УДК 004.85
doi:10.18720/SPBPU/2/id24-196

Мрыхин Захар Владимирович,
студент бакалавриата

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ САУ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Россия, Санкт-Петербург,
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
mrykhin.zv@edu.spbstu.ru

Аннотация. В работает решается задача стабилизации программных движение САУ с интервальными ограничениями на управление. Производятся преобразования и погружение модели в оптимизационную задачу, которая решается точным алгоритмом.

Ключевые слова: стабилизация программных движений, система автоматического управления, оптимизация, квадратичный функционал, исследование операций.

Zakhar V. Mrykhin,
Graduate student

STABILIZATION OF PROGRAM MOVEMENTS OF ACS WITH INTERVAL RESTRICTIONS

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia,
mrykhin.zv@edu.spbstu.ru

Abstract. The article solves the problem of stabilizing the software movement of the ACS with interval control restrictions. Transformations are performed and the model is immersed in an optimization problem, which is solved by an exact algorithm.

Keywords: stabilization of program movements, automatic control system, optimization, quadratic functional, operations research.

Введение

Стабилизация программных движений для объектов управления является важной задачей ТАУ и исследования операций. В данной работе вычисляется минимум квадратичного функционала с интервальными ограничениями, что обеспечивает стабилизацию программных движений объекта управления.

1. Постановка задачи

Пусть объект САУ задаётся следующим разностным уравнением:

$$x_{k+1} = Hx_k + Fu_k, \tag{1}$$

где k — дискретный момент времени, x_k — вектор состояния в k-й момент времени, u_k — управление, действующее в k-й момент времени, а H и F — матрицы, характеризующие САУ. Таким образом, зная текущее положение, а также задав управление, действующее на неё, можно получить, где объект будет находиться в следующий момент.

Можно записать, как будет выглядеть задача в общем случае:

$$u_k^* = argmin\left\{\varphi = \left\|x_k^{\text{пд}} - x_{k+1}\right\|^2 \middle| x_{k+1} = Hx_k + Fu_k\right\}, \tag{2}$$

без ограничений на управление и соответственно

$$u_k^* = argmin\left\{\varphi = \left\|x_k^{\text{пд}} - x_{k+1}\right\|^2 \middle| x_{k+1} = Hx_k + Fu_k, u_i^- \le u_{k_i} \le u_i^+\right\}, \tag{3}$$

с ограничением на управление.

В этой задаче мы ищем оптимальное управление, которое будет минимизировать функционал нормы разности между $x_k^{\text{пд}}$ и x_{k+1}. $x_k^{\text{пд}}$ — вектор программных движений, то состояние системы, к которому она должна стремиться. u^- и u^+ — соответственно нижняя и верхняя границы управления.

2. Решение задачи

Задача без ограничений будет решаться не сложно. Преобразуем функционал к следующему виду:

$$\varphi = \left\|x_k^{\text{пд}} - x_{k+1}\right\|^2 = (x_k^{\text{пд}} - x_{k+1})^T (x_k^{\text{пд}} - x_{k+1}) =$$
$$= (x_k^{\text{пд}} - Hx_k - Fu_k)^T (x_k^{\text{пд}} - Hx_k - Fu_k).$$

Можно сделать замену: $Z = (x_k^{\text{пд}} - Hx_k - Fu_k)$, получим $\varphi = Z^T Z$. Минимум такого функционала находится в начале координат:

$Z = 0 <=> x_k^{\text{пд}} - Hx_k - Fu_k = 0$.

Выразим u_k, использовав псевдообратную матрицу $F = (F^T F)^{-1} F^T$:

$$u_k^* = F(x_k^{\text{пд}} - Hx_k). \tag{4}$$

Решим теперь задачу, имеющую ограничения.

$$\varphi = \left\|x_k^{\text{пд}} - x_{k+1}\right\|^2 = \left\|x_k^{\text{пд}} - Hx_k - Fu_k\right\|^2.$$

Сделаем замену:

$$Z = x_k^{\text{пд}} - Hx_k - Fu_k \Leftrightarrow u_k = F(x_k^{\text{пд}} - Hx_k - Z). \tag{5}$$

Выразим ограничения на Z. Подставим в интервальные ограничения на u_k:

$$u^{-} \le F(x_k^{\text{пд}} - Hx_k - Z) \le u^{+}.$$

Выразим отсюда *Z*:

$$\overline{F}u^{+} - x_k^{\text{пд}} + Hx_k \le Z \le \overline{F}u^{-} - x_k^{\text{пд}} + Hx_k,$$

где

$$\bar{F} = \left(F^T F\right)^{-1} F^T.$$

Обозначим $Z^{-} = \overline{F}u^{+} - x_k^{\text{пд}} + Hx_k$, $Z^{+} = \overline{F}u^{-} - x_k^{\text{пд}} + Hx_k$.

Функционал будет иметь вид:

$$\varphi = \|Z\|^2 = Z^T Z.$$

Таким образом, мы свели исходную задачу вычисления управления к задаче:

$$Z^{*} = argmin\left\{\varphi = Z^T Z \middle| Z^{-} \le Z \le Z^{+}\right\}, \qquad (6)$$

где

$$Z = x_k^{\text{пд}} - Hx_k - Fu_k \Leftrightarrow u_k = F(x_k^{\text{пд}} - Hx_k - Z),$$

$Z^{-} = \overline{F}u^{+} - x_k^{\text{пд}} + Hx_k, Z^{+} = \overline{F}u^{-} - x_k^{\text{пд}} + Hx_k$ называемой задачей оптимизации квадратичного функционала с интервальными ограничениями. Решив её, мы сможем вычислить оптимальное управление.

У функционала с интервальными ограничениями может быть 2 случая условного минимума:

- условный минимум находится внутри интервальных ограничений;
- условный минимум находится на одном из ограничений.

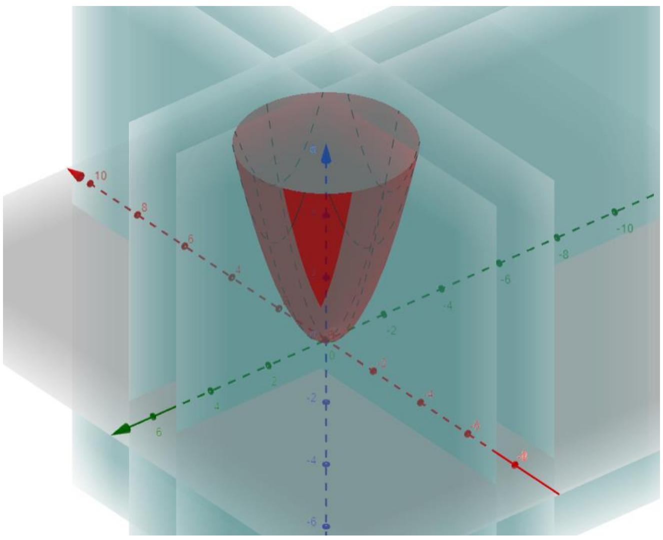

Рис. 1. Квадратичный функционал и плоскости, являющиеся границами соответствующих ограничений-неравенств

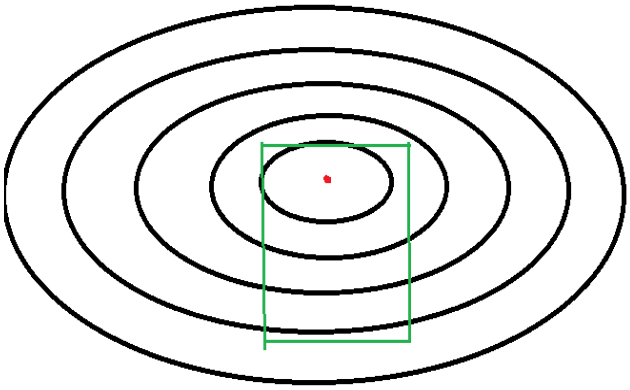

Рис. 2. Линии уровня и прямоугольник, который задают ограничения

Исходя из этого рисунка видно, что в первом достаточно просто вычислить положение вершины параболоида. В нашем случае это соответствует уравнению:

$$Z = x_k^{\text{пд}} - Hx_k - Fu_k = 0,$$

решение которого является уравнение (4), рассмотренное выше.

Более интересным является случай, когда вершина параболоида находится не внутри области, удовлетворяющей ограничениям задачи (см. рис. 3)

Решить данную задачу можно следующим способом:

– $Z_i = 0$, если Z_i удовлетворяет интервальному ограничению;

– $Z_i^* = Z^-$, если $0 < Z^-{}_i < Z^+{}_i$ и $Z_i = Z^+{}_i$, если $Z^-{}_i < Z^+{}_i < 0$,

то есть производится проецирование начала координат на ближайшее ограничение.

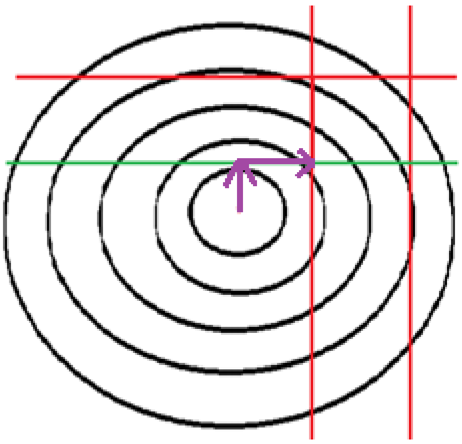

Рис. 3. Линии уровня, проецирование и интервальные ограничения

Этот подход верен из-за того, что полученная таким образом точка будет находится ближе всего к началу координат, то есть обладает минимальной нормой из всего допустимого множества.

Рассмотрим другой подход к решению задачи стабилизации, а именно погружение модели в задачу математического программирования следующим образом.

Пусть имеется объект управления:

$$x_{k+1} = Hx_k + Fu_k.$$

Перенесём слагаемое из правой части в левую и проделаем замены:

$$x_{k+1} - Fu_k = Hx_k = AZ = b,$$

где $A = (E \quad -F)$, $b = HZ_k$,

Z_k — вектор расширенного пространства переменных.

Тогда задача будет иметь вид:

$$Z^* = argmin\{\varphi = Z^T Z \,|\, Z^-_i \le Z_i \le Z^+_i, AZ = b\};$$

$AZ = b$ — линейное многообразие, $Z^-_i \le Z_i \le Z^+_i$ — интервальные ограничения, многомерный параллелепипед, $\varphi = Z^T Z$ — минимизируемая функция, по сути, её минимизация сводится к поиску ближайшей к началу координат точке, которая будет лежать на линейном многообразии и удовлетворять интервальным ограничениям.

Предлагаемый приближённый алгоритм схематически может быть изображён на рисунке 4.

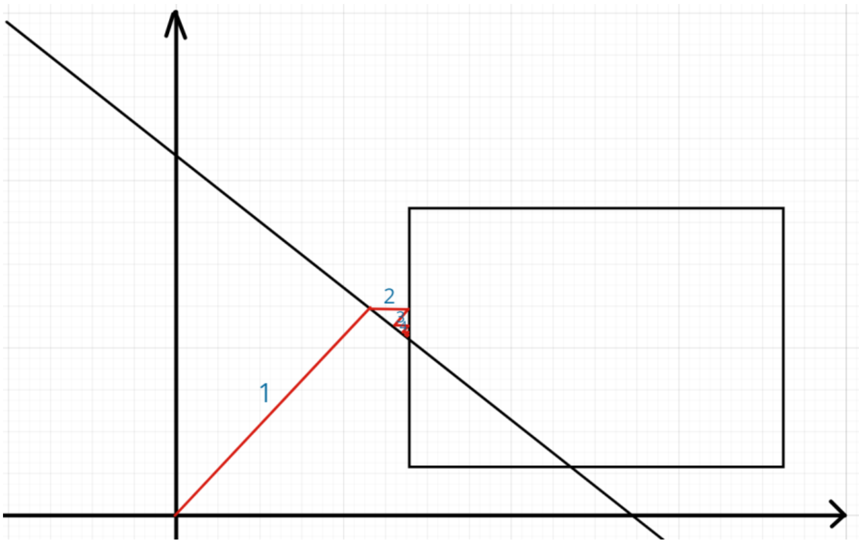

Рис. 4. Схема метода

Алгоритм заключается в последовательных проекциях текущего приближения (можно начать с начала координат) на линейное многообразие и интервальные ограничения. Однако можно заметить, что если остановиться на линейном многообразии, то решение не будет удовлетворять интервальным ограничениям, а если остановиться на интервальных ограничениях, то решение не будет удовлетворять линейному многообразию. Поэтому предлагается ввести точность ε, создав новые ограничения следующим образом:

$$Z^-_i + \varepsilon_i \le Z_i \le Z^+_i - \varepsilon_i .$$

Теперь стоит делать проекции на новые ограничения и после проекций на линейное многообразие стоит проверять удовлетворение изначальных интервальных ограничений. Таким образом, получаем следующий алгоритм:

1) Сужение области $Z^-_i + \varepsilon_i \le Z_i \le Z^+_i - \varepsilon_i$

2) Проекция начала координат на линейное многообразие $Z_1 = (A^T A)^{-1} A^T b.$

3) Если точка удовлетворяет ограничениям, то победа.

4) Проекция точки на суженные интервальные ограничения (см. ниже).

5) Проекция точки на линейное многообразие $Z_i = (A^T A)^{-1} A^T (b + AZ_{i-1}) + Z_{i-1} = (A^T A)^{-1} A^T b + 2Z_{i-1}.$

6) Если точка удовлетворяет исходным ограничениям, то победа, иначе возвращение к шагу 4.

Выполнить 4-й пункт вышеупомянутого алгоритма можно по аналогии описанного ранее метода: проходим по всем интервальным ограничениям и если они не удовлетворяются, то меняем координату точки на ближайшую, удовлетворяющую ограничениям.

Пример:

Интервальные ограничения $3 \le x \le 5$, $-1 \le y \le -4$.

Точка Z_{i-1} = (0; –2). Смотрим на первую координату — «0». Не удовлетворяет. Ближайшее ограничение к нулю — «3». Значит меняем координату на «3». Вторая координата «–2». Удовлетворяет ограничениям, значит не меняем координату.

Получили точку Z_i = (3; –2).

Визуально представить данный алгоритм можно следующим образом:

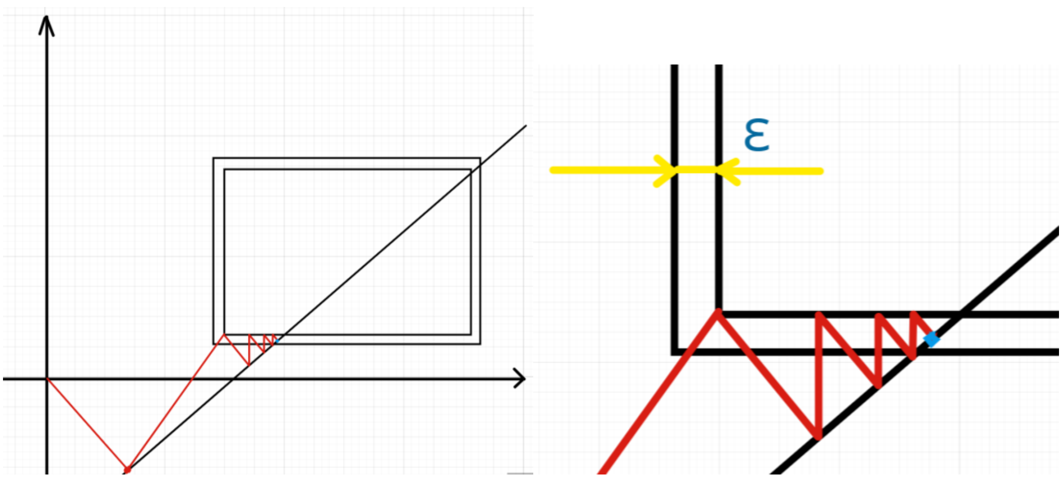

Рис. 5. Визуализация приближенного метода

Таким образом, возможно получить решение, удовлетворяющее всем ограничениям с точностью ε.

Заключение

В данной работе были представлены два метода стабилизации программных движений — точный и численный, основанный на последовательных проекциях на линейное многообразие и на интервальные ограничения.

Список литературы

1. Козлов В.Н. Проекционный метод синтеза ограниченных оптимальных управлений динамических систем энергетики: монография. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2019. – DOI: 10.18720/SPBPU/2/i19-277.
2. Козлов В. Н. Системный анализ, оптимизация и принятие решений: учеб. пособие /. В. Н. Козлов. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 244 с.
3. Потапов А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Теория, задачи и упражнения: учебное пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2013. – DOI: 10.18720/SPBPU/2/si20-146.
4. Козлов В.Н., Куприянов В.Е., Шашихин В.Н. Теория автоматического управления: учебное пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008.