УДК 519.81
doi:10.18720/SPBPU/2/id24-35

Пипия Георгий Тенгизович [1],
инженер-исследователь;
Черненькая Людмила Васильевна [2],
профессор, д-р техн. наук, профессор

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТИ ПАРЕТО В ЗАДАЧАХ ДВУХУРОВНЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

[1, 2] Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, [1] gogpipiy@ya.ru, [2] ludmila@qmd.spbstu.ru

Аннотация. В настоящее время нахождение области Парето играет важную роль при поиске рациональных решений в различных областях человеческой деятельности, так как визуализирует недоминируемые решения. Методы построения областей Парето для задач многокритериальной оптимизации хорошо изучены и существует множество способов и рекомендаций по построению таких областей, что нельзя сказать про задачи двухуровневой или многоуровневой оптимизации. В данной работе авторами приводятся особенности построения областей Парето при решении задачи двухуровневой оптимизации, что позволит при дальнейшем исследовании данного вопроса разработать действенные методы и алгоритмы для наглядной визуализации области эффективности решении задач как двухуровневой, так и многоуровневой оптимизации.

Ключевые слова: целевые функции, область Парето, многокритериальная оптимизация, поиск области эффективности, двухуровневая оптимизация, модель, оценка сходимости.

Georgii T. Pipia [1],
Engineer-researcher;
Liudmila V. Chernenkaya [2],
Professor, Doctor of Technical Sciences

FEATURES OF CONSTRUCTING PARETO REGION IN BILEVEL OPTIMIZATION PROBLEMS

[1, 2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia, [1] gogpipiy@ya.ru, [2] ludmila@qmd.spbstu.ru

Abstract. Currently, finding the Pareto region plays an important role in the search for rational solutions in various areas of human activity, as it visualizes non-domain solutions. Methods for constructing Pareto areas for multi-criteria optimization problems have been well studied, and there are many methods and recommendations for constructing such areas, which cannot be said about bilevel or multi-level optimization problems. In this work, the authors present the features of constructing Pareto areas when solving a two-level optimization problem, which will allow further research of this issue to develop effective methods and algorithms for visualizing the area of efficiency in solving both two-level and multi-level optimization problems.

Keywords: objective functions, Pareto region, multi-criteria optimization, search for efficiency region, bilevel optimization, model, convergence assessment.

Введение

В настоящее время системы поддержки принятия решений (СППР) играют ключевую роль при осуществлении управления в любой сфере деятельности. При этом СППР не потеряли своей актуальности по мере возникновения и развития таких направлений, как аналитика данных или наука о данных, что подчеркивает необходимость развития данных систем. Хорошо известно, что основной целью СППР является генерация перечня рациональных решений или одного решения для помощи в принятии решения.

Как правило все процессы принятия решений носят многокритериальный характер, при этом функция полезности описывается двумя и более критериями, что затрудняет процесс принятия решений. При наличии нескольких критериев сложно найти наиболее приемлемые соотношения критериев с точки зрения лица принимающего решение (ЛПР). Одним из вариантов решения данной проблемы является применение набора критериев, например, критерия Гурвица, критерия Вальда, критерия Байеса, критерия Сэвиджа или применение усредненного критерия. Одной из особенностей перечисленных критериев является то, что они находятся на области Парето (область компромисса) и при желании ЛПР может построить визуализацию данной области по ряду существующих способов, например, стратегии главного критерия или стратегии компромисса.

Сложность визуализации области Парето накладывается при наличии иерархической взаимосвязи между целевыми функциями, например, если одна из переменных первой целевой функции параметрически зависит от одной из переменных второй целевой функции. Подобные иерархические взаимосвязи хорошо описываются через теорию двухуровневой оптимизации (в общем случае многоуровневой оптимизации).

В теории двухуровневой оптимизации принято выделять функцию лидера $F(x, y)$ и функцию последователя $f(x, y)$, при этом функция последователя зависит от одной из переменных функции лидера. С подробным описанием модели двухуровневой оптимизации можно ознакомиться в работе [1].

В настоящей модели будут выделены основные различия визуализации области Парето для двухкритериальной и многокритериальной оптимизации для решения следующих задач:

1. Выделение особенностей визуализации области Парето для двухуровневой оптимизации.

2. Предложение подходов к визуализации области Парето для двухуровневой оптимизации.

3. Разработка критериев проверки сходимости и достоверности решения задачи двухуровневой оптимизации на области Парето.

Решение приведенных задач поможет развитию методов визуальной интерпретаций двухуровневых задач различной сложности для поддержки принятия решений.

1. Сравнение задач двухкритериальной линейной оптимизации и двухуровневой линейной оптимизации

Сформулируем задачи двухкритериальной и двухуровневой оптимизации.

Двухкритериальная задача линейной оптимизации имеет вид:

$$\max\{ fx = z \mid x \in X \},$$

где f — матрица размера $m \times n$, строки которой являются целевыми функциями $f_i, i = \overline{1,m}$ (индексы обозначают номер целевого критерия, m — количество целевых функции, в нашем случае $m = 2$),

$z = z_1, z_2 ..., z_n$ — вектор значений целевых функций (индексы обозначают номер целевой функции, n — количество значений целевых функций), а Y — множество допустимых значений целевых функций.

В приведенной формулировке задачи многокритериальной оптимизации точки *x*, входящие в область *X*, должны быть Парето-эффективными или эффективными по Парето (ОПЭ) точками и соответствовать определению.

Определение [2]. Точка $x' \in X$ называется оптимальной по Парето, если для любой точки $x \in X$ выполнено соотношение $f(x') \geq f(x)$.

Классическая математическая задача оптимизации при наличии двух векторов $x = \{x_i\}$ и $y = \{y_i\}$, $i = \overline{1,n}$, где n — количество переменных в векторе, таких, что $x \in X \subset R^n, y \in Y \subset R^m$, $F : X \times Y \to R^1$ и $f : X \times Y \to R^1$, может быть поставлена следующим образом [3]:

$$\min_{x \in X} F(x, y) = c_1 x + d_1 y$$
$$A_1 x + B_1 y \leq b_1$$
$$\min_{y \in Y} f(x, y) = c_2 x + d_2 y \text{ ,}$$
$$A_2 x + B_2 y \leq b_2$$

где $c_1, c_2 \in R^n$, $d_1, d_2 \in R^m$, $b_1 \in R^p$, $b_2 \in R^q$, $A_1 \in R^{p \times n}$, $B_1 \in R^{p \times m}$, $A_2 \in R^{q \times n}$, $B_2 \in R^{q \times m}$, *p* — количество ограничений для лидера, а *q* — количество ограничений для последователя.

Условия оптимальности найденных решений задачи двухуровневой оптимизации приведены в работе [4].

2. Особенности двухуровневой оптимизации при визуализации области Парето

Стоит отметить, что при применении модели двухуровневой оптимизации классические методы визуализации области Парето, применяемые для многокритериальных моделей, не работают. На рисунке 1 представлено описание решения задачи, опубликованной в работе [5]: области Парето (картинка справа) и оптимальных значений последователя при фиксации значений лидера x от 1 до 4 в задаче двухуровневой оптимизации (картинка слева).

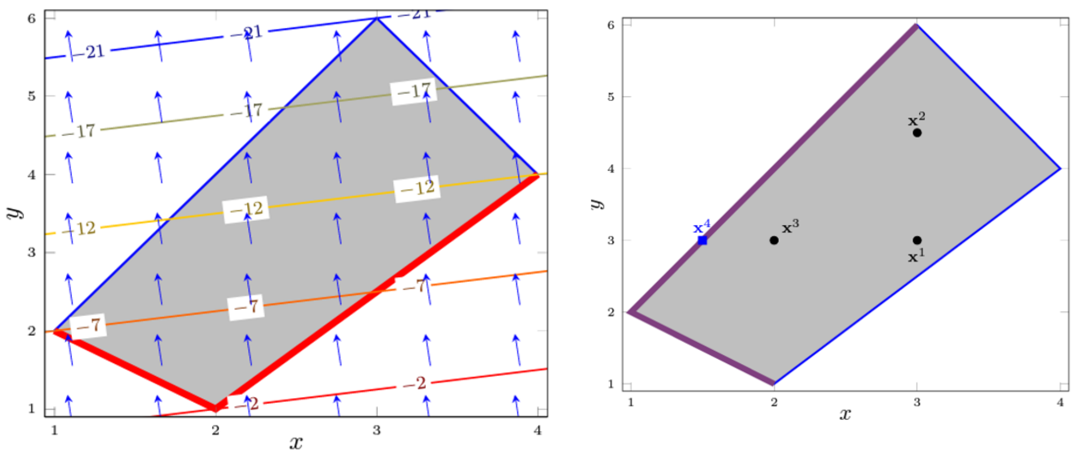

Рис. 1. Описание недоминируемых решений

Как можно видеть, область недоминируемых решений для последователя в задаче двухуровневой оптимизации отличаются от области Парето по следующим причинам:

1. В модели двухуровневой оптимизации целевые функции (лидер и последователь) располагаются последовательно в зависимости от иерархии и формы игры, а при применении многокритериальной оптимизации, основанной на оптимальности по Парето, происходит одновременный поиск недоминируемых решений.

2. Целевая функция для главного уровня в модели двухуровневой оптимизации выражена в неявном виде, в том смысле, что она зависит от действия последователя, при этом ставится условие максимизации или минимизации полученных решений для главного уровня в ущерб целевой функции последователя, в то время как для поиска области Парето мы должны по возможности максимизировать все целевые функции.

Одним из возможных путей решения поставленных задач является математическая модель перехода от двухуровневой линейной оптимизации к многокритериальной линейной оптимизации, которая впервые представлена Фюлопом [6] и обобщена в работе [7], в которой разработан основанный на многокритериальной линейной оптимизации алгоритм решения линейной двухуровневой задачи на основе методики поиска эффективных точек, предложенный в работе [6].

Список литературы

1. Pipiya G.T., Chernenkaya L.V. Optimization and decision-making strategies with respect to product quality in the presence of several objective functions // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2022. – 51(7). – С. 689–701.
2. Noghin V.D. Reducing the Pareto set based on set-point information // Scientific and Technical Information Processing. – 2011. – Vol. 38. – No 6. – Pp. 435–439.
3. Zhang G., Lu J., Gao Y. Multi-level decision-making. – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2015. – 377 p.
4. Dempe S. Foundations of bilevel programming. – Springer Science & Business Media, 2002.
5. Bard J.F. Practical bilevel optimization: algorithms and applications. – Springer Science & Business Media, 2013. – Vol. 30.
6. Fülöp J. On the equivalence between a linear bilevel programming problem and linear optimization over the efficient set // Techn. Rep. WP. – 1993. – P. 93.
7. Glackin J., Ecker J.G., Kupferschmid M. Solving bilevel linear programs using multiple objective linear programming // Journal of optimization theory and applications. – 2009. – Vol. 140. – Pp. 197–212.

УДК 681.3(007)
doi:10.18720/SPBPU/2/id24-36

Речинский Александр Витальевич [1],
проректор по экономике и финансам, канд. техн. наук;
Черненькая Людмила Васильевна [2],
профессор, д-р техн. наук, профессор;
Черненький Андрей Владимирович [3],
канд. экон. наук, доцент

СТАНОВЛЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

[1, 2, 3] Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого;
[1, 2] ludmila@qmd.spbstu.ru, [3] andrey@qmd.spbstu.ru

Аннотация. Имитационное моделирование применяется как системообразующее и наиболее ответственное звено процесса принятия решения, поэтому используется совместно с другим программным обеспечением для принятия решений в информационных системах различного назначения. В статье введены базовые понятия и рассмотрены математические основы имитационного моделирования. Описаны этапы развития, основы построения, направления развития и особенности реализации имитационного моделирования.

Ключевые слова: имитационное моделирование, принятие решений, метод Монте-Карло, дискретно-событийное моделирование, системная динамика, агентное моделирование.