatorname{ch}(\alpha L) - \alpha L \operatorname{sh}(\alpha L) - 2) \end{cases}$$

Реакции определяются по формулам:

$$\begin{cases} R = \frac{F\alpha}{\det}(-\operatorname{ch}(\alpha a) - \alpha b \operatorname{sh}(\alpha L) + \operatorname{ch}(\alpha L) + \operatorname{ch}(\alpha b) - 1) \\ M = \frac{F}{\det}(\operatorname{sh}(\alpha a) - \operatorname{sh}(\alpha L) + \alpha b \operatorname{ch}(\alpha L) + \alpha a + \operatorname{sh}(\alpha b) - \alpha L \operatorname{ch}(\alpha b)) \end{cases} \quad (2)$$

Так как $C_1 = -R / \alpha H$, $C_2 = -M / H$, получаем выражение для прогиба:

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) = -\frac{R}{\alpha H} \operatorname{sh}(\alpha(x+a)) - \frac{M}{H} \operatorname{ch}(\alpha(x+a)) + \frac{M + R(a+x)}{H}, -a \leq x \leq 0, \\ y_2(x) = -\frac{F-R}{\alpha H} \operatorname{sh}(\alpha(b-x)) - \frac{M - Fb + RL}{H} \operatorname{ch}(\alpha(b-x)) + \\ + \frac{M + Ra - (F-R)x}{H}, 0 \leq x \leq b \end{cases}$$

где R, M – реакции, определяемые по формулам (2).

Эпюра изгибающего момента в проводе определится формулой:

$$M(x) = EJy'' = \begin{cases} -\frac{R\alpha}{H} \operatorname{sh}(\alpha(x+a)) - \frac{M\alpha^2}{H} \operatorname{ch}(\alpha(x+a)), -a \leq x \leq 0, \\ -\frac{(F-R)\alpha}{H} \operatorname{sh}(\alpha(b-x)) - \frac{(M - Fb + RL)\alpha^2}{H} \operatorname{ch}(\alpha(b-x)), 0 \leq x \leq b. \end{cases}$$

Кривая статического отжатия провода в точке приложения силы как функция расстояния a от левой опоры до точки приложения силы выразится формулой:

$$y_{отж}(a) = y_1(0) = -\frac{R}{\alpha H} \operatorname{sh}(\alpha a) - \frac{M}{H} \operatorname{ch}(\alpha a) + \frac{M + Ra}{H}, 0 \leq a \leq L,$$

где R, M – реакции, определяемые по формулам (2).

Результаты

Характеристики провода

Характеристики провода и другие исходные данные для расчета представлены в Таблице 1. Рассматривается условное прямоугольное сечение высотой 2 см и шириной 1.2 см.

Таблица 1. Характеристики провода

Параметр	Обозначение	Ед. изм.	Значение
Длина провода	L	м	5
Площадь сечения	S	см ²	2.4
Момент инерции сечения	J	см ⁴	0.8
Момент сопротивления сечения	W	см ³	0.8
Модуль Юнга	E	ГПа	200
Натяжение	H	кН	20
Параметр $\alpha = \sqrt{H / (EJ)}$	α	м ⁻¹	3.48
Параметр $\kappa = \alpha L$	κ	–	17.4
Сила в центре пролета	F	Н	100

Эпюры прогиба для разных положений силы при длине пролета 5 м приведены на рис. 1. Кривые зеленого цвета соответствуют решению для идеально гибкой струны, синего цвета – для жесткой струны с шарнирным опиранием на концах, красного цвета – для жесткой струны с жесткой заделкой на концах. Место приложения силы соответствует положению острого пика на зеленой кривой (построенной для идеально гибкой струны).

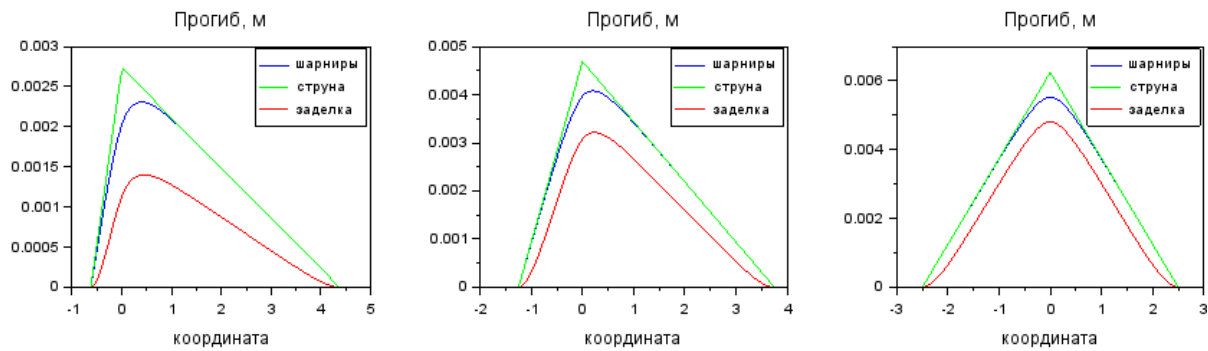


Рис. 1. Эпюры прогиба для разных положений силы

Из рис. 1 видно, что при рассматриваемой длине провода 5 м и параметрах сечения, приведенных в таблице 1, изгибная жесткость ощутимо влияет на прогибы. Поправка к решению, полученному для идеально гибкой струны, составляет 10–50 %, в зависимости от места приложения силы и граничных условий. Величина $\kappa = \alpha L$ здесь равна 17.4.

При $\alpha a \gg 1, \alpha(L-a) \gg 1$ гиперболические котангенсы стремятся к единице: $\text{cth}(\alpha a) \rightarrow 1, \text{cth}(\alpha(L-a)) \rightarrow 1$, и тогда второе слагаемое в (1) слабо зависит от длины пролета и примерно равно $1/2\alpha$. Таким образом, вдали от опор, при $\alpha a \gg 1, \alpha(L-a) \gg 1$ величину статического отжатия провода в точке приложения силы можно упрощенно оценить по формуле:

$$y_{отж}(a) \approx \frac{F}{H} \left(\frac{a(L-a)}{L} - \frac{1}{2\alpha} \right), 0 \leq a \leq L, \alpha \gg 1,$$

где a – расстояние от точки приложения силы до левой опоры.

Таким образом, поправка к величине отжатия провода, связанная с изгибной жесткостью, в центральной части пролета не зависит от длины пролета и равна $\frac{F}{2\alpha H}$.

Если увеличить длину пролета до 65 м и приложить силу в центре пролета, параметр $\kappa = \alpha L$ составит 226. Первое слагаемое $\frac{F}{H} a(L-a)/L$

в (1) составляет $\frac{F}{H} \cdot 16$ м, второе слагаемое на два порядка

меньше: $F/H/\alpha/(\text{cth}(\alpha a) + \text{cth}(\alpha(L-a))) = -\frac{F}{H} \cdot 0,144$ м. В этом случае

изгибная жесткость не оказывает влияния на величину отжатия провода под нагрузкой. Но если нагрузку сместить к одной из опор, в окрестности опоры изгибная жесткость будет оказывать большое влияние на

напряженно-деформированное состояние провода, поскольку при этом уже не соблюдается условие $\kappa = \alpha a \gg 1$

Эпюры изгибающего момента для разных положений силы при длине пролета 5 м приведены на рис. 2. Место приложения силы соответствует положению острого пика на эпюрах. Красная кривая соответствует решению для провода с жесткой заделкой на концах, синяя – решению для шарнирно опертого провода.

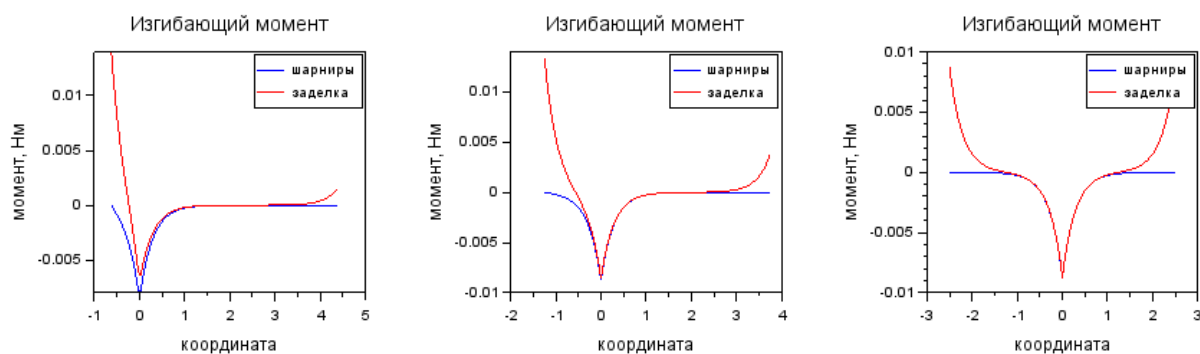


Рис. 2. Эпюры прогиба для разных положений силы

Как видно из рис. 2, высокие изгибные напряжения в проводе возникают в двух сечениях: в заделке, когда нагрузка находится недалеко от нее, и непосредственно под нагрузкой.

Для относительно жесткого провода, характеризующегося небольшим значением безразмерного параметра $\kappa = \alpha L$, максимальные изгибные напряжения будут возникать в заделке.

Для гибкого провода с $\kappa = \alpha L \gg 1$ максимальные изгибные напряжения возникают под нагрузкой в центральной части пролета.

Для рассматриваемого жесткого провода длиной 5 м максимальный по величине изгибающий момент возникает в заделке при $x = 0$ (либо $x = L$), когда нагрузка находится недалеко от соответствующего заделанного конца. Чтобы определить положение нагрузки при максимуме изгибных напряжений в заделке, рассмотрим производную момента в заделке $dM_1(a) / da$ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dM_1}{da} = F\alpha \frac{\text{ch}(\alpha a) - \text{ch}(\alpha L) + 1 - \text{ch}(\alpha(L - a)) + \alpha L \text{sh}(\alpha(L - a))}{\text{det}} = 0$$

Получаем трансцендентное уравнение для определения расстояния a от силы до заделки, при котором в заделке возникает наибольший изгибающий момент:

$$\text{ch}(\alpha a) - \text{ch}(\alpha(L - a)) + \alpha L \text{sh}(\alpha(L - a)) = \text{ch}(\alpha L) - 1$$

Величина безразмерного корня αa зависит от значения αL . Для параметров, приведенных в Таблице 1 и длины провода 5 м получаем корень $\alpha a = 2,80$, что соответствует величине расстояния от силы до опоры $a = 0,16L$.

Для гибкого провода, максимум изгибающего момента возникает под нагрузкой в центральной части пролета. Как видно из графиков, изгибающий момент при этом приблизительно равен моменту, определенному для шарнирно-опертого провода $|M_{\max}| = F / 2\alpha$.

Для рассматриваемых параметров задачи, значение изгибающего момента $|M_{\max}|$ составит 14 Н·м, что дает максимальные изгибные напряжения величиной 18 МПа. Напряжения растяжения составляют $H / S = 83$ МПа. При этом напряжения изгиба изменяются во времени от нуля до максимума при прохождении нагрузки по пролету, а напряжения растяжения постоянны во времени.

Обсуждение

Полученные результаты показывают, что поведение жесткой натянутой струны под нагрузкой определяется безразмерным параметром $\kappa = \alpha L$, где $\alpha = \sqrt{H / EJ}$ – параметр, характеризующий соотношение геометрической и изгибной жесткостей струны, L – характерный размер задачи. Причем, в случае сосредоточенной нагрузки, перемещающейся вдоль пролета, характерный размер определяется расстоянием от нагрузки до опоры, а не длиной пролета.

При небольших значениях параметра κ (на практике, при $\kappa < 50 \div 100$) изгибной жесткостью жесткой струны невозможно пренебречь на всей длине пролета. В этом случае рассматриваемый объект ведет себя как балка с осевым натяжением.

При больших значениях $\kappa \gg 1$ (на практике, при $\kappa \geq 50 \div 100$), влиянием изгибной жесткости на перемещения провода можно пренебречь, когда нагрузка находится в центральной части пролета. У опор влияние изгибной жесткости велико для любого значения α , поскольку $\kappa = \alpha a$ в этом случае мало.

Для гибкого провода с $\kappa \gg 1$ максимальный изгибающий момент $M = \frac{F}{2\alpha}$ не зависит от длины пролета и определяется, помимо величины нагрузки, параметром α , характеризующим соотношение геометрической и изгибной жесткостей провода.

Поправка к величине отжатия гибкого провода в месте приложения нагрузки, связанная с изгибной жесткостью, также не зависит от длины пролета в центральной части пролета и равна $\frac{F}{2\alpha H}$.

Заключение

В работе рассмотрены аналитические решения задач статики жесткой натянутой струны под действием поперечной сосредоточенной нагрузки. Проанализирован характер решений в зависимости от граничных условий, включающих жесткую заделку и шарнирное опирание. Выявлен безразмерный параметр κ , по величине которого можно сделать вывод о необходимости учета изгибной жесткости струны.

Полученные аналитические результаты позволят в дальнейшем рассмотреть сечение реального контактного провода, оценить величину изгибных напряжений в контактом проводе при его взаимодействии с токоприемником и проанализировать риск усталостного разрушения контактного провода от действия переменных нагрузок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kudryashov Eu.V., Melnikova N.B. Parallel simulations of dynamic interaction between train pantographs and overhead catenary line. 2022. Communications in Computer and Information Science. pp. 233–247
- [2] Мельникова Н.Б., Кудряшов Е.В. Спектральный анализ и фильтрация контактного нажатия при взаимодействии пантографа и контактной подвески высокоскоростной железнодорожной магистрали. Современное машиностроение: наука и образование 2022 (ММЕСЕ-22). Материалы 11-й Международной научной онлайн-конференции, с. 294-309.
- [3] Melnikova N.B., Kudryashov Eu.V. Spectral Analysis and Filtration of Contact Force Oscillations in the Pantograph-Catenary System at High-Speed Railway Line. Conference: Modern Engineering: Science and Education. 2023.
- [4] Мельникова Н.Б., Осман А.А., Кудряшов Е.В. Анализ влияния контактного взаимодействия проволок на жесткость спирального каната. Современное машиностроение: наука и образование 2023 (ММЕСЕ-23). Материалы 12-й Международной научной онлайн-конференции, с. 388-402
- [5] EN 50318:2018. Railway applications. Current collection systems. Validation of simulation of the dynamic interaction between pantograph and overhead contact line. 2018.

- [6] Link, M. Zur Berechnung von Fahrleitungsschwingungen mit Hilfe frequenzabhängiger finiter Elemente. *Ing. arch* 51, 45–60 (1981). <https://doi.org/10.1007/BF00535954>
- [7] A. Bokaian, Natural frequencies of beams under tensile axial loads, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 142, Issue 3, 1990, pp. 481-498.
- [8] Finner Lars, Poetsch Gero, Sarnes Bernhard, Kolbe Michael. Program for catenary–pantograph analysis, PrOSA statement of methods and validation according EN 50318. // *Vehicle System Dynamics*. 2015, 53 (3) pp. 305–313.
- [9] Zhou N., Lv Q., Yang Y., Zhang W. (2015). TPL-PCRUN Statement of methods // *Vehicle System Dynamics*. 2015. No. 53 (3). P. 380–391.
- [10] Massat J.-P., Balmes E., Bianchi J.-P., et al. OSCAR statement of methods // *Vehicle System Dynamics*. 2015. No. 53 (3). P. 370–379.
- [11] Ambrósio J., Pombo J., Antunes P., et al. PantoCat statement of method // *Vehicle System Dynamics*. 2015. No. 53 (3). P. 314–328.
- [12] Collina A., Bruni S., Facchinetti A., Zuin A. PCaDA statement of methods // *Vehicle System Dynamics*. 2015. No. 53 (3). P. 347–356.
- [13] Oumri M., Leouatni M., Chentouf S.-A., Rachid A. INPAC a new simulation tool for the prediction of dynamic interaction between the pantograph & the catenary. Conference: International Conference on Railway Technology: Research, Development and Maintenance. April 2016
- [14] Sánchez-Rebollo C., Carnicero A., Jiménez-Octavio J.R. CANDY statement of methods // *Vehicle System Dynamics*. 2015. No. 53 (3). P. 392–401.
- [15] Tur M., Baeza L., Fuenmayor F.J., et al. PACDIN statement of methods // *Vehicle Systems Dynamics*. 2015. No. 53 (3). P. 402–411.
- [16] Ikeda M. ‘Gasen-do FE’ statement of methods // *Vehicle System Dynamics*. 2015. No. 53 (3). P. 357–369
- [17] Cho Y. SPOPS statement of methods // *Vehicle System Dynamics*. 2015. No. 53 (3). P. 329–340.
- [18] Jönsson P.-A., Stichel S., Nilsson C. CaPaSIM statement of methods // *Vehicle System Dynamics*. 2015. No. 53 (3). P. 341–346.
- [19] Nâvik P., Rønnquist A., Stichel S. Variation in predicting pantograph–catenary interaction contact forces, numerical simulations and field measurements // *Vehicle System Dynamics*. 2017. No. 55 (9).
- [20] Nguyen-Tajan T.M.L, Mai S.-H., Massat J.-P., Avronsart S., Banting J., Bianchi J.-P., Maitournam H. Fatigue crack initiation risk analysis and crack propagation modelling in the catenary contact wire of high-speed lines. *Proceedings of the World Congress of Railway Research*. Sydney. 2013. November. 25–27

BENDING OF A TENSIONED BEAM UNDER THE POINT LOAD

¹Engineering Center of Railway Transport, Skolkovo, Russia;

²Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia

Abstract

The paper examines analytical solutions to the problem of a tensioned beam under the action of a transverse point load. The nature of the solutions is analyzed depending on the boundary conditions, including fixed and hinged supports. A dimensionless parameter κ has been identified, the value of κ allows to decide whether it is necessary to take the bending stiffness of the string into account. A comparison of the obtained solutions with classical solutions for an ideally flexible string is given.

The results showed that at large values of κ , the influence of bending stiffness on the displacement of the wire can be neglected when the load is in the middle of the span. When the load is at supports, the influence of bending stiffness on the solution cannot be neglected.

For a rather flexible wire with $\kappa \gg 1$, the maximal bending moment (and maximal bending stress) occur in the central part of the span and do not depend on the length of the span. The magnitude of the moment is determined, in addition to the magnitude of the load, by the parameter characterizing the ratio of the geometric and bending stiffness of the wire.

Key words: tensioned beam, bending, stretching, geometric and bending stiffness

REFERENCES

- [1] Kudryashov Eu.V., Melnikova N.B. Parallel simulations of dynamic interaction between train pantographs and overhead catenary line. 2022. Communications in Computer and Information Science. pp. 233–247
- [2] Melnikova NB., Kudryashov Eu.V. Spectral Analysis and Filtration of Contact Force Oscillations in the Pantograph-Catenary System at High-Speed Railway Line (in Russian). 11th Conference on Modern Engineering: Science and Education, 2022
- [3] Melnikova N.B., Kudryashov Eu.V. Spectral Analysis and Filtration of Contact Force Oscillations in the Pantograph-Catenary System at High-Speed Railway Line. Conference: Modern Engineering: Science and Education. 2023.

- [4] Melnikova NB., Osman AA, Kudryashov Eu.V. Impact of contact interaction of the wires on the stiffness of a spiral steel rope (in Russian). 12th Conference on Modern Engineering: Science and Education. 2023.
- [5] EN 50318:2018. Railway applications. Current collection systems. Validation of simulation of the dynamic interaction between pantograph and overhead contact line. 2018.
- [6] Link, M. Zur Berechnung von Fahrleitungsschwingungen mit Hilfe frequenzabhängiger finiter Elemente. Ing. arch 51, 45–60 (1981). <https://doi.org/10.1007/BF00535954>
- [7] A. Bokaian, Natural frequencies of beams under tensile axial loads, Journal of Sound and Vibration, Volume 142, Issue 3, 1990, pp. 481-498.
- [8] Finner Lars, Poetsch Gero, Sarnes Bernhard, Kolbe Michael. Program for catenary–pantograph analysis, PrOSA statement of methods and validation according EN 50318. // Vehicle System Dynamics. 2015, 53 (3) pp. 305–313.
- [9] Zhou N., Lv Q., Yang Y., Zhang W. (2015). TPL-PCRUN Statement of methods // Vehicle System Dynamics. 2015. No. 53 (3). P. 380–391.
- [10] Massat J.-P., Balmes E., Bianchi J.-P., et al. OSCAR statement of methods // Vehicle System Dynamics. 2015. No. 53 (3). P. 370–379.
- [11] Ambrósio J., Pombo J., Antunes P., et al. PantoCat statement of method // Vehicle System Dynamics. 2015. No. 53 (3). P. 314–328.
- [12] Collina A., Bruni S., Facchinetti A., Zuin A. PCaDA statement of methods // Vehicle System Dynamics. 2015. No. 53 (3). P. 347–356.
- [13] Oumri M., Leouatni M., Chentouf S.-A., Rachid A. INPAC a new simulation tool for the prediction of dynamic interaction between the pantograph & the catenary. Conference: International Conference on Railway Technology: Research, Development and Maintenance. April 2016
- [14] Sánchez-Rebollo C., Carnicero A., Jiménez-Octavio J.R. CANDY statement of methods // Vehicle System Dynamics. 2015. No. 53 (3). P. 392–401.
- [15] Tur M., Baeza L., Fuenmayor F.J., et al. PACDIN statement of methods // Vehicle Systems Dynamics. 2015. No. 53 (3). P. 402–411.
- [16] Ikeda M. ‘Gasen-do FE’ statement of methods // Vehicle System Dynamics. 2015. No. 53 (3). P. 357–369
- [17] Cho Y. SPOPS statement of methods // Vehicle System Dynamics. 2015. No. 53 (3). P. 329–340.
- [18] Jönsson P.-A., Stichel S., Nilsson C. CaPaSIM statement of methods // Vehicle System Dynamics. 2015. No. 53 (3). P. 341–346.
- [19] Nåvik P., Rønnquist A., Stichel S. Variation in predicting pantograph–catenary interaction contact forces, numerical simulations and field measurements // Vehicle System Dynamics. 2017. No. 55 (9).

- [20] Nguyen-Tajan T.M.L, Mai S.-H., Massat J.-P., Avronsart S., Banting J., Bianchi J.-P., Maitournam H. Fatigue crack initiation risk analysis and crack propagation modelling in the catenary contact wire of high-speed lines. Proceedings of the World Congress of Railway Research. Sydney. 2013. November. 25–27