

D.E. Ishimov<sup>1</sup>, N.N. Demidov<sup>1</sup>, Li Xianshun<sup>3</sup>, E.B. Sedakova<sup>1,2</sup>

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,  
Saint Petersburg, Russia, daniil\_ishimov@mail.ru

<sup>2</sup>Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian academy of  
sciences, Saint-Petersburg, Russia

<sup>3</sup>Jiangsu Pedagogical University, Xuzhou, 101 Shanghai Road, China

## JUSTIFICATION OF THE USE OF A MULTI-STAGE TRANSMISSION IN A MODERN ELECTRIC VEHICLE

### Abstract

The paper considers the main transmission schemes of modern electric vehicles used by large automakers. In the mass production of electric vehicles, there is a need to increase the efficiency of the entire vehicle as a whole. As a result of the work done, recommendations have been developed regarding the main parameters of the electric vehicle transmission, which will improve the efficiency and traction characteristics of an electric vehicle.

*Keywords:* electric vehicle, efficiency, transmission parameters, traction characteristics.

УДК 538.95

doi:10.18720/SPBPU/2/id24-260

Н.Н. Горобей, А.С. Лукьяненко

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Санкт-Петербург, Россия, n.gorobey@mail.ru

## РОЛЬ АНГАРМОНИЗМА В НАНОДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ МЕХАНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

### Аннотация

Анализ термоупругого эффекта Джоуля-Томсона указывает на необходимость разделения полной энергии изолированного тела на две составляющие – квазистатическую энергию упругой деформации, которая включает в себя термическое расширение, и энергию колебаний атомов. В качестве инструмента анализа предложена динамическая статистическая сумма, которая позволяет вычислять средние значения наблюдаемых за большой промежуток времени, в том числе, при наличии внешних сил, зависящих от времени. На основании того, что, в соответствии с эргодической гипотезой, пределом динамического статистического распределения для изолированного тела служит микроканоническое распределение, а для его подсистем – каноническое распределение Гиббса, предложено определение температуры изолированного тела. Баланс энергии в термоупругом эффекте находится в полном соответствии с первым началом термодинамики для изолированного тела.

*Ключевые слова:* ангармонизм, стохастичность, деформация, энергия, температура.

## Введение

Термоупругий эффект был обнаружен и обсуждался в классических работах Джоуля и Томсона [1,2]. Имея давнюю историю, он и в настоящее время привлекает внимание [3,4,5,6,7,8]. Эффект заключается в малом изменении температуры адиабатически изолированного тела при его одноосном механическом деформировании и описывается эмпирической формулой

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\alpha}{c\rho}\sigma, \quad (1)$$

где  $\alpha$  - линейный коэффициент термического расширения,  $c$  - удельная теплоемкость,  $\rho$  - плотность тела,  $\sigma$  - механическое напряжение. Прежде всего, обращает на себя внимание, что при растяжении ( $\sigma > 0$ ) для большинства тел абсолютная температура уменьшается ( $\Delta T < 0$ ). Также отметим, что сам эффект, очевидно, является проявлением нелинейности сил межатомного взаимодействия (ангармонизма), о чем свидетельствует наличие коэффициента термического расширения в (1) (см.[9]).

В работе [10] для простейшей модели ангармонического твердого тела - ангармонического осциллятора предложено динамическое объяснение термоупругого эффекта, которое основано на существовании адиабатического инварианта в динамике осциллятора [11]

$$I = \frac{E}{\omega} \quad (2)$$

при его медленном деформировании. Изменение частоты колебаний в данном случае является следствием ангармонизма [10]:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx -\frac{g}{f^2}F \quad (3)$$

Здесь  $f$  и  $g$  - упругая и ангармоническая постоянные потенциала осциллятора,  $F$  - внешняя сила. Видно, что эмпирическая формула (1) может быть объяснена соотношением (3), если принять естественное предположение, что температура  $T$  пропорциональна энергии колебаний  $E$ . Таким образом, при растяжении ( $F > 0$ ) энергия колебаний (температура) уменьшается. При этом средняя потенциальная энергия (и полная энергия) осциллятора растет при любом знаке внешней силы  $F$ . Это обеспечивает выполнение закона сохранения энергии при кажущемся его нарушении в случае растяжения. На основании этого мы приходим к выводу, что температура тела связана лишь с той частью полной энергии, которую можно назвать энергией колебаний  $W_{csc}$ . Вторая часть полной энергии - это энергия упругой деформации тела  $U_0$ , которая, как следствие ангармонизма, не равна нулю даже в отсутствие внешних сил (тепловое давление [12]). В данной работе мы предложим общее определение этих составляющих энергии ангармонического твердого тела, а также его температуры. Поскольку термоупругий эффект имеет динамическую природу [10], основным инструментом анализа будет служить динамическая статистическая сумма.

## Результаты и обсуждение

### *Динамическая статистическая сумма*

Для простоты ограничим рассмотрение одномерной моделью твердого тела - атомной цепочкой с функцией Гамильтона

$$H(p, x) = \sum_{n=1}^N \frac{p_n^2}{2m_n} + U(x) - \sum_{n=1}^N F_n x_n, \quad (4)$$

$$U(x) = \frac{1}{2} \sum_{l,n=1}^N f_{nl} x_n x_l - \frac{1}{3} \sum_{knl} g_{knl} x_k x_n x_l, \quad (5)$$

где  $f_{nl}, g_{knl}$  - симметричные матрицы силовых постоянных,  $F_n$  - сила, действующая на  $n$ -й атом (компонента силового поля). Мы для простоты ограничиваемся кубическим ангармонизмом. Как учитывать более высокие порядки разложения потенциальной энергии будет сказано ниже. Матрицы  $f_{nl}, g_{knl}$  таковы, что  $U(x)$  зависит только от разностей координат, так что потенциальная энергия инвариантна относительно сдвига вдоль оси  $0x$ . Результирующую силу, действующую на цепочку, считаем равной нулю, а ее центр масс покоящимся. В нашем чисто динамическом рассмотрении допускается зависимость сил от времени, но на ограниченном интервале или с ограниченным периодом. В этом случае возможно определение среднего любой физической величины  $A(t)$  за большой промежуток времени:

$$\langle A \rangle \equiv \frac{1}{t} \int_0^t A(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Нас будут интересовать, прежде всего, средние значения координат и импульсов атомов, для нахождения которых введем производящую функцию

$$Z(\alpha, \beta) = \frac{1}{t} \int_0^t \exp \left\{ \sum_{n=1}^N [\alpha_n x_n(\tau) + \beta_n p_n(\tau)] \right\} d\tau. \quad (7)$$

Координаты подчиняются уравнениям движения

$$m_n \ddot{x}_n + \sum_{l=1}^N f_{nl} x_l - \sum_{kl} g_{knl} x_k x_l - F_n \equiv X_n(\tau) = 0. \quad (8)$$

Учтем это явно в производящей функции (7) с помощью дополнительного функционального интегрирования функциональной  $\delta$ -функции:

$$Z(\alpha, \beta) = \frac{1}{t} \int_0^t d\tau \int \prod_{\tau'} d^N x(\tau') \delta(X(\tau')) \exp \left\{ \sum_{n=1}^N [\alpha_n x_n(\tau) + \beta_n p_n(\tau)] \right\}, \quad (9)$$

где  $p_n = m_n \dot{x}_n$ . Эта функция является искомой динамической статистической суммой цепочки. Мы можем продвинуться в функциональном интегрировании, воспользовавшись интегральным представлением функциональной  $\delta$ -функции:

$$\delta(X(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\tau'} \frac{1}{2\pi} d^N \lambda(\tau') \exp \left[ i \int_0^{\tau} \sum_{n=1}^N \lambda_n(\tau') X_n(\tau') d\tau' \right]. \quad (10)$$

Интегрируя по частям в показателе экспоненты в (10), получим:

$$\begin{aligned} I_n \equiv \int_0^{\tau} \lambda_n(\tau') X_n(\tau') d\tau' &= m_n \lambda_n \dot{x}_n \Big|_0^{\tau} - m_n \dot{\lambda}_n x_n \Big|_0^{\tau} + \\ &+ \int_0^{\tau} d\tau' \left( \ddot{\lambda}_n x_n + \lambda_n \sum_{l=1}^N f_{nl} x_l - \lambda_n \sum_{kl} g_{knl} x_k x_l - \lambda_n F_n \right) \end{aligned} \quad (11)$$

После этого преобразования мы сможем взять функциональный интеграл по  $x_n(\tau)$  в (9):

$$\begin{aligned} &\int \prod_{\tau'} d^N x(\tau') \delta(X(\tau')) = \\ &= \int \prod_{\tau'} d^N \lambda(\tau') \frac{1}{\sqrt{\det G}} \exp(\Delta) \exp \left\{ i \sum_{n=1}^N \left[ m_n (\dot{\lambda}_n(0) x_n(0) - \lambda_n(0) \dot{x}_n(0)) \right] \right\} \times \\ &\times \delta^N(\alpha - im\lambda(\tau)) \delta^N(\beta + i\lambda(\tau)), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\Delta = \frac{i}{4} \int_0^\tau d\tau' \sum_{nk}^N G_{nk}^{-1} \Lambda_n \Lambda_k - \sum_n^N F_n(\tau) \lambda_n(\tau), \quad (13)$$

$$G_{kn} \equiv \sum_l^N \lambda_l g_{lkn}, \quad (14)$$

$$\Lambda_n \equiv \ddot{\lambda}_n + \sum_{l=1}^N \lambda_l f_{nl}. \quad (15)$$

Мы опустили постоянные множители в выражении (12), которые несущественны для определения статистической суммы. Начальные условия  $x_n(0)$ ,  $\dot{x}_n(0)$  определяют начальную энергию  $W_0$  тела. Таким образом, установлена связь между динамическими переменными  $x_n(\tau)$ ,  $p_n(\tau)$  и их начальными значениями. Она содержится в  $\delta$ -функциях в (12) (функции  $\lambda(\tau)$ ,  $\text{mi}\lambda(\tau)$ ). Нетрудно видеть, что виковский поворот  $\lambda \rightarrow -i\lambda$  делает последний функциональный интеграл в (12) хорошо сходящимся и явно вещественным. Если рассматриваемая система является эргодической [13], статистическая сумма (9) не зависит от начальных условий на поверхности начальной энергии  $W_0 = \text{const}$ . Здесь мы также подошли в вычислении динамической статистической суммы к тому месту, когда ясно видна роль ангармонизма в вопросе эргодичности системы. Представление (12) динамической части статистической суммы (9) имеет смысл, если матрица (14), образованная из коэффициентов кубического ангармонизма  $g_{nlk}$ , имеет ненулевой детерминант. Если эта матрица вырождена, часть степеней свободы системы является гармонической и не удовлетворяет условиям теоремы Биргофа [14] для эргодических систем. Для учета высших порядков ангармонизма в этом представлении следует воспользоваться правилами теории возмущений, раскладывая экспоненту под знаком интеграла (10) в степенной ряд по константам высших порядков. Следующим шагом в вычислении динамической статистической суммы может быть использование метода стационарной фазы для оценки интеграла по  $\lambda$  в (12). Для определения понятия температуры здесь нам достаточно предположения, что ангармонизм обеспечивает эргодичность системы.

#### *Температура изолированного тела*

Поскольку мы связываем температуру тела с энергией колебаний атомов  $W_{osc}$ , дадим определение этой величины в общем случае. Для этого определим квазистатистическую потенциальную энергию упругой деформации тела  $U_0$ . Напомним, что в ангармонической системе эта деформация есть и в отсутствие внешних сил (термическое расширение [9]). Найдем сначала средние значения координат атомов за большой промежуток времени, пользуясь производящей функцией (9):

$$\langle x_n \rangle \equiv \left. \frac{\partial \ln Z(\alpha, \beta)}{\partial \alpha_n} \right|_{\alpha, \beta=0}. \quad (16)$$

Эти средние подставляем в потенциальную энергию тела и получаем:

$$U_o = U(\langle x_n \rangle). \quad (17)$$

Эта величина, очевидно, зависит от полной энергии тела и от внешних сил:  $U_0 = U_0(W, F)$ . На энергию колебаний приходится оставшаяся часть полной энергии:

$$W_{osc} = W - U_0(W, F) \quad (18)$$

которая также зависит от (начальной) полной энергии и внешнего силового поля:  $W_{osc} = W_{osc}(W_0, F)$ . В этой зависимости и заключается обоснование термоупругого эффекта. Остается найти связь температуры с энергией колебаний.

Температура изолированного тела изначально несет печать неопределенности, поскольку понятия «теплый» и «холодный» приобретают смысл лишь при контакте тел. Если пренебречь ангармонизмом, можно воспользоваться законом равномерного распределения энергии, согласно которому на одну колебательную степень свободы приходится «в среднем» энергия  $k_B T$ . Этот закон сформулирован и доказан с помощью распределения Гиббса для ансамбля гармонических осцилляторов, находящихся в контакте с термостатом. Такое определение температуры принято в работе [10], и оно оказалось вполне достаточно для объяснения термоупругого эффекта. Понятно, однако, что контакт тела с термостатом исключает какие-либо термомеханические эффекты, и надо искать альтернативное объяснение в термомеханике изолированного тела. Здесь, как мы видели, ангармонизм является существенным фактором, обеспечивающим эргодичность системы. Согласно эргодической гипотезе, динамическая статистическая сумма (9) при  $t \rightarrow \infty$  совпадает с микроканоническим распределением Гиббса (см. также [15]). В этом случае для любой малой подсистемы большого изолированного тела с большой точностью выполняется распределение Больцмана [16]

$$p(W') \propto \exp\left(-\frac{W'}{k_B T}\right), \quad (19)$$

где  $W'$  - (колебательная) энергия подсистемы. Иначе говоря, большое изолированное тело является термостатом с определенной температурой для составляющих его подсистем. Чтобы определить температуру всего тела, мы ориентируемся на формулу (19) для его частей. Считая микроканоническое распределение справедливым для колебательной энергии тела в отдельности,

$$\rho = \text{const} \cdot \delta(W_{osc} - \sum W'), \quad (20)$$

приходим к формуле [15]

$$\frac{1}{k_B T} = \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial W_{osc}} \right|_{\alpha, \beta=0} \quad (21)$$

Применение этой формулы в случае микроканонического распределения для ансамбля гармонических осцилляторов дает ожидаемый результат – закон равномерного распределения колебательной энергии:  $k_B T = W_{osc} / N$ .

### Заключение

В заключение подведем баланс энергии в термоупругом эффекте Джоуля-Томсона. Согласно первому Началу для изолированного тела, работа внешней силы целиком идет на приращение его (полной) внутренней энергии. Более точно, согласно нашему построению, увеличивается квазистатическая потенциальная энергия (энергия упругой деформации) тела  $U_0$ . При растяжении к ней добавляется (со знаком плюс) работа сил теплового давления, так что увеличение  $U_0$  чуть больше чисто механической работы. Баланс энергии восстанавливается как раз за счет термоупругого эффекта – уменьшения энергии колебаний  $W_{csc}$  и соответствующей ей температуры. Таким образом, работа сил теплового давления – динамический эффект, который восстанавливает баланс энергии в явлении параметрического уменьшения энергии колебаний ангармонического осциллятора, которое обсуждается в [10].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thomson, W (Lord Kelvin) Dynamical theory of heat/W.Thomson // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. - 1853. - V.20. - P.261-288.
2. Joule, J.P. On the thermal effects of longitudinal compression of solids and on the alternations of temperature accompanying changes of pressure in fluids / J.P.Joule, W.Thomson //Proc. R. Soc. - 1857. - V.8. - P.564-569.
3. Stanley, P. Beginning and early development of thermoelastic stress analysis / P.Stanley // Strain. - 2008. - V.44. - №4. - P.285-297.
4. Morozov, E. Thermoelastic properties and elastocaloric effect in rapidly quenched ribbons of Ti<sub>2</sub>NiCu alloy in the amorphous and crystalline state / E.Morozov, D. Kuznetsov, V.Kalashnikov, V.Koledov, V.Shavrov // Crystals. - 2021. - V.11. - №8. - P.949-961.
5. Kume, E. Unexpected thermo-elastic effect in liquid glycerol by mechanical deformation / E.Kume, A.Zaccane, L.Noirez // Physics of fluids. - 2021. - V.33. - №8. 072007.
6. Гиляров, В.Л. Описание термоупругого эффекта в твердых телах в широкой области температур / ВЛ. Гиляров, А.И. Слуцкер// Физика твердого тела. - 2014. - Т. 56. - №12. - С.2407-2409.
7. Глазов, А.Л. Динамический термоупругий эффект в материалах с дефектной структурой / А.Л. Глазов, К.Л. Муратиков // Физика твердого тела. - 2021. - Т. 63. - №5. - С.588-591.
8. Горобей, Н.Н. Термомеханика деформаций в ангармоническом твердом теле / Н.Н.Горобей, А.С.Лукьяненко// Физика твердого тела. - 2019. - Т. 61. - №4. - С.765-768.
9. Kittel С. Introduction to Solid State Physics // С.Kittel. - Wiley: 8th Edition, 2004. - 704 p.
10. Slutsker, A.I. Microscopics of the thermoelastic effect / A.I. Slutsker, V.P. Volodin // ThermochinicaActa. - 1994. -247. - № 1. - P.111-119.
11. Landau, L.D. Mechanics //L.D. Landau, E.M. Lifshitz, - Ed by Butterworth-Heinemann 3<sup>rd</sup> edition, 2000. 170 p.
12. Регель В.Р. Кинетическая природа прочности твердых тел // В.Р. Регель, А.И. Слуцкер, Э.Е. Томашевский. - Москва: Наука, 1974. 560 с.
13. Арнольд, В.И. Эргодические проблемы классической механики // В.И. Арнольд, А.Авец. – Москва-Ижевск: РХД, 1999.
14. Birkhoff, G.D. Proof of the ergodic theorem / G.D.Birkhoff//Proc. Natl. Acad. Sci. USA- 1931. - V. 17. - № 12. -P. 656-660.
- 15.Горобей, Н.Н. Термомеханика и статистическая механика адиабатически изолированного тела / Н.Н.Горобей, А.С.Лукьяненко, А.В.Гольцев// Физика твердого тела. - 2022. - Т. 64. - №11. - С.1808-1811.
16. Landau, L.D. Statistical Physics //L.D. Landau, E.M. Lifshitz, - Ed by Butterworth-Heinemann 3<sup>rd</sup> edition, 2013. 544p.

N.Gorobey, A. Lukyanenko  
Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University,  
Saint Petersburg, Russia, n.gorobey@mail.ru

## THE ROLE OF ANHARMONICITY IN THE NANODYNAMICS OF A SOLID UNDER MECHANICAL ACTION

### Abstract

Analysis of the thermoelastic Joule-Thomson effect indicates the need to separate the total energy of an isolated body into two components - the quasi-static energy of elastic deformation, which includes thermal expansion, and the energy of atomic vibrations. A dynamic statistical sum is proposed as an analysis tool, which allows one to calculate the

average values of observed values over a long period of time, including in the presence of external time-dependent forces. Based on the fact that, in accordance with the ergodic hypothesis, the limit of the dynamic statistical distribution for an isolated body is the microcanonical distribution, and for its subsystems the canonical Gibbs distribution, a definition of the temperature of an isolated body is proposed. The energy balance in the thermoelastic effect is in full accordance with the first law of thermodynamics for an isolated body.

*Keywords:* anharmonicity, stochasticity, deformation, energy, temperature.

УДК 530.145.86

doi:10.18720/SPBPU/2/id24-261

Д.Н. Любимов<sup>1</sup>, С.В. Кирильчик<sup>1</sup>, Ю.Б. Щемелева<sup>1</sup>, М.С. Яшин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Южный Федеральный Университет,

Россия, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42, kirilchik@mail.ru

<sup>2</sup>Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов» Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»,  
Россия, Москва, улица Радио, 17

## **ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ КВАНТОВЫХ МЕХАНИЗМОВ ЭВОЛЮЦИИ ТРИБОСИСТЕМ**

### **Аннотация**

Целью работы является обоснование фундаментальной основы процессов трибомутаций на основе квантового механизма образования классической формы трибосистемы. Для этого была разработана теоретическая модель, основанная на гипотезе П.Эткинса, исследование которой показало, что аппарат квантовой механики способен физически корректно описывать появление вещественного, классического объекта из квантового состояния. В соответствии с полученными уравнениями делается допущение, что при замене квантовой информации на классическую, сохраняются эффекты квантовой природы, несмотря на «действие» постулата редукции волновой функции. При этом постдекогерентная физическая система приближается к квантовым объектам.

*Ключевые слова:* волновая функция, матрица плотности, квантовая запутанность, трибосистема, декогеренция

### **Введение**

Современная наука полностью (как теоретически, так и экспериментально) обосновала предположение о пригодности для описания движения и эволюции физических макросистем аппарата квантовой механики [1]. Последнее в полной мере справедливо и для таких фундаментальных квантовомеханических эффектов как декогеренция, запутанность, редукция и прочее.

Макротела можно рассматривать как сложносоставные системы, состоящие из отдельных подсистем. Запутанные состояния в подобных физических объектах возникают при взаимодействии подсистем между собой. При этом факт образования между отдельными частями квантовокорреляционных связей квантовой запутанности играет важную роль в формировании «целостности» составной