УДК 519.711.3, 514.743.2
doi:10.18720/SPBPU/2/id24-494

Минитаева Алина Мажитовна,
доцент, канд. техн. наук

ТЕНЗОРНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Россия, Москва, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, minitaeva@bmstu.ru

Аннотация. В статье предлагаются формы записи с использованием тензоров или многоиндексных объектов уравнений состояния нелинейных систем управления с полиномиальными функциями пространства состояний. Вводится новый бинарный оператор алгебры многоиндексных объектов и тензорной алгебры, доказываются его свойства. Предлагается способ анализа решетчатых функций и моделирования нелинейных систем управления с дискретным временем, основанный на множественной полиномиальной регрессии.

Ключевые слова: нелинейные системы управления, системы управления с дискретным временем, решетчатая функция, множественная полиномиальная регрессия, многоиндексный объект, тензор, тензорная алгебра, тензорное исчисление.

Alina M. Minitaeva,
Associate Professor, Candidate of Technical Sciences

TENSOR-BASED APPROACH FOR DISCRETE-TIME NONLINEAR SYSTEMS MODELING

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia,
minitaeva@bmstu.ru

Abstract. The paper proposes the tensor notation of state equations of nonlinear control systems with polynomial state space functions. A new binary operator of the algebra of multiindex objects and tensor algebra is introduced and its properties are proved as 2 theorems. The method of lattice function analysis and modeling of discrete-time nonlinear control systems based on multiple polynomial regression is presented.

Keywords: nonlinear control systems, discrete-time control systems, lattice function, multiple polynomial regression, multi-index object, tensor, tensor algebra, tensor calculus.

Введение

За последние десять лет были проведены значительные исследования [1, 10], направленные на анализ внутренней нелинейной структуры, присутствующей в сигналах и/или моделях ввода-вывода, для повышения эффективности моделирования нелинейных систем. Этому начинанию способствовало использование сначала в линейных системах тензоров [16], которые служат фундаментальными конструкциями в полилинейной алгебре, что привело к развитию подходов к моделированию нелинейных систем, основанных на тензорах [10]. Тензорные методы создают подпространства низкого ранга для работы с многопараметрическими [18] и многомерными [19] моделями.

В настоящее время системы управления обычно представляются системой дифференциальных или разностных уравнений в пространстве состояний [5]. Для линейных систем управления с непрерывным временем без явной прямой связи [4]:

$$\begin{aligned}x' &= Ax + Bu, \\y &= Cx,\end{aligned}$$

и для линейных систем управления с дискретным временем:

$$\begin{aligned}x[n + 1] &= Ax[n] + Bu[n]; \\y[n] &= Cx[n].\end{aligned}\tag{1}$$

В нелинейных системах управления сейчас принята векторная запись $x' = f(t, x, u)$ или для дискретного времени [6]:

$$\begin{aligned}x[n + 1] &= f(nT, x[n], u[n]); \\y[n] &= h(nT, x[n]).\end{aligned}\tag{2}$$

Векторы x , u , f , h выглядят следующим образом:

$$x[n] = \begin{pmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \dots \\ x_s[n] \end{pmatrix}, \quad u[n] = \begin{pmatrix} u_1[n] \\ u_2[n] \\ \dots \\ u_m[n] \end{pmatrix}, \quad (3a)$$

$$f(nT, x[n], u[n]) = \begin{pmatrix} f_1(nT, x[n], u[n]) \\ f_2(nT, x[n], u[n]) \\ \dots \\ f_s(nT, x[n], u[n]) \end{pmatrix}, \quad h(nT, x[n]) = \begin{pmatrix} h_1(nT, x[n]) \\ h_2(nT, x[n]) \\ \dots \\ h_g(nT, x[n]) \end{pmatrix}, \quad (3б)$$

1. Множественная полиномиальная регрессия решетчатой функции пространства состояний

Рассмотрим решетчатую функцию пространства состояний $f_i(nT, x[n], u[n])$, $i = 1, 2, \dots, s$ из (3). Она определена на множестве значений $\{x(kT), u(kT)\}$, $k = 1, 2, \dots, N$, где $x(kT), u(kT)$ представляют собой временные ряды длиной NT без пропусков. При этом f_i в зависимости от целей моделирования может иметь или не иметь аналитическое представление. В обоих случаях допустимо методами регрессионного анализа (например, аппроксимирующие поверхности, полиномиальная квантильная регрессия [3], поверхности отклика [9], интеллектуальные методы на основе машинного обучения [11, 12], полиномы Чебышева [13], метод факторизации симультанных уравнений [14]) найти полином нескольких переменных, количество членов которого (и число переменных-регрессоров) в общем виде будет зависеть от рассматриваемого случая:

- линейная часть управления (регрессорами являются только s переменных состояния);
- отдельная нелинейная часть управления (регрессорами по отдельности являются переменные состояния и переменные управления, а множественная полиномиальная регрессия применяется дважды – отдельно для s предикторов и отдельно для m предикторов);
- общая нелинейность состояния и управления ($s + m$ регрессорами являются и переменные состояния, и переменные управления).

Обозначим полиномиальную функцию, которая после применения множественной полиномиальной регрессии будет представлять i -ую решетчатую функцию, как $\hat{f}_i$. Осуществим регрессионный переход к полиномиальной форме:

$$f_i(nT, x[n], u[n]) \rightarrow \hat{f}_i(t, x, u).$$

1) В случае линейной части управления полиномиальная форма представима в виде суммы:

$$\hat{f}_i(nT, x, u) = \hat{f}_{ix}(t, x) + \hat{f}_{iu}(t, u), \quad (4)$$

где часть состояния $\hat{f}_{ix}(t, x)$ – это полином s переменных степени p ; часть управления $\hat{f}_{iu}(t, u) = Bu$, как в линейных системах; B – это матрица управления.

2) В случае отдельной нелинейной части управления выражение (4) также справедливо.

Однако, часть управления $\hat{f}_{iu}(t, u)$ – это уже полином m переменных степени q .

Итак, в случаях 1 и 2 часть состояния выглядит следующим образом:

$$\hat{f}_{ix}(t, x) = \hat{f}_{ix}(t, x_1, x_2, \dots, x_s) = \sum a_{k_1, k_2, \dots, k_s} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \times \dots \times x_s^{k_s} = \sum a_{k_1, k_2, \dots, k_s} \prod_{j=1}^s x_j^{k_j}, \quad (5)$$

где суммирование производится по всем различным упорядоченным наборам (мультииндексам). По теореме Безу полином (5) имеет C_{p+s}^p членов. В рамках рассмотрения систем управления с однородными дифференциальными уравнениями свободный член не рассматриваем, поэтому количество членов на 1 меньше: $C_{p+s}^p - 1$.

Аналогично выражению (5) для случая 2 часть управления может быть представлена в виде:

$$\hat{f}_{iu}(t, u) = \sum b_{k_1, k_2, \dots, k_m} \prod_{j=1}^m u_j^{k_j}. \quad (6)$$

Число членов полинома (6) по теореме Безу равно $C_{q+m}^q - 1$.

3) В случае общей нелинейности состояния и управления полиномиальную форму для i -ой решетчатой функции уже нельзя представить в виде суммы отдельных функций (частей состояния и управления) с отдельными векторными аргументами x и u , т. е. равенство (2) не выполняется.

В этом случае $\hat{f}_i(t, x, u)$ – это полином $s + m$ переменных:

$$\hat{f}_i(x, u) = \sum a_{k_1, k_2, \dots, k_s, r_1, r_2, \dots, r_m} \prod_{j,l=1}^{s,m} x_j^{k_j} u_l^{r_l}. \quad (7)$$

Если полином (7) имеет степень p , то число его членов без свободного коэффициента равно $C_{p+s+m}^p - 1$.

Без потери общности можно считать вышеописанные варианты 1 и 2 частными случаями варианта 3: при $p > m$ случай 2 может быть преобразован в случай 3 заменой m переменных вектора x на переменные u , а точнее их переносом из вектора x в вектор u ; в первом случае такое действие аналогично возможно, потому что $m = 1$.

2. Тензорная форма записи уравнения состояния нелинейной системы управления с полиномиальными функциями пространства состояний

В силу последнего вывода для начала ограничимся рассмотрением случая 1, т. е. полинома (5), и приведем два примера.

Пример 1. $p = 2, s = 2$. Полином содержит $C_4^2 - 1 = 5$ членов:

$$\hat{f}_{ix}(t, x) = \hat{f}_{ix}(t, x_1, x_2) = a_{i,2,0}x_1^2 + a_{i,1,1}x_1x_2 + a_{i,0,2}x_2^2 + a_{i,1,0}x_1 + a_{i,0,1}x_2.$$

Назовем

$$X_C = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_2^2 \\ x_1 & x_1x_2 & 0 \\ x_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

матрицей сочетаний переменных состояния, а

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & a_{i,0,1} & a_{i,0,2} \\ a_{i,1,0} & a_{i,1,1} & 0 \\ a_{i,2,0} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

матрицей коэффициентов полинома состояния i -го уравнения состояния.

Для всей системы из $s = 2$ уравнений можно говорить о многоиндексном объекте ранга 3:

$$A = \left(\begin{pmatrix} 0 & a_{1,0,1} & a_{1,0,2} \\ a_{1,1,0} & a_{1,1,1} & 0 \\ a_{1,2,0} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_{2,0,1} & a_{2,0,2} \\ a_{2,1,0} & a_{2,1,1} & 0 \\ a_{2,2,0} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 3 \times 3}. \quad (10)$$

Также создадим многоиндексный объект ранга 3 из матрицы X_C (8), продублировав ее в качестве его сечения:

$$X = \left(\begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_2^2 \\ x_1 & x_1x_2 & 0 \\ x_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_2^2 \\ x_1 & x_1x_2 & 0 \\ x_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad X \in X^{2 \times 3 \times 3}, \quad (11)$$

где X – бесконечное множество одночленов из переменных вектора x .

Теперь аналогично уравнению в матричной форме (1) можно записать уравнение (2) в форме многоиндексных объектов:

$$x_i[n+1] = A_i \overset{\varphi\rho}{\times} X_C + B_i u[n], \quad (12)$$

где $\overset{\varphi\rho}{\times}$ – бинарный оператор фробениусова скалярного произведения (или стандартного скалярного произведения), определенного на пространствах любого ранга $\mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times \dots \times d_r}$: $A \overset{\varphi\rho}{\times} B = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} \dots \sum_{k=1}^{d_r} a_{i,j,\dots,k} b_{i,j,\dots,k}$. Мы рассматриваем случай 1 с линейной частью управления, поэтому в уравнении (12) B осталась матрицей.

Пример 2. $p = 2, s = 3$. Полином содержит $C_5^2 - 1 = 9$ членов:

$$\hat{f}_{ix}(t, x) = \hat{f}_{ix}(t, x_1, x_2, x_3) = a_{i,2,0,0}x_1^2 + a_{i,1,1,0}x_1x_2 + a_{i,1,0,1}x_1x_3 +$$

$$+a_{i,0,2,0}x_2^2 + a_{i,0,1,1}x_2x_3 + a_{i,0,0,2}x_3^2 + a_{i,1,0,0}x_1 + a_{i,0,1,0}x_2 + a_{i,0,0,1}x_3$$

Назовем

$$X_C = \left(\left(\begin{array}{ccc} 0 & x_2 & x_2^2 \\ x_1 & x_1x_2 & 0 \\ x_1^2 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} x_3 & x_2x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} x_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right), \quad X_C \in X^{3 \times 3 \times 3} \quad (13)$$

тензором сочетаний переменных состояния, а

$$A_i = \left(\left(\begin{array}{ccc} 0 & a_{i,0,1,0} & a_{i,0,2,0} \\ a_{i,1,0,0} & a_{i,1,1,0} & 0 \\ a_{i,2,0,0} & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} a_{i,0,0,1} & a_{i,0,1,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} a_{i,0,0,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right), \quad (14)$$

$A_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3}$ тензором коэффициентов полинома состояния i -го уравнения состояния, он имеет ранг 3.

Для всей системы из $s = 3$ уравнений можно говорить о тензоре ранга 4, определенном на пространстве $\mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3}$:

$$A = (A_1, A_2, A_3), \quad A \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3}. \quad (15)$$

Также создадим тензор ранга 4 дублированием в качестве его сечения тензора 3-го ранга X_C (13):

$$X = (X_C, X_C, X_C), \quad X \in X^{3 \times 3 \times 3 \times 3}. \quad (16)$$

Теперь аналогично уравнению в форме многоиндексных объектов (12) можно записать уравнение рассматриваемой системы в тензорной форме:

$$x_i[n+1] = A_i \overset{\varphi\rho}{\times} X_C + B_i u[n], \quad (17)$$

где $\overset{\varphi\rho}{\times}$ – бинарный оператор фробениусова скалярного произведения (или стандартного скалярного произведения).

A_i, X_C, A, X являются тензорами, т. к., во-первых, их размерности по всем индексам совпадают между собой, а, во-вторых, в их пространствах определены базисы (задаваемые переменными состояния) и законы преобразования координат [21] при смене базиса (производимой с переменными состояния замене в системе уравнений пространства состояний).

Используя метод математической индукции и переходя от частных примеров к общему случаю 3, обозначим: W_C – многоиндексный объект сочетания переменных состояния x и управления u ранга $s + m$; A_i – многоиндексный объект (ранга $s + m$) коэффициентов полинома состояния i -го уравнения состояния системы; W – многоиндексный объект, получаемый дублированием W_C в качестве своего сечения, ранга $s + m + 1$; A –

многоиндексный объект (ранга $s + m + 1$) коэффициентов полиномиальной системы уравнений нелинейной системы управления.

При $p = s - 1, q = 1$ (в случае линейной части управления) или $p = s + m - 1$ (в случае общей нелинейности частей состояния и управления) многоиндексные объекты A_i, W_C являются тензорами, поэтому при осуществлении множественной полиномиальной регрессии $f_i(nT, x[n], u[n]) \rightarrow \hat{f}_i(t, x, u)$ рекомендуется выбирать степень полинома p на единицу меньшую, чем количество переменных-регрессоров.

При этом нелинейную систему дифференциальных или разностных (2) уравнений с полиномиальным вектором f (3) в этих обозначениях можно записать тензорной формой:

$$\begin{aligned} x_i' &= A_i \overset{\varphi\rho}{\times} W_C, \\ x_i[n + 1] &= A_i \overset{\varphi\rho}{\times} W_C, \end{aligned} \quad (18)$$

где правая часть содержит в себе и часть состояния, и часть управления, которые могут быть в том числе полиномиально объединены (связаны) между собой.

3. Форма записи с использованием многоиндексных объектов системы уравнений пространства состояний нелинейной системы управления с дискретным временем

Для перехода от записи i -ых уравнений пространства состояний к записи всей системы необходим новый бинарный оператор произведения многоиндексных объектов ранга $d + 1$ с векторным результатом, определенный на множествах $\mathbb{R}^{d+1}, X^{d+1}$ и производящий умножение с векторным результатом по одному измерению тензоров и фробениусово скалярное умножение по остальным измерениям. Такой бинарный оператор тензорной алгебры можно определить следующим образом.

Определение 1.

$$A^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} B^{d+1} = (A_1, A_2, \dots, A_d) \overset{\mu}{\otimes} (B_1, B_2, \dots, B_d) = \begin{pmatrix} A_1 \overset{\varphi\rho}{\times} B_1 \\ A_2 \overset{\varphi\rho}{\times} B_2 \\ \dots \\ A_d \overset{\varphi\rho}{\times} B_d \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где $\{A, B\} \in \{\mathbb{R}^{d+1}, X^{d+1}\}$; A_i, B_i – тензоры ранга d .

Замечание 1. Оператор $\overset{\mu}{\otimes}$ по выражению (19) можно реализовать в алгоритмических языках программирования, например, Python с подключением библиотеки *numpy*. Не будем приводить исходный код в данной статье в силу его тривиальности.

Докажем переместительное свойство умножения $\overset{\mu}{\otimes}$.
Теорема 1.

$$A^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} B^{d+1} = B^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} A^{d+1} \quad (20)$$

Доказательство. По равенству (19) левая часть равна вектору:

$$A^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} B^{d+1} = \begin{pmatrix} \overset{\varphi\rho}{A_1 \times B_1} \\ \overset{\varphi\rho}{A_2 \times B_2} \\ \dots \\ \overset{\varphi\rho}{A_d \times B_d} \end{pmatrix}.$$

Так как фробениусово умножение (или стандартное скалярное произведение) обладает переместительным свойством, то:

$$\begin{pmatrix} \overset{\varphi\rho}{A_1 \times B_1} \\ \overset{\varphi\rho}{A_2 \times B_2} \\ \dots \\ \overset{\varphi\rho}{A_d \times B_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\varphi\rho}{B_1 \times A_1} \\ \overset{\varphi\rho}{B_2 \times A_2} \\ \dots \\ \overset{\varphi\rho}{B_d \times A_d} \end{pmatrix}.$$

По определению 1:

$$\begin{pmatrix} \overset{\varphi\rho}{B_1 \times A_1} \\ \overset{\varphi\rho}{B_2 \times A_2} \\ \dots \\ \overset{\varphi\rho}{B_d \times A_d} \end{pmatrix} = B^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} A^{d+1}.$$

значит, $A^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} B^{d+1} = B^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} A^{d+1}$, т. е. равенство (20) справедливо, и произведение по оператору $\overset{\mu}{\otimes}$ обладает переместительным свойством. ■

Распределительное свойство умножения $\overset{\mu}{\otimes}$ относительно сложения также выполняется.

Теорема 2.

$$A^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} (B^{d+1} + C^{d+1}) = A^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} B^{d+1} + A^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} C^{d+1} \quad (21)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & A^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} (B^{d+1} + C^{d+1}) = \\ & = (A_1, A_2, \dots, A_d) \overset{\mu}{\otimes} ((B_1, B_2, \dots, B_d) + (C_1, C_2, \dots, C_d)) = \end{aligned}$$

$$= (A_1, A_2, \dots, A_d) \overset{\mu}{\otimes} (B_1 + C_1, B_2 + C_2, \dots, B_d + C_d) = \begin{pmatrix} A_1 \overset{\varphi\rho}{\times} (B_1 + C_1) \\ A_2 \overset{\varphi\rho}{\times} (B_2 + C_2) \\ \dots \\ A_d \overset{\varphi\rho}{\times} (B_d + C_d) \end{pmatrix}.$$

Так как фробениусово умножение обладает распределительным свойством относительно сложения, то:

$$\begin{pmatrix} A_1 \overset{\varphi\rho}{\times} (B_1 + C_1) \\ A_2 \overset{\varphi\rho}{\times} (B_2 + C_2) \\ \dots \\ A_d \overset{\varphi\rho}{\times} (B_d + C_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \overset{\varphi\rho}{\times} B_1 + A_1 \overset{\varphi\rho}{\times} C_1 \\ A_2 \overset{\varphi\rho}{\times} B_2 + A_2 \overset{\varphi\rho}{\times} C_2 \\ \dots \\ A_d \overset{\varphi\rho}{\times} B_d + A_d \overset{\varphi\rho}{\times} C_d \end{pmatrix}.$$

По определению сложения векторов и далее по определению 1:

$$\begin{pmatrix} A_1 \overset{\varphi\rho}{\times} B_1 + A_1 \overset{\varphi\rho}{\times} C_1 \\ A_2 \overset{\varphi\rho}{\times} B_2 + A_2 \overset{\varphi\rho}{\times} C_2 \\ \dots \\ A_d \overset{\varphi\rho}{\times} B_d + A_d \overset{\varphi\rho}{\times} C_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \overset{\varphi\rho}{\times} B_1 \\ A_2 \overset{\varphi\rho}{\times} B_2 \\ \dots \\ A_d \overset{\varphi\rho}{\times} B_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 \overset{\varphi\rho}{\times} C_1 \\ A_2 \overset{\varphi\rho}{\times} C_2 \\ \dots \\ A_d \overset{\varphi\rho}{\times} C_d \end{pmatrix} = \\ = A^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} B^{d+1} + A^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} C^{d+1},$$

значит, $A^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} (B^{d+1} + C^{d+1}) = A^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} B^{d+1} + A^{d+1} \overset{\mu}{\otimes} C^{d+1}$, т. е. равенство (21) верно, и умножение по оператору $\overset{\mu}{\otimes}$ обладает распределительным свойством относительно сложения. ■

Очевидно, что сочетательным свойством умножение по оператору $\overset{\mu}{\otimes}$ не обладает.

Замечание 2. Оператор $\overset{\mu}{\otimes}$ и определение 1 могут быть расширены на пространства $\mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times \dots \times d_r}$ любого ранга для многоиндексных объектов с любым количеством измерений и любыми размерностями в них. При этом переместительное и распределительное относительно сложения свойства сохраняются.

Теперь все по i уравнения пространства состояний нелинейной системы управления с дискретным временем (18) можем записать в форме многоиндексных объектов:

$$x[n + 1] = A \overset{\mu}{\otimes} W. \quad (22)$$

Уравнение нелинейной системы управления (22) еще компактнее векторной формы уравнения (2) и реализует новый тензорный подход для моделирования нелинейных систем управления с дискретным временем.

Заключение

Моделирование и анализ нелинейных систем управления может быть более сложным, чем линейных систем [16], однако нелинейные системы управления широко используются и имеют много применений, таких как моделирование нелинейных нестационарных процессов [20, 22, 23], СППР [15], хаотические системы [17], телекоммуникации и сети [8], экономические [7], биологические и эволюционные [2] системы.

Использование предложенной тензорной формы записи уравнений состояния нелинейной системы управления с полиномиальными функциями пространства состояний позволит упростить запись систем, а также их моделирование в алгоритмических языках программирования, например, Python. Предложенный в статье бинарный оператор тензорной алгебры реализует новый тензорный подход для моделирования нелинейных систем управления с дискретным временем.

Список литературы

1. Aguado J. V., Borzacchiello D., Sagar K., Chinesta F., Huerta A. Tensor representation of non-linear models using cross approximations // *Journal of Scientific Computing*. – 2019. – DOI:10.1007/s10915-019-00917-2.
2. Gao X., Guo Y., Shan W. Shallow-water investigations: bilinear auto-backlund transformations for A (3+1)-dimensional generalized nonlinear evolution system // *Appl. Comput. Math.* – 2023. – № 22. – Pp. 133–142.
3. Muller C. Optimizing anti-poverty transfers with quantile regressions // *Appl. Comput. Math.* – 2005. – № 4. – Pp. 178–191.
4. Zak S. H. *Systems and control*. – Oxford University Press, 2002.
5. Chen C. *Analog and digital control system design: transfer-function, state-space, and algebraic methods*. – Oxford University Press, 2006.
6. Nijmeijer H., Schaft A. *Nonlinear dynamical control systems*. – Springer, 1990.
7. Atkinson A. B., Stiglitz J. E. The structure of indirect taxation and economic efficiency // *Journal of Public Economics*. – 1972. – № 1. – Pp. 97–119.
8. Basar T. Control and game-theoretic tools for communication networks (survey) // *Appl. Comput. Math.* – 2007. – № 6. – Pp. 104–125.
9. Box G. F. P., Draper N. R. Measures of lack of fit for response surface designs and predictor variable transformations // *Technometrics*. – 1982. – № 24. – Pp. 1–8.
10. Favier G., Kibangou A. Tensor-based approaches for nonlinear and multilinear systems modeling and identification // *Algorithms*. – 2023. – № 16. – DOI:10.3390/a16090443.
11. Buldakova T. I., Lantsberg A. V. Data analysis system based on the intelligent agent // 6th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE 2024). – 2024. – DOI:10.1109/REEPE60449.2024.10479851.

12. Zarubenkova V. O., Skvortsova M., Fardoun H. An intelligent system for classifying emotional coloration of comments // 6th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE 2024). – 2024. – DOI:10.1109/REEPE60449.2024.10479749.
13. Hayes J. G. Numerical methods for curve and surface fitting // Bull. Inst. Math. Appl. – 1974. – № 10. – Pp. 144–152.
14. Minitaeva A. M. Coefficient estimation of simultaneous equations in the case of stochasticity of exogenous variables // Journal of Physics: Conference Series. – 2023. – № 2543. – DOI:10.1088/1742-6596/2543/1/012005.
15. Minitaeva A. M. Analysis of the multi-criteria decision-making problem under conditions of heterogeneous interval uncertainty // 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA 2022). – 2022. – Pp. 42–45.
16. Murthy G. R. Concurrent cyber physical systems: tensor state space representation // 11th IEEE International Conference on Control & Automation (ICCA). – 2014. – DOI:10.1109/ICCA.2014.6871098.
17. Volosova A. V. Using quantum algorithms for uncertainty processing // 2024 6th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE 2024). – 2024. – DOI:10.1109/REEPE60449.2024.10479677.
18. Suyatinov S. I., Buldakova T. I., Vishnevskaya Yu. A. Identification of situations based on synergetic model // 3rd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA 2021). – 2021. – Pp. 509–514.
19. Syuzev V. V., Smirnova E. V., Proletarsky A. V. Algorithms of multidimensional random process simulation // Computer Optics. – 2021. – № 45. – Pp. 627–637.
20. Li H., Yamamoto S. Polynomial regression based model-free predictive control for nonlinear systems // 55th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE 2016). – 2016. – DOI:10.1109/SICE.2016.7749264.
21. Zengin F. O., Demirbag S. A. On Ricci tensor of weakly concircular symmetric Riemannian spaces // Appl. Comput. Math. – 2013. – № 12. – Pp. 168–174.
22. Минитаева А. М. Многомодельный подход к прогнозированию нелинейных нестационарных процессов в задачах оптимального управления // Необратимые процессы в природе и технике: труды 12 Всероссийской конференции, г. Москва, 31 января – 3 февраля 2023 г.: в 2 т. – 2023. – Т. 1. – С. 438–447.
23. Минитаева А. М., Шайгура С. В. Системный анализ и разработка методики моделирования нелинейных нестационарных процессов в системе поддержки принятия решений // Информационно-технологический вестник. – 2023. – Т. 37. – № 3. – С. 54–64.