

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
ВСПЛЫТИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА БЕЗ СИЛОВОЙ УСТАНОВКИ  
В НЕСЖИМАЕМОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВЯЗКОЙ  
ЖИДКОСТИ**

Россия, Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский политехнический  
университет Петра Великого, lida.kuznetsova@gmail.com

*Аннотация.* В работе анализируются три различные математические модели всплытия твердого тела без силовой установки в несжимаемой стратифицированной вязкой жидкости. Предполагается, что тело не имеет собственных движителей, но оснащено управляемыми рулями — крыльями конечного размаха. Оно всплывает под действием силы Архимеда и подъемной силы крыльев. Движение тела полагается плоско-параллельным. В работе представлены результаты проведенного численного эксперимента для сравнения математических моделей при решении прикладной задачи.

*Ключевые слова:* математическая модель, движение твердых тел в жидкости, управление движением, сила Архимеда, достижение заданной точки, крыло конечного размаха, подъемная сила крыла.

*Lidiia V. Kuznetsova,*  
Senior Lecturer

**COMPARATIVE ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELS  
OF A SOLID BODY WITHOUT ITS OWN PROPULSION SYSTEM  
SURFACING IN INCOMPRESSIBLE STRATIFIED VISCOUS FLUID**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia,  
lida.kuznetsova@gmail.com

*Abstract.* In this paper three different mathematical models surfacing of a solid body without its own propulsion system in incompressible stratified viscous fluid are analyzed. It is assumed that the body does not have its own propulsion system, but is equipped with controlled rudders — wings of finite span. It is moved by the influence of the buoyancy force and wings lift effect. This body motion is considered to be plane-parallel motion. The paper presents the results of a numerical experiment comparing mathematical models in solving an applied problem.

*Keywords:* mathematical model, motion of solids in a fluid, motion control, buoyancy force, ensuring access to the given point, wings of finite span, wings lift.

**Введение**

При осуществлении измерений и наблюдений их эффективность сильно зависит от минимизации влияния специальных исследовательских аппаратов на окружающую среду. Поэтому исключение или сниже-

ние подобного влияния является важной прикладной задачей. В данной работе рассматривается движение подводного исследовательского аппарата на основе естественных гидродинамических сил (например, силы Архимеда или эффекта подъемной силы крыла, которым можно оснастить рассматриваемый объект). Основную терминологию и классические результаты, касающиеся движения тел в сплошной среде, можно найти, например, в [1, 2].

### 1. Описание предметной области

В качестве подводного аппарата без силовой установки предлагается рассматривать однородное шарообразное тело, оборудованное двумя одинаковыми крыльями конечного размаха, симметрично расположенными относительно центра шара (см. рис. 1). На практике, расположение твердого тела и крыльев могут быть иными, однако рассмотренная модель может быть взята за основу для всех таких вариантов.

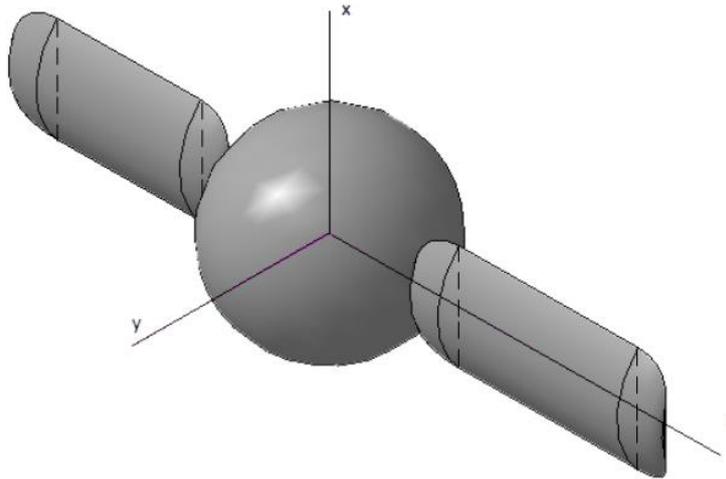


Рис. 1. Схематическое изображение подводного аппарата

Предполагается, что движение аппарата происходит в неограниченном водоеме конечной глубины, заполненном идеальной несжимаемой стратифицированной жидкостью с эффектом вязкости. Вязкость учитывается в смысле наличия силы сопротивления Стокса. Предполагается, что каждый слой имеет свою плотность, которая считается известной. Кроме того, предположим, что жидкость в каждом слое водоема может двигаться прямолинейно и равномерно вдоль горизонтальной оси, перпендикулярной размаху крыльев, с известной скоростью. Рассматривается случай плоско-параллельного движения подводного аппарата, который в начальный момент времени находится в неподвижном состоянии на заданной глубине (см. рис. 2). Для построения решения подобной задачи в стратифицированной жидкости достаточно определить алгоритм

получения решения в одном (придонном) слое, с последующим распространением полученного алгоритма на многослойные среды.

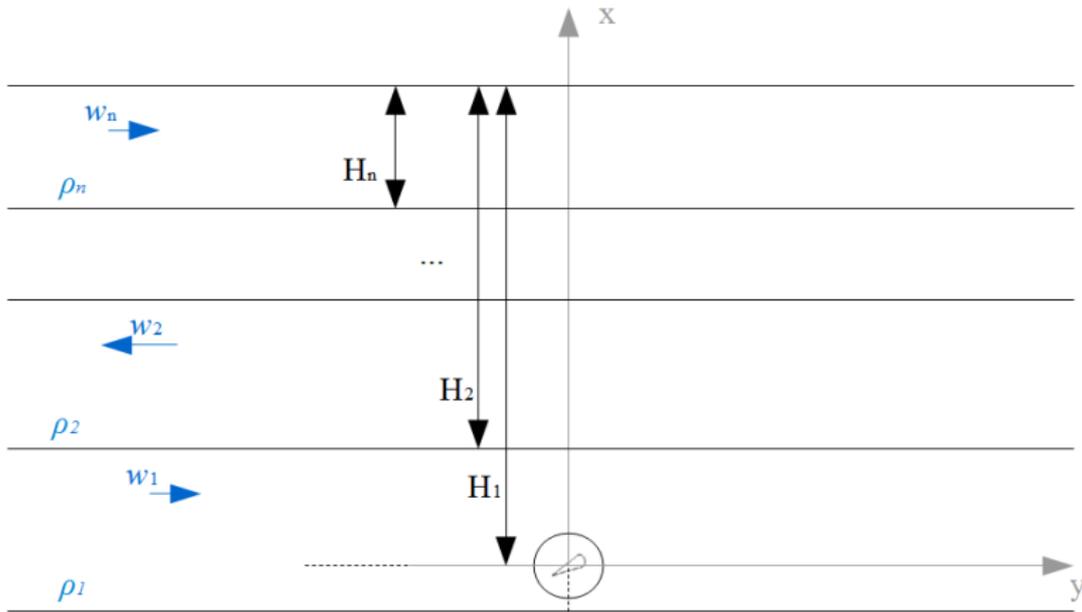


Рис. 2. Схема стратифицированной сплошной среды

Данная работа посвящена сравнению разных математических моделей движения твердого тела в несжимаемой стратифицированной вязкой жидкости.

## 2. Математическая модель

В предыдущих работах [3] была построена математическая модель плоско-параллельного движения подводного аппарата, допускающая управление аппаратом через изменение угла атаки крыльев  $\alpha$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(m + \frac{2}{3} \rho \pi R^3\right) \frac{d^2 x}{dt^2} = \\ = F_{arch} - 2F_i \cos \delta - \left(F_{drag}^{(1)} + 2F_{drag}^{(2)}\right) \cos \delta - 2F_{lift} \sin \delta - F_g; \\ \left(m + \frac{2}{3} \rho \pi R^3\right) \frac{d^2 y}{dt^2} = \\ = -2F_i \sin \delta - \left(F_{drag}^{(1)} + 2F_{drag}^{(2)}\right) \sin \delta - 2F_{lift} \cos \delta. \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $F_{arch}$  — выталкивающая сила,  $F_{drag}^{(j)} = C_x^{(j)} S^{(j)} \frac{\rho v^2}{2}$  сила лобового сопротивления шара ( $j=1$ ) и крыльев ( $j=2$ ),  $F_{lift} = \rho v^2 S \frac{k\alpha}{1+\mu_0}$  — подъемная сила крыла,  $F_i = \frac{\rho}{2} v^2 S \frac{\mu_0}{2k} \left(\frac{2k\alpha}{1+\mu_0}\right)^2$  — сила индуктивного сопротивления (подробности см. в [3]).

В [4, 5] была построена упрощенная математическая модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} + \frac{1}{k_2} \ln \left( \frac{\exp\{2\sqrt{k_1 k_2 t}\} + 1}{2} \right), \\ \dot{x} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \cdot \frac{\exp\{2\sqrt{k_1 k_2 t}\} - 1}{\exp\{2\sqrt{k_1 k_2 t}\} + 1}, \\ \dot{y} = \frac{2 \exp\{\sqrt{k_1 k_2 t}\}}{1 + \exp\{2\sqrt{k_1 k_2 t}\}} \cdot \frac{k_1 k_3}{k_2} \int_0^t \left( \frac{\exp\{2\sqrt{k_1 k_2 t}\} - 1}{\exp\{2\sqrt{k_1 k_2 t}\} + 1} \right)^2 \cosh \sqrt{k_1 k_2 t} dt \end{array} \right. \quad (2)$$

где коэффициенты определяются:  $k_1 = \frac{b_1}{b_0}$ ,  $k_2 = \frac{(b_2 \cdot \alpha^2 + b_3 + 2b_4)}{b_0}$ ,  $k_3 = \frac{2b_5 \cdot \alpha}{b_0}$ ,  
 $b_0 = m + \frac{2}{3} \rho \pi R^3$ ,  $b_1 = \rho g V - mg$ ,  $b_2 = \rho S_{kp} \frac{2k\mu_0}{(1+\mu_0)^2}$ ,  $b_3 = c_{0\_sph} \frac{\rho \pi R^2}{2}$ ,  
 $b_4 = c_{0\_w} \frac{\rho S_w}{2}$ ,  $b_5 = \rho S_{kp} \frac{k}{1+\mu_0}$ .

В [6] была построена математическая модель, основанная на гидродинамических уравнениях.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial t} = -2F_i \cos \delta - (F_{drag}^{(1)} + 2F_{drag}^{(2)}) \cos \delta + \\ \quad + F_{arch} - F_g - 2F_{lift} \sin \delta \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial t} = -2F_i \sin \delta - (F_{drag}^{(1)} + 2F_{drag}^{(2)}) \sin \delta - \\ \quad - 2F_{lift} \cos \delta \end{array} \right. \quad (3)$$

где  $F_{arch}$  — выталкивающая сила,  $F_{drag}^{(j)} = C_x^{(j)} S^{(j)} \frac{\rho v^2}{2}$  сила лобового сопротивления шара (j=1) и крыльев (j=2),  $F_{lift} = \rho v^2 S \frac{k\alpha}{1+\mu_0}$  — подъемная сила крыла,  $F_i = \frac{\rho}{2} v^2 S \frac{\mu_0}{2k} \left( \frac{2k\alpha}{1+\mu_0} \right)^2$  — сила индуктивного сопротивления.

Для решения полученной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (3) строится соответствующая ей разностная схема (использована явная схема первого порядка точности):

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_x)_{m,k}^n = (v_x)_{m,k}^{n-1} + \Delta t * \left( \frac{(v_x)_{m+1,k}^{n-1} - (v_x)_{m,k}^{n-1}}{\Delta x} (v_x)_{m,k}^{n-1} + \right. \\ \left. + b_1 - (b_2 \cdot \alpha^2 + b_3 + 2b_4)((v_x)_{m,k}^{n-1})^2 - 2b_5 \alpha (v_x)_{m,k}^{n-1} (v_y)_{m,k}^{n-1} \right) \\ (v_y)_{m,k}^n = (v_y)_{m,k}^{n-1} + \Delta t * \left( \frac{(v_y)_{m,k+1}^{n-1} - (v_y)_{m,k}^{n-1}}{\Delta y} (v_y)_{m,k}^{n-1} - \right. \\ \left. - (b_2 \cdot \alpha^2 + b_3 + 2b_4)(v_x)_{m,k}^{n-1} (v_y)_{m,k}^{n-1} - 2b_5 \alpha ((v_x)_{m,k}^{n-1})^2 \right) \end{array} \right. \quad (4)$$

где коэффициенты определяются как:

$$b_1 = \frac{\rho g V - mg}{m}, \quad b_2 = \rho S_{кр} \frac{2k\mu_0}{(1+\mu_0)^2} \cdot \frac{1}{m}, \quad b_3 = c_{0\_sph} \frac{\rho \pi R^2}{2} \cdot \frac{1}{m},$$

$$b_4 = c_{0\_w} \frac{\rho S_w}{2} \cdot \frac{1}{m}, \quad b_5 = \rho S_{кр} \frac{k}{1+\mu_0} \cdot \frac{1}{m}.$$

Значения координат  $x(t)$  и  $y(t)$  рассчитываются для каждого шага, исходя из выражений:  $\dot{x} = v_x$ ,  $\dot{y} = v_y$ .

### 3. Численный эксперимент

Для построения численных решений используется программный продукт MATLAB. Рассматривается движение подводного аппарата в двуслойной несжимаемой жидкости с эффектом вязкости со сдвиговым разнонаправленными течениями вдоль горизонтальной оси ( $\overline{w_1} \uparrow \downarrow \overline{w_2}$ ).

Рассмотрены три различных постоянных значения угла атаки:  $\alpha = 0.3$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = -0.3$ .

Соответствующие заданным углам атаки траектории движения подводного аппарата рассчитываются для каждой математической модели из п. 2 отдельно. При построении каждой траектории соответствующая система решается последовательно для каждого слоя, начиная с придонного. Для него начальные условия полагаются нулевыми, для всех последующих слоев они пересчитываются в зависимости от координаты центра масс подводного аппарата в момент перехода из слоя в слой.

На рисунке 3 представлены траектории движения подводного аппарата: красным цветом — для исходной математической модели (1), синим цветом — для упрощенной математической модели (2), пурпурным цветом — для модели, построенной на основе гидродинамических уравнений (3).

Анализируя траектории движения на рисунках 3, можно прийти к выводу, что характер траекторий движения подводного аппарата, построенных на основе математических моделей (1)–(3) не изменяется.

Расхождения между траекториями составляют десятые доли метра, что для поставленной задачи является достаточной точностью. Это говорит о возможности использования любой из рассматриваемых моделей. Полученные расхождения траекторий можно объяснить использованием достаточно грубых приближений при построении численных решений.

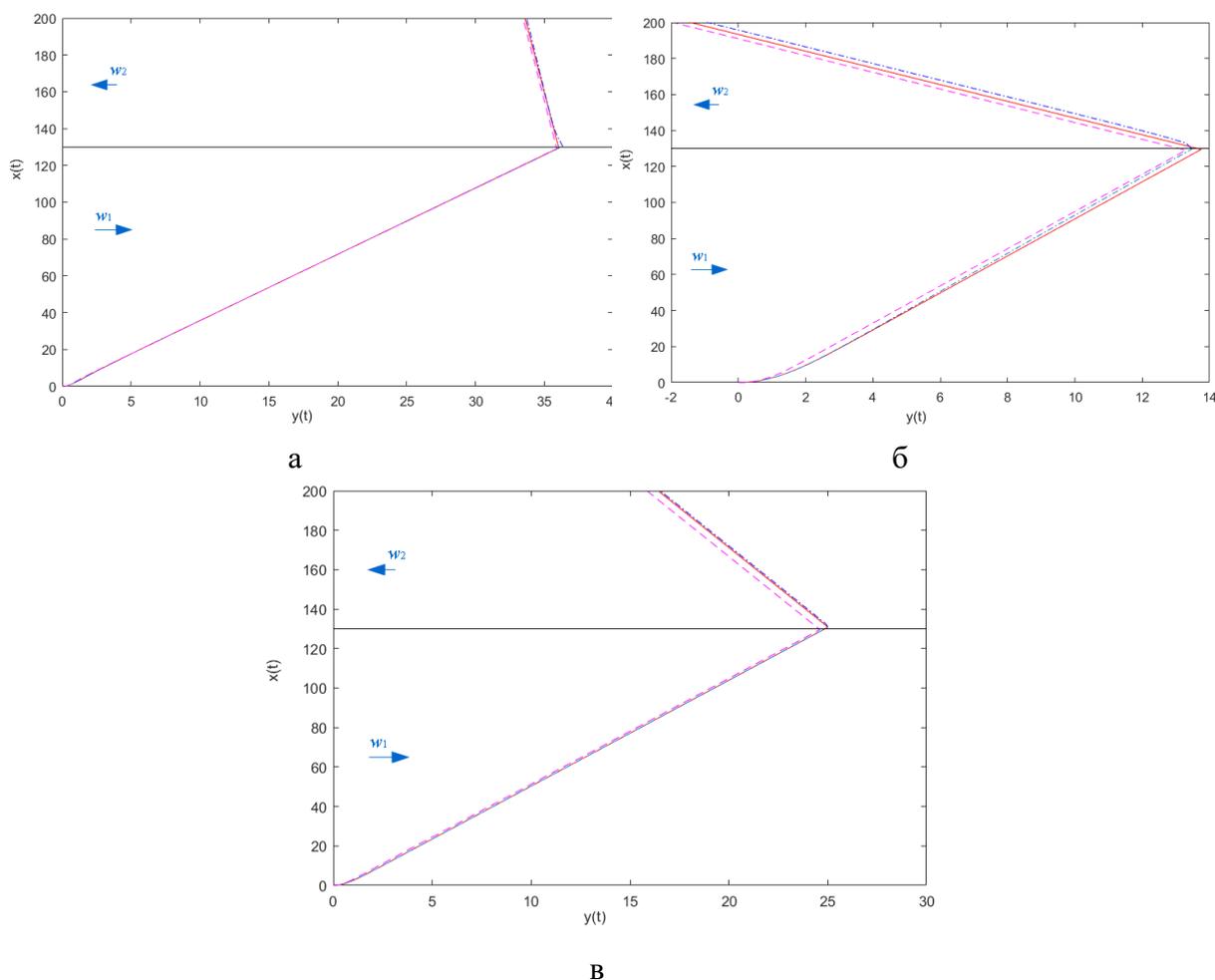


Рис. 3. Траектории движения подводного аппарата:

- а) для угла атаки в 0.3 рад;
- б) для угла атаки в -0.3 рад;
- в) для нулевого угла атаки.

В примере приняты следующие значения величин: диаметр всплывающего объекта (шара) равен 1 метру, его масса рассчитывается как  $m = 0.98\rho V$ , где  $\rho$  — усредненная плотность тела. Рассматриваем прямоугольные крылья с размахом 1 м, удлинением 5 и относительной максимальной толщиной 16 %. Пусть изначально аппарат находился на глубине  $H_1 = 200$  м. Глубину второго слоя  $H_2$  положим равной 70 м, плотно-

сти жидкости в слоях —  $\rho_1 = 1050 \text{ кг/м}^3$  и  $\rho_2 = 1025 \text{ кг/м}^3$ ; сдвиговые течения имеют скорости  $|\overline{w}_1| = 0.15 \text{ м/с}$  и  $|\overline{w}_2| = 0.1 \text{ м/с}$  соответственно.

### **Заключение**

В работе был проведен анализ возможности использования разных математических моделей при решении конкретной прикладной задачи всплытия твердого тела без силовой установки в несжимаемой стратифицированной вязкой жидкости. Установлено, что все предложенные автором модели в достаточной степени удовлетворяют решению поставленной задачи и поэтому могут быть использованы. Основными отличиями рассматриваемых моделей являются сложность их построения, сложность написания программного кода для решения прикладной задачи и время работы программы. Самой простой моделью при формировании и показывающей самый быстрый результат работы является упрощенная математическая модель (2). Наиболее трудоемкой для проведения расчетов оказалась модель на основе гидродинамических уравнений (из-за наличия в модели частных производных).

### **Список литературы**

1. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. – СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2005.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. – М.: Физматгиз, 1963. Тт. 1–2.
3. Firsov A.N., Kuznetcova L.V. The solution of the synthesis problem of partial motion control of a rigid body in incompressible viscous fluid // Machines, Technologies, Materials 2016. Borovetz, Bulgaria, 16-19.03.2016. – 2016. – Vol. 5/2016. – Pp. 21–22.
4. Кузнецова Л.В., Фирсов А.Н. Упрощенное аналитическое решение задачи автоматизированного управления движением автономного твердого тела без силовой установки в стратифицированной вязкой несжимаемой жидкости // Сборник научных трудов XXII Международной научно-практической конференции «Системный анализ в проектировании и управлении» (SAEC-2018). – СПб: Изд-во ФГАОУ ВО «СПбПУ», 2018. – С. 240–247.
5. Firsov A.N., Kuznetcova L.V. Simplified analytic solution of the problem of automated motion control of an autonomous rigid body without its own propulsion system in incompressible stratified viscous fluid // Industry 4.0. Varna, Bulgaria, 13-16.09.2017. – 2017. – Vol. 3/2017. – Pp. 108–110.
6. Firsov A.N., Kuznetcova L.V. A solid body surfacing mathematical model in stratified incompressible fluid under the action of buoyancy force and limited motion control // Industry 4.0. Varna, Bulgaria, 18-21.06.2018. – 2018. – Vol. 3/2018. – Pp. 109–111. (Print ISSN 2543-8582, Web ISSN 2534-997X).