

УДК 330.1

doi:10.18720/SPBPU/2/id24-194

*Завьялова Елизавета Вячеславовна*¹,

студент-бакалавр;

*Ефремов Артём Александрович*²,

доцент, канд. физ.-мат. наук, доцент

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КВАДРОКОПТЕРА НА БАЗЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

^{1,2} Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого;

¹ zavyalova.ev@edu.spbstu.ru, ² Artem.Efremov@spbstu.ru

Аннотация. В работе исследуется математическая модель квадрокоптера на базе уравнения Лагранжа. Показан процесс ее построения. Используется библиотека SymPy для Python для автоматизации вычислений.

Ключевые слова: математическая модель, квадрокоптер, уравнение Лагранжа.

*Elizaveta V. Zavyalova*¹,

Student (Bachelor);

*Artem A. Efremov*²,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

A MATHEMATICAL MODEL OF A QUADROCOPTER BASED ON THE LAGRANGE EQUATION

^{1,2} Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russia;

¹zavyalova.ev@edu.spbstu.ru, ²Artem.Efremov@spbstu.ru

Abstract. The paper investigates a mathematical model of a quadrocopter based on the Lagrange equation. The process of its construction is shown. The SymPy library for Python is used to automate calculations.

Keywords: mathematical model, quadrocopter, Lagrange equation.

Введение

Среди всевозможных инструментов для построения и моделирования различных сложных явлений и процессов основным является теория дифференциальных уравнений. В настоящее время исследования отдельных классов дифференциальных уравнений и их решений получили широкое распространение.

Основной задачей данной работы будем считать построение математической модели динамического объекта (квадрокоптера) на основе уравнения Лагранжа для дальнейшего исследования.

1 Описание модели и основные положения

В качестве динамического объекта — квадрокоптер (рис. 1). Исследуемую модель квадрокоптера будем рассматривать как плоское тело, состоящее из абсолютно жесткой рамы и 4 пропеллеров, одинаковых по размеру и массе. Вся конструкция имеет идеальную симметрическую форму. Для простоты расчетов предположим, что пропеллерами являются диски, закрепленные на концах рамы в точках C_1, C_2, C_3, C_4 . Каждый пропеллер имеет радиус r , массу m_i и массу двигателя m_e . Центр масс рассматриваемого объекта находится в центре конструкции в точке O .

Положение квадрокоптера в пространстве описывается тремя углами Эйлера, на которые квадрокоптер отклоняется относительно неподвижной системы, поворота вокруг оси подвижной системы и тремя координатами центра масс в неподвижной системе, жестко связанной с квадрокоптером.

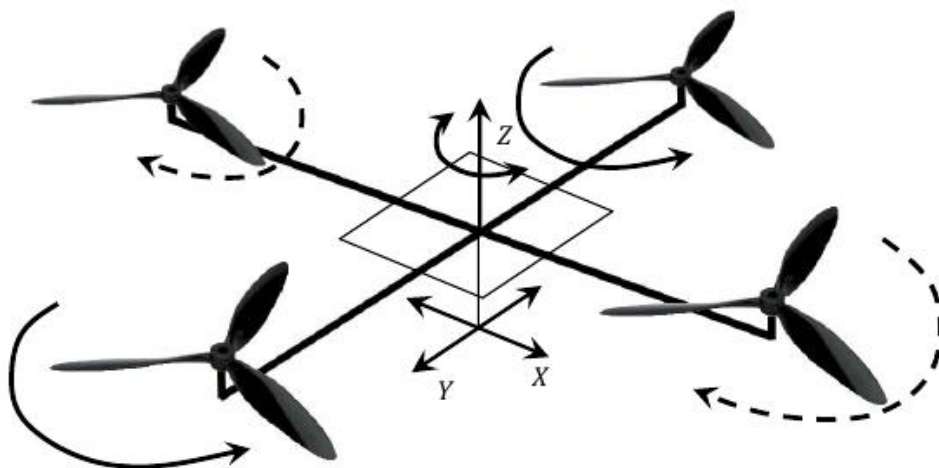


Рис. 1. Схематичное изображение квадрокоптера

Положение квадрокоптера в пространстве описывается тремя координатами центра масс и тремя углами поворота вокруг осей подвижной системы координат:

$$\xi = (x, y, z)^T, \eta = (\varphi, \theta, \psi)^T. \quad (1)$$

С целью автоматизации символьных вычислений в работе используется библиотека SymPy для Python. Так, символьные переменные и константы создаются при помощи функции `symbols` или класса `Symbol`, а функции времени (или другой переменной) можно задать как объект класса `Function`. Для создания вектора обобщенных координат необходимо создать объект класса `Matrix`, передав список созданных ранее переменных в конструктор (рис. 2). Продифференцировав результат по времени с помощью метода `diff`, получим вектор обобщенных скоростей.

Вектор координат $q(t)$:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \phi(t) \\ \theta(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix}$$

Рис. 2. Вид вектора координат на Python

Рассмотрим механическую систему, имеющую s степеней свободы, на которую наложены стационарные, идеальные, голономные связи. В этом случае положение системы определяется s обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_s и вектором обобщенных скоростей.

Квадрокоптер имеет симметричную структуру с четырьмя двигателями, расположенными на лучах по осям O_bX_b и O_bY_b на расстоянии l от центра масс. Матрица инерции имеет следующий вид:

$$I_A = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где I_x, I_y, I_z — моменты инерции при вращении вдоль соответствующих осей, $I_x = I_y$.

Инерция определяется выражением

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} m_c l_c^2 + 2m_e l^2, \quad (3)$$

где m_c — масса центра квадрокоптера, l_c — радиус центра шара, которым описывается центр квадрокоптера, m_e — масса двигателя.

Также необходимо учитывать инерцию винта I_r : $I_r = \frac{1}{3} m_p R^2$, где m_p — масса несущего винта, а R — его радиус.

Общая масса считается как сумма всех элементов:

$$m = m_c + 4m_e + 4m_p. \quad (4)$$

Выражения для сил по соответствующим осям и углам вращения. Вместе силы четырех роторов создают тягу τ_z в направлении оси O_bZ_b . Крутящий момент τ состоит из моментов $\tau_\varphi, \tau_\vartheta$ и τ_ψ в направлении, соответствующему углу поворота системы отсчета квадрокоптера.

$$\tau_z = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4, \quad (5)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\varphi \\ \tau_\vartheta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lk(\omega_2 - \omega_4) \\ lk(\omega_3 - \omega_1) \\ a_r(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где k — подъемный коэффициент, a_r — постоянная вращательного движения.

Кроме того, в модели квадрокоптера требуется учитывать суммарную скорость ω_R , которая рассчитывается следующим образом:

$$\omega_R = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4. \quad (7)$$

Для упрощения работы математическая модель строится с учетом следующих ограничений:

- 1) раму квадрокоптера считаем абсолютно жесткой;
- 2) все детали квадрокоптера одинаковые по плотности и массе;
- 3) квадрокоптер представляет собой идеальную симметричную конструкцию.

Принимая во внимание вышеизложенную теорию построения моделей, можно сделать вывод, что данная модель при создании требует некоторого числа допущений. Для того чтобы избежать этого и описать модель более точно, можно воспользоваться уравнением Лагранжа, рассматривая модель, как систему дифференциальных уравнений движения в обобщенных координатах [2].

Основные положения:

1. Подъемная сила каждого диска-винта создает силу тяги u_i , направленную вдоль оси y , приложенную в точке C_i .

2. При будущем вычислении кинетического момента пропеллера будем считать, что тензор инерции (это объект, который говорит нам, как угловая скорость преобразуется в кинетическую энергию или момент импульса) имеет такой же вид, что и у однородного диска, который назовем несущим винтом.

3. Векторы угловых скоростей винтов, расположенных в точках C_i для нечетного i , сонаправлены вектору оси y , остальные — направлены противоположно. Суммарная скорость ω_R рассчитывается по формуле (7).

4. Заданы три вращающих момента, приложенных непосредственно к корпусу, через которые осуществляется управление ориентацией объекта в пространстве.

5. Будем считать, что воздух оказывает сопротивление только на лопасти несущих винтов, поскольку линейная скорость квадрокоптера существенно меньше скорости вращения винтов.

2. Преобразование к функции Лагранжа

Уравнения Лагранжа второго рода или уравнения движения в обобщенных координатах, можно получить из общего уравнения динамики или из принципа стационарного действия Гамильтона [1].

Уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (8)$$

Уравнения Лагранжа второго рода также можно записать как разность между кинетической энергией T и потенциальной энергией V системы:

$$L(t, q_j, \dot{q}_j) = T(t, q_j, \dot{q}_j) - V(t, q_j). \quad (9)$$

Рассмотрим механическую систему, имеющую s степеней свободы, на которую наложены стационарные, идеальные, голономные связи. В этом случае положение системы определяется s обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_s . Кинетическая энергия такой системы является функцией обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_s , обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ и времени

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t). \quad (10)$$

Для полученной системы можно записать s уравнений, которые называются уравнениями Лагранжа второго рода или дифференциальными уравнениями движения в обобщенных координатах:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, s, \quad (11)$$

где Q_j — обобщенная сила:

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (12)$$

Кинетическая энергия поступательного движения квадрокоптера задается по формуле (3):

$$T_{tran} = \frac{M}{2} (\dot{\xi}, \ddot{\xi}). \quad (13)$$

Кинетическая энергия вращения корпуса:

$$T_{rotO} = \frac{1}{2} (\Omega_o, I_o \Omega_o). \quad (14)$$

Кинетическая энергия поступательного движения квадрокоптера:

$$(0.5mc + 2.0me + 2.0mp) \left(\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} z(t) \right)^2 \right)$$

Кинетическая энергия вращения квадрокоптера:

$$0.5I_z \omega_z^2 + 0.5\omega_x^2 \cdot (2l^2 me + 0.5lc^2 mc) + 0.5\omega_y^2 \cdot (2l^2 me + 0.5lc^2 mc)$$

Кинетическая энергия вращения винтов:

$$0.5I_1 \omega_1^2 + 0.5I_2 \omega_2^2 + 0.5I_3 \omega_3^2 + 0.5I_4 \omega_4^2$$

Рис. 3. Расчет кинетических энергий на Python

Полная функция Лагранжа имеет вид:

$$L(q, \dot{q}) = T_{tran} + T_{rotO} - Mg. \quad (15)$$

3. Запись обобщенных сил

Винты создают силу поступательного движения, приложенную к корпусу исследуемого объекта. Суммарную силу тяги можно записать формулой:

$$F_\xi = URz = \begin{pmatrix} U(\cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) \\ U(\sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) \\ U \cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $U = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) = (\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_4)$.

Далее выражаем три вращательных момента:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lk(u_2 - u_4) \\ lk(u_3 - u_1) \\ k(u_1 - u_2 + u_3 - u_4) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где l — расстояние от центра модели до центра диска, образованного движением винта, k — подъемный коэффициент.

Тогда обобщенные силы можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_\eta = \begin{pmatrix} \tau_\varphi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} &= W_\eta^{-1} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sin \psi}{\cos \theta} (u_3 - u_1) lk + \frac{\cos \psi}{\cos \theta} (u_1 - u_2 + u_3 - u_4) \\ \cos \psi (u_3 - u_1) lk + \sin \psi (u_1 - u_2 + u_3 - u_4) \\ (u_2 - u_4) lk + tg \theta (\sin \psi lk (u_3 - u_1) + \cos \psi (u_1 - u_2 + u_3 - u_4)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

Обобщенные силы:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{kl(-u_1+u_3) \sin(\psi(t))}{\sin^2(\psi(t)) \cos(\theta(t)) + \cos^2(\psi(t)) \cos(\theta(t))} + \frac{(u_1-u_2+u_3-u_4) \cos(\psi(t))}{\sin^2(\psi(t)) \cos(\theta(t)) + \cos^2(\psi(t)) \cos(\theta(t))} \\ \frac{kl(-u_1+u_3) \cos(\psi(t))}{\sin^2(\psi(t)) + \cos^2(\psi(t))} - \frac{(u_1-u_2+u_3-u_4) \sin(\psi(t))}{\sin^2(\psi(t)) + \cos^2(\psi(t))} \\ \frac{kl(-u_1+u_3) \sin(\psi(t)) \sin(\theta(t))}{\sin^2(\psi(t)) \cos(\theta(t)) + \cos^2(\psi(t)) \cos(\theta(t))} + kl(u_2 - u_4) + \frac{(u_1-u_2+u_3-u_4) \sin(\theta(t)) \cos(\psi(t))}{\sin^2(\psi(t)) \cos(\theta(t)) + \cos^2(\psi(t)) \cos(\theta(t))} \end{array} \right]$$

Рис. 4. Расчет обобщенных сил на Python

Запишем формулы аэродинамической силы u_i и момента M_i для одного винта:

$$u_i = \frac{phcaV_i r^2}{4} \dot{\omega}_i, \quad (19)$$

$$M_i = \frac{phcar^4 c_a}{8} \dot{\omega}_i^2. \quad (20)$$

4. Результат вычислений

Подставим все вышеперечисленные формулы в итоговую и найдем $L(q, \dot{q})$.

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) &= T_{tran} + T_{rotO} - Mg = \\ &= \frac{1}{2} (I_{Ox} + 4I_{Cx}) (\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - 2\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos^2 \psi + \\ &+ \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta \sin^2 \psi + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \psi \sin \psi \cos \theta) + \frac{1}{2} (I_{Oz} + \\ &+ 4I_{Cz}) (\dot{\theta}^2 \sin^2 \psi + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta \cos^2 \psi - 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \psi \sin \psi \cos \theta) + \\ &+ \frac{1}{2} I_{Cy} (\dot{\omega}_1^2 + \dot{\omega}_2^2 + \dot{\omega}_3^2 + \dot{\omega}_4^2) - I_{Cz} (\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 - \\ &- \dot{\omega}_4) (\dot{\phi} \cos \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi). \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} L = & \\ & (2.0I_{cx} + 0.5I_{ox}) \left((2.0I_{cz} + 0.5I_{oz}) \left(\sin^2(\psi(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 - 2 \sin(\psi(t)) \cos(\psi(t)) \cos(\theta(t)) \frac{d}{dt} \phi(t) \frac{d}{dt} \theta(t) + \cos^2(\psi(t)) \cos^2(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \sin^2(\psi(t)) \cos^2(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 + 2 \sin(\psi(t)) \cos(\psi(t)) \cos(\theta(t)) \frac{d}{dt} \phi(t) \frac{d}{dt} \theta(t) + \sin^2(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 - 2 \sin(\theta(t)) \frac{d}{dt} \phi(t) \frac{d}{dt} \psi(t) + \cos^2(\psi(t)) \right) \right. \end{aligned}$$

Рис. 5. Расчет $L(q, \dot{q})$ на Python

Исходя из построенной модели, получаем уравнения Лагранжа:

$$\left\{ \begin{aligned}
M\ddot{x} &= \frac{phcaV_i r^2}{4} (\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_4) (\cos\varphi \sin\theta \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi), \\
M\ddot{y} &= \frac{phcaV_i r^2}{4} (\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_4) (\sin\varphi \sin\theta \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi), \\
M\ddot{z} &= \frac{phcaV_i r^2}{4} (\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_4) \cos\theta \cos\psi - Mg, \\
\ddot{\varphi} & \left((I_{Ox} + 4I_{Cx}) \sin^2\theta + (I_{Ox} + 4I_{Cx}) \cos^2\theta \sin^2\psi + (I_{Oz} + 4I_{Cz}) \cos^2\theta \cos^2\psi \right) + \\
& + \ddot{\theta} \cos\psi \sin\psi (I_{Ox} + 4I_{Cx} - I_{Oz} - 4I_{Cz}) - (I_{Ox} + 4I_{Cx}) \ddot{\psi} \sin\theta + \\
& + \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin 2\theta \cos^2\psi (I_{Ox} + 4I_{Cx} - I_{Oz} - 4I_{Cz}) + \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin 2\psi \cos^2\theta (I_{Ox} + 4I_{Cx} - \\
& - I_{Oz} - 4I_{Cz}) + \dot{\theta}^2 \sin\theta \cos\psi \sin\psi (I_{Oz} + 4I_{Cz} - I_{Ox} - 4I_{Cx}) + \\
& + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos\theta (-2(I_{Ox} + 4I_{Cx}) \sin^2\psi - (I_{Oz} + 4I_{Cz}) \cos 2\psi) = -I_{Cz} (\ddot{\omega}_1 - \ddot{\omega}_2 + \\
& + \ddot{\omega}_3 - \ddot{\omega}_4) \cos\theta \cos\psi + I_{Cz} (\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_4) (\dot{\theta} \sin\theta \cos\psi - \dot{\psi} \cos\theta \sin\psi) + \\
& + \frac{phcaV_i r^2}{4} l \frac{\sin\psi}{\cos\theta} (\dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_1) - \frac{phcar^4 c_a \cos\psi}{8 \cos\theta} (-\dot{\omega}_1^2 + \dot{\omega}_2^2 - \dot{\omega}_3^2 + \dot{\omega}_4^2), \\
\ddot{\theta} & \cos\theta \sin\psi \cos\psi (I_{Ox} + 4I_{Cx} - I_{Oz} - 4I_{Cz}) + \ddot{\theta} \left((I_{Ox} + 4I_{Cx}) \cos^2\psi + (I_{Oz} + \right. \\
& + 4I_{Cz}) \sin^2\psi \left. \right) + \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos\theta (2(I_{Ox} + 4I_{Cx}) \cos^2\psi - (I_{Oz} + 4I_{Cz}) \cos 2\psi) + \\
& + \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta \cos^2\psi (I_{Oz} + 4I_{Cz} - I_{Ox} - 4I_{Cx}) + \dot{\theta} \dot{\psi} \sin 2\psi (I_{Oz} + 4I_{Cz} - I_{Ox} - \\
& - 4I_{Cx}) = I_{Cz} \sin\psi (\ddot{\omega}_1 - \ddot{\omega}_2 + \ddot{\omega}_3 - \ddot{\omega}_4) + I_{Cz} \cos\psi (\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 - \\
& - \dot{\omega}_4) (\dot{\psi} - \dot{\varphi} \sin\theta) + \cos\psi \frac{phcaV_i r^2}{4} l (\dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_1) - \sin\psi \frac{phcar^4 c_a}{8} (-\dot{\omega}_1^2 + \\
& + \dot{\omega}_2^2 - \dot{\omega}_3^2 + \dot{\omega}_4^2), \\
& - (I_{Ox} + 4I_{Cx}) \ddot{\varphi} \sin\theta + (I_{Ox} + 4I_{Cx}) \ddot{\psi} + \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos\theta \left((I_{Oz} + 4I_{Cz}) \cos 2\psi - 2(I_{Ox} + \right. \\
& + 4I_{Cx}) \cos^2\psi \left. \right) + \dot{\varphi}^2 \cos^2\theta \sin\psi \cos\psi (I_{Oz} + 4I_{Cz} - I_{Ox} - 4I_{Cx}) + \\
& + \dot{\theta}^2 \sin\psi \cos\psi (I_{Ox} + 4I_{Cx} - I_{Oz} - 4I_{Cz}) = I_{Cz} (\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_4) \cdot \\
& \cdot (-\dot{\varphi} \cos\theta \sin\psi - \dot{\theta} \cos\psi) + \frac{phcaV_i r^2}{4} l (\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_4) + \\
& + tg\theta \left(\frac{phcaV_i r^2}{4} l \sin\psi (\dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_1) + \cos\psi \frac{phcar^4 c_a}{8} (-\dot{\omega}_1^2 + \dot{\omega}_2^2 - \dot{\omega}_3^2 + \dot{\omega}_4^2) \right).
\end{aligned} \right. \quad (22)$$

Заключение

Таким образом, в данной статье выведена система уравнений для управления динамическим объектом (квадрокоптером) на базе уравнений Лагранжа. Для упрощения вычислений использовалась библиотека символьных вычислений SymPy на языке Python. Это облегчает дальнейшее ее использование и вычисление управлений.

Список литературы

1. Беленький И.М. Введение в аналитическую механику. – М.: Высш. школа, 1964. – 324 с.
2. Павловский В.Е., Савицкий А.В. Модель квадрокоптера и нейросетевой алгоритм управления // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2017. – № 77. – 20 с.

3. Шестаков К.С. Информационные модели квадрокоптера: выпускная квалификационная работа бакалавра по направлению подготовки 09.04.02 – Информационные системы и технологии [Электронный ресурс] // Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. – СПб., 2018. – DOI: 10.18720/SPBPU/2/v18-6477. – URL: <http://elib.spbstu.ru/dl/2/rev/v18-6477-o.pdf>; <http://elib.spbstu.ru/dl/2/rev/v18-6477-r.pdf> (дата обращения: 10.12.2023).