УДК 519.217.8
doi:10.18720/SPBPU/2/id24-197

Овечкин Николай Николаевич,
студент

ВЫВОД МОДЕЛИ СМО С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Россия, Санкт-Петербург,
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
ovechkin.01@inbox.ru

Аннотация. В статье рассматривается вывод системы массового обслуживания с постоянными коэффициентами. Вывод строится на предположении, что процесс работы системы массового обслуживания можно рассматривать как марковский процесс, а поток событий ординарный и стационарный. Поток событий является потоком события без последействия. Также поток является простейшим и стационарным. Результатом проделанной работы является модель, описывающая порт как систему массового обслуживания с постоянными коэффициентами. Модель порта представлена системой массового обслуживания с ограниченной очередью.

Ключевые слова: система массового обслуживания, порт, закон Пуассона, марковский процесс, очередь, поток событий.

Nikolai N. Ovechkin,
Student

CONCLUSION OF A MODEL OF A MASS SERVICE SYSTEM WITH CONSTANT COEFFICIENCES

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Peterburg, Russia,
ovechkin.01@inbox.ru

Abstract. The article with the derivation of a queuing system with constant coefficients. The derivation assumes that the operation process of the mass service system can be regarded as a Markov process and the event stream is ordinal and stationary. The flow of events is an event flow with no aftereffect. Also, the flow is ordinal and stationary. The result of this work is a model describing the port as a queuing system with constant coefficients. The port model is represented by a queuing system with a limited queue.
Keywords: queuing system, port, Poisson's law, Markov process, queue, event flow.

Введение

В статье автором последовательно производится вывод системы массового обслуживания для порта. Шаг за шагом приводятся ограничения или допущения, которые делаются в задаче для получения успешной модели порта как системы массового обслуживания. После ввода всех ограничений и допущений выполняется переход к выводу модели для частного случая, а именно, для порта, который содержит два причала для загрузки/разгрузки и очередь, содержащую два причала. После получения модели для частного случая производится обобщение модели для общего случая с n-м количеством причалов для обработки заявок и m-м количество причалов для стоянки кораблей. Также обобщенная модель приведена для случая с непостоянными коэффициенты.

Для дальнейшего рассуждения необходимо ввести несколько определений.

Система массового обслуживания — это система, которая выполняет много раз однотипные задачи [1].

Порт — это участок суши и часть водной площади, обустроенные и оборудованные таким образом, чтобы они могли использоваться для приёма, погрузки и разгрузки судов и хранения грузов, получения этих грузов от операторов внутреннего водного транспорта и передачи им таких грузов и может включать также деятельность предприятий, связанных с морскими перевозками [2].

1. Ввод дополнительных понятий, ограничений и допущений

Марковское свойство означает, что для любого момента времени вероятностные характеристики процесса в будущем не зависят от того, как и когда система пришла в текущее состояние, но зависят от его состояния в текущий момент времени. В случае, когда мы говорим о системе массового обслуживания, то состояние системы можно определять как количество заявок в очереди и количество занятых приборов/причалов. Мы можем получить вероятность перехода в другое состояние при условии, если нам известно текущее состояние системы. Следовательно, процесс выполнения заявок системой массового обслуживания можно считать марковским процессом, так как он удовлетворяет марковскому свойству.

Ординарный поток событий — это поток, в котором вероятность попадания двух и более событий на элементарный промежуток времени пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события [3]. Например, если в порт приходят корабли, и мы хотим узнать, является ли поток прибытия кораблей ординарным, то мы делим время на малые промежутки и считаем количество кораблей, которые прибыли за каждый промежуток. Если вероятность того, что за промежуток времени прибудет более одного корабля, пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью того, что прибудет ровно один корабль то такой поток является ординарным.

Стационарный поток событий — это поток событий, вероятностные характеристики которого не зависят от времени [3]. Если в порт приходят корабли, и мы хотим узнать, является ли поток прибытия кораблей стационарным, то мы можем разделить время на равные интервалы и посчитать количество кораблей, прибывших за каждый интервал. Если вероятность того, что за интервал времени прибудет один корабль, постоянна и не зависит от времени, то поток является стационарным.

Поток событий без последействия — это такой поток событий, при котором для любых двух непересекающихся участков времени τ_1 и τ_2 — число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.

Простейший (пуассоновский) поток событий — это поток событий, который является и стационарным, и ординарным и не имеет последействия.

2. Формирование формул для получения модели

Исходя из предыдущего пункта, дальнейшие рассуждения будут строиться на основе закона Пуассона.

Для пуассоновского (простейшего) потока число m точек (событий), которые попадают на произвольный участок времени τ, распределено по закону Пуассона (2.1) [4].

$$P(m) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!}e^{-\lambda\tau} \tag{2.1}$$

Для которого определено математическое ожидание (2.2):

$$a = \lambda\tau \tag{2.2}$$

В частности, вероятность того, что за время τ произойдет 0 событий (m = 0), равна (2.3).

$$P(0) = e^{-\lambda\tau} \tag{2.3}$$

В соответствии с (2.3) вероятность того, что на участке времени длиной t не появится ни одного из последующих событий, равна (2.4).

$$P(T \ge t) = e^{-\lambda\tau} \tag{2.4}$$

Вероятность противоположного события равна разности единицы и вероятности этого события (2.5).

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{2.5}$$

Для простейшего потока с интенсивностью λ вероятность попадания на малый промежуток времени Δt хотя бы одного события потока равна (2.6).

$$P_{\Delta t} = P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda\Delta t} \approx \lambda\Delta t \tag{2.6}$$

Тут важно отметить, что $\lambda\Delta t$ получились из разложения функции $F(t)$ в ряд Тейлора с точностью до двух членов.

Вероятность i-го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент времени t система будет находится в состоянии S_i. Очевидно, что для любого момента t сумма вероятностей всех состояний равна единице (2.7).

$$\sum_{i=0}^{5} p_i(t) = 1 \tag{2.7}$$

3. Вывод модели системы массового обслуживания с 2 узлами обслуживания и 2 ячейками очереди

Система, для которой будут вестись рассуждения, представлена на рисунке 3.1.

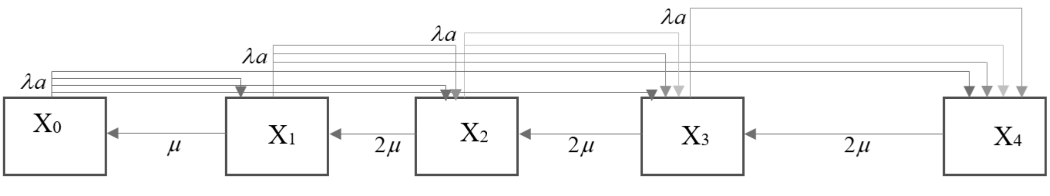

Рис. 3.1. СМО, в рамках которой строятся рассуждения

В рамках этого раздела воспользуемся всеми ограничениями и дополнениями, которые были введены автором ранее. Рассмотрим систему в момент t и зададим малый промежуток времени Δt. Найдем вероятность $p_0(t)$ того, что система в момент $t + \Delta t$ будет находиться в состоянии S_0.

Система в момент t с вероятностью $p_0(t)$ находилась в состоянии X_0 — все свободно и за время Δt не вышла из него. Вывести систему из этого состояния можно суммарным потоком с интенсивностью (3.1), то есть в соответствии с формулой (2.6) с вероятностью приближенно равной (3.2).

$$\lambda a + \lambda a + \lambda a + \lambda a = 4\lambda a \tag{3.1}$$

$$p_{\Delta t} = 4\lambda a \Delta t \tag{3.2}$$

Вероятность того, что система массового обслуживания не выйдет из состояния X_0 равна (3.3).

$$p_{\Delta t} = 1 - 4\lambda a \Delta t \tag{3.3}$$

Вероятность состояния системы X_0, а именно того, что система была в этом состоянии и не перейдет из него в другое за время Δt, равна согласно по теореме умножения вероятностей, учитывая тот факт, что это независимые события, произведению этих двух вероятностей (3.4).

$$p_{\Delta t} = p_0(t) \cdot (1 - 4\lambda a \Delta t) \tag{3.4}$$

Система в момент t с вероятностью $p_1(t)$ находилась в состоянии 1 и за время Δt перешла в состояние X_0. Вероятность перехода за время Δt и вероятность перехода из состояния 2 в состояние 1 (3.5).

$$\begin{gathered} \overline{p_{\Delta t}} = \mu \Delta t \\ \overline{\overline{p}} = \mu \Delta t p_1 \end{gathered} \tag{3.5}$$

То есть общая вероятность нахождения системы в момент времени $t + \Delta t$ равна сумме этих двух событий (3.6), так как события несовместные.

$$p_0(t + \Delta t) = \mu \Delta t p_1 + p_0(1 - 4\lambda a \Delta t). \tag{3.6}$$

Делим все на Δt (3.7).

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0}{\Delta t} = \mu p_1 - 4\lambda a p_0 \tag{3.7}$$

Устремим все в предел при $\Delta t \to 0$ и получим (3.8).

$$\begin{gathered} \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\mu p_1 - 4\lambda a p_0 \right) \\ \frac{dp_0}{dt} = \mu p_1 - 4\lambda a p_0 \end{gathered} \tag{3.8}$$

Аналогичные рассуждения можно провести для состояний X_1, X_2, X_3, X_4 и получить систему (3.9):

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = \mu p_1 - 4\lambda a p_0 \\ \dfrac{dp_1}{dt} = \lambda a p_0 - (3\lambda a + \mu) p_1 + 2\mu p_2 \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \lambda a p_0 + \lambda a p_1 - \left(2\lambda a + 2\mu\right) p_2 + 2\mu p_3 \\ \dfrac{dp_3}{dt} = \lambda a p_0 + \lambda a p_1 + \lambda a p_2 - (\lambda a + 2\mu) p_3 + 2\mu p_4 \\ \dfrac{dp_4}{dt} = \lambda a p_0 + \lambda a p_1 + \lambda a p_2 + \lambda a p_3 - 2\mu p_4 \end{cases} \tag{3.9}$$

В таком виде матрица системы является вырожденной, так как последняя строка будет являться ЛК всех предыдущих. Чтобы избавиться от вырожденности воспользуемся нормализованным выражением (3.10).

$$\frac{dp_4}{dt} = \lambda a(1 - p_4) - 2\mu p_4 \tag{3.10}$$

Тогда система 3.9 будет иметь вид (3.11):

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = \mu p_1 - 4\lambda a p_0 \\ \dfrac{dp_1}{dt} = \lambda a p_0 - (3\lambda a + \mu) p_1 + 2\mu p_2 \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \lambda a p_0 + \lambda a p_1 - \left(2\lambda a + 2\mu\right) p_2 + 2\mu p_3 \\ \dfrac{dp_3}{dt} = \lambda a p_0 + \lambda a p_1 + \lambda a p_2 - (\lambda a + 2\mu) p_3 + 2\mu p_4 \\ \dfrac{dp_4}{dt} = \lambda a(1 - p_4) - 2\mu p_4 \end{cases} \tag{3.11}$$

При моделировании данной системы можно получить график, представленный на рисунке (рис. 3.2) при $\lambda = 0,4,\ \mu = 0,5,\ a = 2$. И при следующих начальных условиях: $p_0 = 1,\ p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_3 = 0,\ p_4 = 0$.

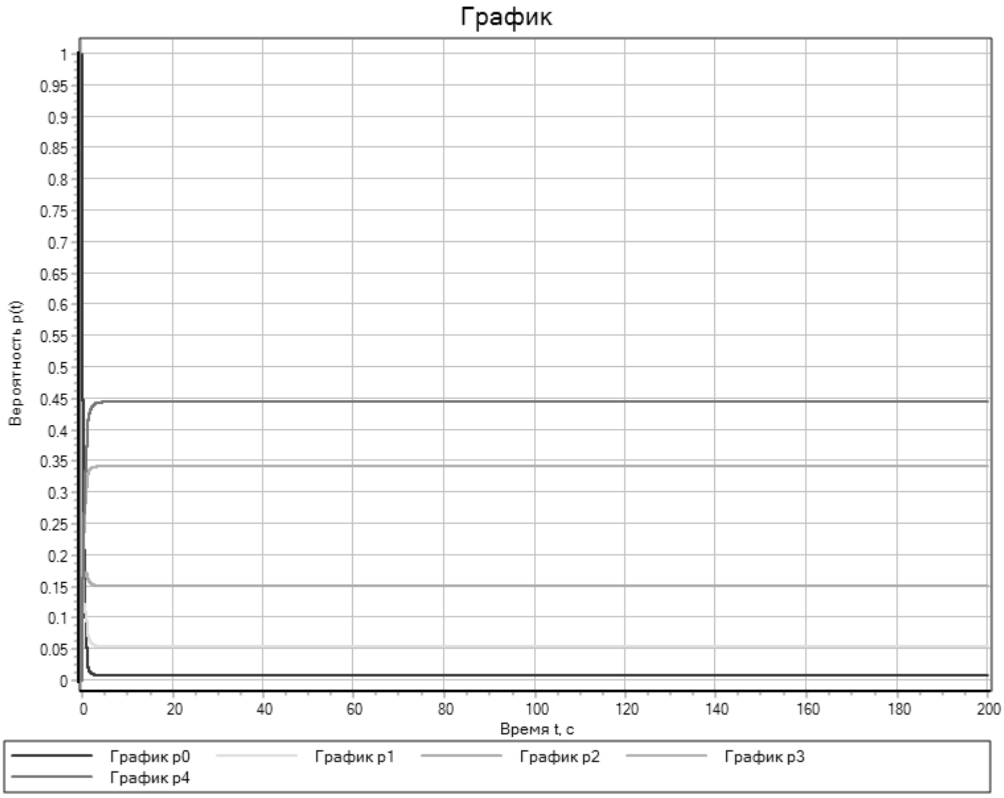

Рис. 3.2. Поведение системы

В общем виде система будет иметь вид (3.12) [5].

$$
\begin{cases}
\dfrac{dp_0(t)}{dt} = \left(-\lambda \sum\limits_{i=1}^{n+m} a_i\right) p_0(t) + \mu p_1(t) \\
\vdots \\
\dfrac{dp_r(t)}{dt} = -\left(\lambda \sum\limits_{i=1}^{n+m-r} a_i + r\mu\right) p_r(t) + \lambda \sum\limits_{k=0}^{r-1} a_{r-k} p_k(t) + (r+1)\mu p_{r+1}(t), 1 \le r \le n-1 \\
\vdots \\
\dfrac{dp_n(t)}{dt} = -\left(\lambda \sum\limits_{i=1}^{m} a_i + n\mu\right) p_n(t) + \lambda \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{n-k} p_k(t) + n\mu p_{n+1}(t) \\
\vdots \\
\dfrac{dp_{n+r}(t)}{dt} = -\left(\lambda \sum\limits_{i=1}^{m-r} a_i + n\mu\right) p_{n+r}(t) + \lambda \sum\limits_{k=0}^{n+r-1} a_{n+r-k} p_k(t) + n\mu p_{n+r+1}(t), 1 \le r \le m \\
\vdots \\
\dfrac{dp_{n+m}(t)}{dt} = -n\mu p_{n+m}(t) + \lambda \sum\limits_{k=0}^{n+m-1} a_{n+m-1} p_k(t)
\end{cases}
\qquad (3.12)
$$

Заключение

В рамках данной работы автором рассмотрен вывод системы массового обслуживания, основой которой является морской порт. Данная работа выполнена с целью показать, как можно с помощью несложных и всем известный уравнений, а также с помощью нескольких допущений и ограничений, описать большую систему, обрабатывающую большое количество заказов. Более того, в конце работы автором приведена система, которую можно использовать для описания других систем массового обслуживания с ограниченной очередью.

Список литературы

1. Плескунов М.А. Теория массового обслуживания: учебное пособие / М-во науки и высшего образования РФ, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2022. – 264 с.
2. Порт // Большая российская энциклопедия [Электронный ресурс]. – URL: https://bigenc.ru/c/port-8e2825 (дата обращения: 27.09.2023).
3. Теория 22. Экзамен по моделированию. 7 семестр, ИТ МИРЭА вики [Электронный ресурс] // Fandom – URL: https://itmodeling.fandom.com/ru/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_22 (дата обращения: 27.09.2023).
4. Лекция 28. Поток случайных событий [Электронный ресурс]. – URL: http://stratum.ac.ru/education/textbooks/modelir/lection28.html (дата обращения: 27.09.2023).
5. Dragović B. et al. Mathematical models of multiserver queuing system for dynamic performance evaluation in port // Mathematical Problems in Engineering. – Hindawi, 2012. – Vol. 2012. – Paper e710834.