УДК 004.82+510.2
doi:10.18720/SPBPU/2/id24-451

***Кулик Борис Александрович***,
вед. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЗАКОНОВ АЛГЕБРЫ МНОЖЕСТВ

Россия, Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН,
ba-kulik@yandex.ru

***Аннотация.*** В докладе предложено рассматривать алгебру множеств в соответствии с ее определением в книге Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» как независимую от теории множеств математическую систему, законы которой можно обосновать без аксиом. Показана основанная на законах алгебры множеств математическая модель, предназначенная для логического анализа систем. При решении некоторых задач в этой модели потребовалось сформулировать и обосновать три новых закона алгебры множеств: закон парадокса, закон непустого пересечения и закон существования.

***Ключевые слова:*** алгебра множеств, логический анализ, теория множеств, полисиллогистика, закон парадокса, закон непустого пересечения, закон существования.

***Boris A. Kulik***,
Leading Researcher, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

# MATHEMATICAL MODEL OF LOGICAL ANALYSIS OF SYSTEMS BASED ON THE LAWS OF ALGEBRA OF SETS

Institute for Problems in Mechanical Engineering of RAS, St. Petersburg,
Russia, ba-kulik@yandex

***Abstract.*** The report proposes to consider the algebra of sets in accordance with its definition in the book by R. Courant and H. Robbins “What is mathematics?” as a mathematical system independent of set theory, the laws of which can be justified without axioms. A mathematical model based on the laws of algebra of sets is shown, designed for the logical analysis of systems. When solving some problems in this model, it was necessary to formulate and justify three new laws of algebra of sets: the law of paradox, the law of nonempty intersection and the law of existence.

***Keywords:*** algebra of sets, logical analysis, set theory, polysyllogistics, the law of paradox, the law of nonempty intersection, the law of existence.

## Введение

Современную математику невозможно представить без термина «множество» – он прочно укрепился практически во всех ее основных разделах. На рубеже XIX и XX столетий были попытки положить «множество» в основу математики, но не получилось, так как в это же время были обнаружены многочисленные парадоксы, многие из которых тесно связаны с этим понятием. Чтобы избежать парадоксов, было предложено использовать в качестве оснований логики и математики теорию формальных систем. В результате понятие «множество» сейчас строго определяется только с точки зрения аксиоматической теории множеств, в основе которой лежит язык исчисления предикатов [2, 9].

В настоящее время термин «алгебра множеств» неоднозначен. В русскоязычной математической литературе под ним чаще всего понимается система подмножеств некоторого множества с операциями «пересечение», «объединение» и «разность». При этом в данной системе не предусмотрены отношения, хотя речь идет о подмножествах (т. е. отношение «включение» неявно присутствует в данном варианте определения алгебры множеств). Такое узкое и неконструктивное определение соответствует определению «алгебры множеств» в Математической энциклопедии [7, с. 129]. Это определение повторяется и в современной русской Википедии [1]. Предполагается, что основой алгебры множеств в этом варианте является аксиоматическая теория множеств.

Иногда алгебру множеств отождествляют с «наивной теорией множеств», ставшей широко известной после публикации в 1960 году книги Халмоша [10]. Однако эта отождествление не вполне корректно, так как в этой книге излагается понятным для студентов языком один из вариантов аксиоматической теории множеств.

Другой вариант формирования понятия «множество» был предложен в книге Р. Куранта и Г. Роббинса [5] в небольшом разделе, который называется «Алгебра множеств». Первое издание этой книги вышло в 1941 году. Несмотря на то, что эта книга оказалась весьма популярной и многократно переиздавалась на многих языках, замысел авторов об альтернативном подходе к определению множества и к обоснованиям законов алгебры множеств без использования аксиом оказался незамеченным и не получил должного развития. В данном докладе используется именно этот вариант алгебры множеств.

## 1. Алгебра множеств (по Куранту и Роббинсу)

Здесь приводится конспективное изложение некоторых определений из [5] и комментарии к ним.

**Алгебра множеств** – это математическая система, подобная элементарной арифметике, в которой вместо операций с числами (умножение, сложение и разность) используются операции с множествами: *пересечение*, *объединение* и *дополнение*, а вместо отношения *меньше или равно* – отношение *включение*.

В современной терминологии алгебра множеств по Куранту и Роббинсу (АМКР) – это *алгебраическая система* с соответствующими операциями и отношениями. Данное определение позволяет рассматривать понятие «множество» независимо от аксиоматической теории множеств.

Рассмотрим основные понятия АМКР. Совокупность объектов, объединенных общим свойством или несколькими свойствами, будем называть **множествами**, а сами объекты – **элементами**. Если известно, что множество $D$ состоит из элементов $a$, $c$ и $f$ и только из них, то используется запись $D = \{a, c, f\}$.

Связь между элементом и множеством называется **отношением принадлежности** и обозначается символом ($\in$). Запись $a \in D$ означает, что элемент $a$ принадлежит множеству $D$. В то же время запись $b \notin D$ означает, что элемент $b$ не принадлежит множеству $D$.

В [5] своеобразно определяется **отношение включения** множеств ($\subseteq$). Пусть даны множества $A$ и $B$. Тогда $A \subseteq B$ (понимается как «$A$ включено в $B$ или равно ему»), если в множестве $A$ не существует элементов, не принадлежащих множеству $B$.

Такое «отрицательное» определение оправдано тем, что допускается случай, когда множество $A$ не содержит элементов, т. е. является **пустым множеством** (обозначается $A = \varnothing$). Тем самым из этого определения следует, что *пустое множество включено в любое множество*.

Определения **операций** в [5] соответствует стандартным определениям. Существенное отличие АМКР от *аксиоматической теории множеств* заключается в том, что в ней основным (системообразующим) является не отношение *принадлежности*, а отношение *включения*, в силу этого в АМКР нет необходимости отождествлять элемент и множество (в теории множеств это отождествление предусмотрено в Аксиоме пары [9]). Такое отождествление позволяет использовать в теории множеств такие приводящие к парадоксам понятия, как «множество всех множеств» и «самоприменимое множество» (т. е. множество, являющееся элементом самого себя). В АМКР Аксиома пары не используется, поэтому парадоксы в ней исключаются в силу определения. «Самоприменимым» в ней оказывается отношение включения ($A \subseteq A$), но это свойство является одним из законов алгебры множеств и не приводит к парадоксам.

26 законов алгебры множеств, приведенных в [5], полностью соответствуют законам классической логики. Это означает, что для обоснования классической логики нет необходимости в аксиомах. Проверить справедливость этих законов можно с помощью перебора вариантов соотношений между множествами. Более подробно обоснование законов алгебры множеств с помощью перебора вариантов рассмотрено в [3, 8].

**2. Математическая модель рассуждений на основе законов алгебры множеств**

Данная модель была предложена для анализа рассуждений типа силлогизмов и полисиллогизмов. Она была основана на аксиомах $E$-структур [3]. Здесь изложена модифицированная модель, в которой вместо аксиом используются новые законы алгебры множеств. Эта модель предназначалась для исправления ошибок и расширения аналитических возможностей силлогистики [4]. Однако, если учесть, что используемое в этой системе отношение включения множеств изоморфно отношению выводимости в логических системах [3], то эту модель можно использовать для решения более широкого класса задач.

***Полисиллогистикой*** называется система рассуждений, в которой задано произвольное число неструктурированных относительно друг друга Аристотелевых суждений в качестве посылок, а также сформулированы некоторые определенные ниже ограничения.

К Аристотелевым относятся следующие 4 типа суждений:

***A***: все $P$ есть $Q$, пример: «все приматы млекопитающие»;

***I***: некоторые $P$ есть $Q$, пример: «некоторые студенты спортсмены»;

***E***: все $P$ не есть $Q$, пример: «все жирафы не земноводные»;

***O***: некоторые $P$ не есть $Q$, пример: «некоторые мои коллеги не любят критику».

Здесь ***A***, ***I***, ***E***, ***O*** – общепринятые обозначения типов суждений, при этом типы ***A*** и ***E*** с квантором «все» в начале суждения называются *общими*, а типы ***I*** и ***O*** – *частными*.

Аристотелевы типы суждений можно выразить в соотношениях алгебры множеств. Пусть термины $P$ и $Q$ в примерах суждений соответствуют некоторым одноименным множествам. Тогда типам суждений будут соответствовать следующие выражения алгебры множеств: $\boldsymbol{A} \Rightarrow P \subseteq Q$; $\boldsymbol{I} \Rightarrow P \cap Q \neq \varnothing$; $\boldsymbol{E} \Rightarrow P \subseteq \overline{Q}$; $\boldsymbol{O} \Rightarrow P \cap \overline{Q} \neq \varnothing$.

При этом в алгебре множеств допустимы выражения, которые запрещены в традиционной силлогистике. К ним относятся формулы, у которых на первом месте находится дополнение множества, например, $\overline{P} \subseteq Q$ или $\overline{P} \cap Q \neq \varnothing$. С учетом этого предлагается следующая математическая модель рассуждений. Пусть в универсуме $\boldsymbol{U}$ задана система множеств $S_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и их дополнений $\overline{S_i}$, при этом изначально на множества не накладывается никаких ограничений: возможны равенства некоторых из этих множеств друг другу, они могут быть распознаны в процессе анализа как пустые или равные универсуму. Для этой системы заданы *логические посылки* двух типов:

– *общие суждения* заданы как соотношения включения между некоторыми из заданных множеств (например, $\overline{S_2} \subseteq S_3$),

– *частные суждения*, выражающие обязательность непустого пересечения некоторых пар множеств (например, $S_2 \cap S_6 \neq \varnothing$).

Также к этой системе можно добавить два вида *ограничений*:

– *ограничения подмены термина* (или двусмысленности) выражаются как недопустимость равенства некоторых пар множеств (например, $S_2 \neq S_4$),

– *ограничения пустоты* выражаются как недопустимость равенства пустому множеству некоторых из заданных множеств (например, $S_4 \neq \varnothing$).

Кроме того, в этой модели в качестве одного из условий можно предусмотреть *предполагаемое следствие*, которое выражено в виде общего суждения.

Тогда для этой модели рассуждений предусматривается решение следующих шести задач.

**Задача 1**: найти следствия в виде соотношений включения между не заданными в условиях задачи парами множеств (тем самым выводятся следствия в виде новых общих суждений).

**Задача 2**: проверить, нарушаются ли в данной системе ограничения подмены термина.

**Задача 3**: если задано предполагаемое следствие, то проверить, выводится ли это следствие из заданных посылок. В случае отрицательного результата осуществляется поиск *абдуктивных заключений*.

**Задача 4**: проверить, нарушаются ли в данной системе ограничения пустоты (проверяется отсутствие или наличие парадоксов в рассуждении).

**Задача 5**: найти новые пары множеств, для которых доказывается непустое пересечение (тем самым выводятся заключения в виде новых частных суждений).

**Задача 6**: установить, для каких множеств, помимо тех, что заданы в ограничениях пустоты, доказывается их безусловное неравенство пустому множеству.

В силлогистике с большими трудностями и не без ошибок решаются только Задачи 1 и 5 [4]. Решения Задач 1, 2, 3, 4, 5 с использованием *E*-структур можно найти в книге [3]. Исследования показали, что Задачи 4, 5 и 6 можно существенно упростить, если сформулировать и обосновать новые законы алгебры множеств (см. раздел 3).

Для удобства анализа предложено начинать решение всех Задач с построения графа включений.

**Литералом** называется обозначение множества или его дополнения.

**Графом включений** называется граф, в котором литералы представлены *вершинами*, а заданные или полученные в результате анализа отношения включения между ними – *дугами*. Если, например, $S_4 \subseteq \overline{S}_2$, то на графе включений дуга направлена от литерала $S_4$ к $\overline{S}_2$ ($S_4 \to \overline{S}_2$).

Порядок действий при решении всех шести задач начинается одинаково:

1) рисуем граф включений для всех посылок (как изображать на графе частные суждения, будет показано далее);

2) применяем закон контрапозиции ко всем посылкам и дорисовываем граф включений.

Полученный граф включений можно использовать для решения всех перечисленных выше задач полисиллогистики. Рассмотрим пример.

**Пример 1**. Данный, немного измененный мной пример (термин «ростовщик» заменен на термин «мошенник» и добавлена еще одна 6-я посылка) взят из книги Кэрролла [6]. Даны посылки:

1) те, кто нарушает свои обещания, не заслуживают доверия;

2) все любители выпить очень общительны;

3) человек, выполняющий свои обещания, честен;

4) ни один трезвенник не мошенник;

5) тому, кто очень общителен, всегда можно верить;

6) все честные люди не мошенники.

Необходимо вывести новые общие суждения и проверить существование мошенников, т. е. проследить, соблюдается ли ограничение пустоты для термина «мошенники».

Сформулируем посылки полисиллогизма в виде соотношений между следующими множествами: $\boldsymbol{U}$ – люди; $S_1$ – нарушающие обещания; $S_2$ – заслуживающие доверия; $S_3$ – любители выпить; $S_4$ – очень общительные; $S_5$ – честные; $S_6$ – мошенники. Тогда суждения примера 1 можно выразить в виде следующих соотношений: 1) $S_1 \subseteq \overline{S}_2$, 2) $S_3 \subseteq S_4$, 3) $\overline{S}_1 \subseteq S_5$, 4) $\overline{S}_3 \subseteq \overline{S}_6$, 5) $S_4 \subseteq S_2$, 6) $S_5 \subseteq \overline{S}_6$.

*Ограничение пустоты*: $S_6 \neq \varnothing$.

Применим ко всем посылкам закон контрапозиции. Тогда получим: 7) $S_2 \subseteq \overline{S}_1$, 8) $\overline{S}_4 \subseteq \overline{S}_3$, 9) $\overline{S}_5 \subseteq S_1$, 10) $S_6 \subseteq S_3$, 11) $\overline{S}_2 \subseteq \overline{S}_4$, 12) $S_6 \subseteq \overline{S}_5$.

Теперь построим граф включений, который рекомендуется изображать таким способом: в верхней строке пусть будут расположены все позитивные литералы, в нижней – все негативные. Так мы не пропустим ни одного литерала и к тому же на такой схеме, в которой противоположные литералы расположены по вертикали, можно легко выводить контрапозиции исходных суждений, которые на рисунке 1 изображены штриховыми линиями.

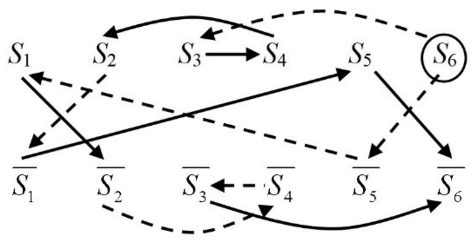


Рис. 1. Посылки и следствия Примера 1

Из рисунка видно, что контрапозиции исходных суждений можно легко построить, используя одно простое правило: *если исходное суждение соединяет пару литералов, то контрапозиция этого суждения* *соединяет противоположные литералы, при этом направление дуги (вправо или влево) изменяется на обратное*.

Теперь легко находится решение задачи. Выберем на графе литералы, в которые не входит ни одна дуга (*начальные литералы*, в данном примере только один литерал $S_6$) и построим *пути* из них по направлениям дуг. В результате получим два пути на графе:

$$S_6 \to S_3 \to S_4 \to S_2 \to \overline{S}_1 \to S_5 \to \overline{S}_6;$$
$$S_6 \to \overline{S}_5 \to S_1 \to \overline{S}_2 \to \overline{S}_4 \to \overline{S}_3 \to \overline{S}_6.$$

Возможны задачи, у которых нельзя найти начальные литералы, так как все пути в графе включений могут оказаться циклами. Это означает, что все литералы, содержащиеся в цикле, представляют равные друг другу множества. Пример таких задач содержится в [3].

По закону транзитивности включения в обоих путях выводится соотношение $S_6 \subseteq \overline{S}_6$. В $E$-структурах выражение $S_6 \subseteq \overline{S}_6$ распознается как **коллизия парадокса** и равносильно тому, что $S_6 = \varnothing$. Это говорит о том, что ограничение пустоты в данном примере не выполняется.

Вывод о том, что из коллизии парадокса следует равенство соответствующего литерала пустому множеству, следует из аксиом $E$-структур, но никак не отражен в законах алгебры множеств. В силу этого возникла необходимость в формулировке и обосновании этого и двух других новых законов алгебры множеств.

## 3. Новые законы алгебры множеств

Первый закон назван законом парадокса.

**L1. Закон парадокса**: если доказано, что $X \subseteq \overline{X}$, то $X = \varnothing$.

*Доказательство*. Из определения операции дополнения следует, что в множестве $\overline{X}$ содержатся те и только те элементы универсума $\boldsymbol{U}$, которые не являются элементами $X$. Предположим, что имеется элемент $b$ такой, что $b \in X$. В то же время из условия $X \subseteq \overline{X}$ следует, что элемент $b$ содержится в $\overline{X}$, т. е. по определению $b \notin X$. Полученное противоречие можно разрешить единственным способом: $X = \varnothing$. *Конец доказательства*.

К парадоксу также приводит следующая простая ситуация. Предположим, что в результате рассуждений оказалось, что некоторый объект $A$ обладает свойством $B$ и в то же время не обладает им. Например, не вызывает сомнения то, что Ахиллес догонит черепаху, но вместе с этим «доказывается», что он не может ее догнать. Это можно выразить в виде двух посылок: $A \subseteq B$ и $A \subseteq \overline{B}$. Применив закон контрапозиции ко второй посылке, получим $B \subseteq \overline{A}$. В то же время из $A \subseteq B$ и $B \subseteq \overline{A}$ по закону транзитивности следует $A \subseteq \overline{A}$.

Парадокс образуется и в том случае, когда свойствами объекта одновременно являются не *контрадикторные* (например, квадраты – все фигуры на плоскости кроме квадратов), а *контрарные* сущности, когда для двух непустых множеств $B$ и $C$ выполняется отношение $C \neq \overline{B}$, но при этом $C \subseteq \overline{B}$ (например, квадраты – эллипсы). Рассмотрим, как в этом случае образуется парадокс. Пусть даны две посылки $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$. При этом свойства $B$ и $C$ являются контрарными, что можно выразить с помощью соотношения $B \subseteq \overline{C}$. Используем это соотношение в качестве 3-й посылки. Тогда из $A \subseteq B$ и $B \subseteq \overline{C}$ по закону транзитивности получим $A \subseteq \overline{C}$. В итоге мы опять получили коллизию парадокса $A \subseteq C$ и $A \subseteq \overline{C}$, из чего следует $A \subseteq \overline{A}$.

Второй новый закон алгебры множеств используется в тех случаях, когда в рассуждении присутствуют или выводятся частные суждения.

**L2. Условие непустого пересечения**: $\alpha_k \subseteq X$ и $\alpha_k \subseteq Y$, при условии $\alpha_k \neq \varnothing$, равносильно выражению $X \cap Y \neq \varnothing$.

*Доказательство*. Если $\alpha_k \neq \varnothing$, то существует элемент $b$ такой, что $b \in \alpha_k$. Из $\alpha_k \subseteq X$ и $\alpha_k \subseteq Y$ следует, что $b \in X$ и $b \in Y$, в силу чего справедливо $X \cap Y \neq \varnothing$. *Конец доказательства*.

Третий новый закон предназначен для распознавания безусловно непустых множеств среди тех множеств системы, которые не заданы в ограничениях пустоты.

**L3. Закон существования**: если $X \neq \varnothing$ и $X \subseteq Y$, то $Y \neq \varnothing$.

*Доказательство*. Поскольку $X \neq \varnothing$, то существует элемент $b$ такой, что $b \in X$. Так как $X \subseteq Y$, то $b \in Y$. Следовательно, $Y \neq \varnothing$. *Конец доказательства*.

Этот закон интересен тем, что он по форме соответствует давно известному в логике правилу вывода *modus ponens*: если выводимы формулы $A$ и $A \supset B$, то выводима формула $B$ ($\supset$ – обозначение логической связки импликации). По сути, закон **L3** – это *modus ponens* применительно к множествам.

В примере 1 закон **L1** подтверждает нарушение ограничения пустоты. Использование двух других новых законов можно показать на следующем примере.

**Пример 2**. Проверим, можно ли в примере 1 избавиться от парадокса, заменив вторую посылку «все любители выпить очень общительны» на более правдоподобное частное суждение «некоторые любители выпить очень общительны» ($S_3 \cap S_4 \neq \varnothing$). Тогда вместо посылки $S_3 \subseteq S_4$ надо, используя закон **L2**, ввести две посылки: $\alpha_k \subseteq S_3$ и $\alpha_k \subseteq S_4$ при условии $\alpha_k \neq \varnothing$. В соответствии с этим построим граф включений (см. рис. 2).

Анализ этого графа включений позволяет получить следующие выводы:

1) на графе включений имеются два начальных литерала: $S_6$ и $\alpha_k$;

2) из литерала $S_6$ исходят две ветви: $S_6 \to \overline{S}_5 \to S_1 \to \overline{S}_2 \to \overline{S}_4 \to \bar{\alpha}_k$ и $S_6 \to S_3$; нетрудно убедиться в том, что в них нет парадокса;

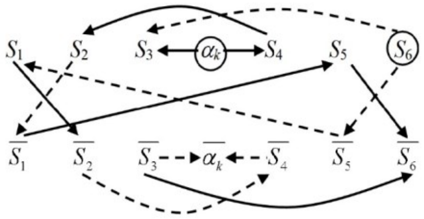


Рис. 2. Граф включений Примера 2

3) из литерала $\alpha_k$ исходят две ветви: $\alpha_k \to S_4 \to S_2 \to \overline{S}_1 \to S_5 \to \overline{S}_6$ и $\alpha_k \to S_3$. По закону **L2** получается, что непустое пересечение имеют пары литералов, находящихся на одной из этих ветвей (например, $S_4 \cap \overline{S}_1 \neq \varnothing$, так как $\alpha_k \subseteq S_4$ и $\alpha_k \subseteq \overline{S}_1$), и пары литералов, содержащиеся в разных ветвях, исходящих из $\alpha_k$ (например, $\overline{S}_6 \cap S_5 \neq \varnothing$, так как $\alpha_k \subseteq \overline{S}_6$ и $\alpha_k \subseteq S_5$). Нетрудно убедиться, что среди этих пар нет пары ($S_5$, $S_6$), из чего следует, что частное суждение «некоторые мошенники честные» ($S_5 \cap S_6 \neq \varnothing$) не является заключением в данном примере. Тот же результат мы получим, если рассмотрим ветви, исходящие из литерала $S_6$, который в силу ограничения пустоты соответствует непустому множеству.

Таким образом, замена хотя бы одного общего суждения в цепи включений, ведущей к парадоксу, частным суждением позволяет устранить полностью логическую катастрофу. Отсюда также следует, что в ряде случаев такая, казалось бы, неприметная логическая ошибка, как *преобразование частного суждения в общее*, приводит к правильное рассуждение к парадоксу.

Рассмотрим, как можно решить Задачу 6 (распознавание безусловно непустых множеств в системе) в примере 2. Для этого используется закон **L3**. Из условий задачи ясно, что изначально заданными непустыми множествами в системе являются $S_6$ и $\alpha_k$. На графе включений (см. рис. 2) можно проследить все ветви, исходящие из этих литералов. По закону **L3** любой литерал, содержащийся в этих ветвях, соответствует безусловно непустому множеству. Нетрудно убедиться в том, что безусловно непустыми в примере 2 являются все литералы, за исключением $\overline{S}_3$.

**Заключение**

В процессе исследований была усовершенствована мат. модель логического анализа систем на основе отношения включения множеств, а также сформулированы и обоснованы новые законы алгебры множеств: закон парадокса, условие непустого пересечения и закон существования.

**Благодарности**

Работа была выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для Института проблем машиноведения Российской академии наук.

**Список литературы**

1. Алгебра множеств [Электронный ресурс]. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгебра_множеств (дата обращения: 25.05.2024).

2. Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 455 с.

3. Кулик Б. А. Логика и математика: просто о сложных методах логического анализа / Под общ. ред. А. Я. Фридмана. – СПб.: Политехника, 2020. – 144 с. – URL: http://logic-cor.narod.ru/index/knigi/0-9 (дата обращения: 25.05.2024).

4. Кулик Б. А. Почему в учебниках логики содержатся логические ошибки? // Образовательные ресурсы и технологии. – 2023. – № 1(42). – С. 7–14.

5. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? – 3-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2001. – 568 с. – URL: https://azbyka.ru/deti/wp-content/uploads/2021/09/chto-takoe-matematika.-kurrant-robbins.pdf (дата обращения: 25.05.2024).

6. Кэрролл Л. Символическая логика // История с узелками / Пер. с англ. Ю. А. Данилова. – М.: Мир, 1985. – С. 189–362.

7. Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1977. – Т.1. – 576 с.

8. На чем основана логика? Часть 1. Алгебра множеств без аксиом [Электронный ресурс] // Хабр. – URL: https://habr.com/ru/articles/781386/ (дата обращения: 25.05.2024).

9. Френкель А. А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств / Пер. с англ. Ю. А. Гастева. – М: Мир, 1966. – 557 с.

10. Halmos P. Naive set theory. – New York: D. Van Nostrand Company, 1960. – 104 p.