

*Лэ Ван Хуен*¹,

аспирант;

*Черненко Людмила Васильевна*²,

профессор, д-р техн. наук, ст. науч. сотр.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

^{1,2} Россия, Санкт-Петербург,

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

¹ huyenlevan120193@gmail.com, ² chern_lv@spbstu.ru

Аннотация. Данная работа посвящена вопросам, связанным с решением некорректных обратных задач при приближенных исходных данных. Цель работы – разработка метода определения значений параметра регуляризации при решении некорректных обратных задач методом регуляризации Тихонова. Проанализированы метод регуляризации Тихонова и метод выбора квазиоптимальных значений параметра регуляризации. Разработан метод определения значений параметра регуляризации. В качестве численного примера решена обратная задача восстановления параметров математической модели процесса нефтепереработки. В результате расчетов найдены приближенные значения параметров математической модели, которые можно использовать для моделирования процесса нефтепереработки и анализа взаимодействия веществ.

Ключевые слова: некорректная обратная задача, восстановление параметров, математическая модель, метод регуляризации Тихонова, параметр регуляризации.

*Le Van-Huyen*¹,

Postgraduate Student;

*Liudmila V. Chernenkaya*²,

Professor, Doctor of Technical Science

METHOD FOR DETERMINING THE VALUES OF THE REGULARIZATION PARAMETER WHEN SOLVING ILL-POSED INVERSE PROBLEMS

^{1,2} Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia,

¹ huyenlevan120193@gmail.com, ² chern_lv@spbstu.ru

Abstract. This work is devoted to issues related to the solution of ill-posed inverse problems with approximate initial data. The purpose of the work is to develop a method for determining the values of the regularization parameter when solving ill-posed inverse problems using the Tikhonov regularization method. The Tikhonov regularization method and the method for selecting quasi-optimal values of the regularization parameter are analyzed. A

method for determining the values of the regularization parameter has been developed. As a numerical example, the inverse problem of restoring the parameters of a mathematical model of the oil refining process was solved. As a result of calculations, approximate values of the parameters of the mathematical model were found, which can be used to simulate the oil refining process and analyze the interaction of substances.

Keywords: ill-posed inverse problem, parameter recovery, mathematical model, Tikhonov regularization method, regularization parameter.

Введение

Математическое моделирование давно используется для изучения изменения поведения объектов/процессов в динамических системах, а также взаимодействия между ними. Определение значений параметров играет важную роль в возможности применения математической модели к решению практических задач. Один из эффективных способов определения значений параметров математической модели основан на теории решения некорректных обратных задач. Задача нахождения значений параметров математической модели на основе заданной информации о поведении объектов/процессов динамических систем называется коэффициентной обратной задачей [4].

При решении некорректных обратных задач часто возникают проблемы, связанные с существованием, единственностью и устойчивостью решения. При малом изменении исходных данных обратные задачи могут не иметь решения, могут иметь более одного решения и их решение может сильно меняться. Все эти проблемы приводят к тому, что обратные задачи теряют математический смысл и становятся неприменимыми на практике. Метод регуляризации Тихонова считается одним из наиболее широко используемых методов решения большинства некорректных обратных задач. Трудность использования этого метода связана с определением значения параметра регуляризации. Существует несколько способов определения значения параметра регуляризации, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки [1, 3–5, 18]. Применение этих способов во многом зависит от конкретной обратной задачи. В данной работе представлен разработанный метод определения значений параметра регуляризации путем улучшения метода выбора квазиоптимального значения параметра регуляризации.

1. Обратная задача восстановления параметров математической модели динамических систем

Рассмотрена математическая модель в виде системы дифференциальных уравнений (далее – *математическая модель*) [7–13, 19, 20]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t), \\ \dots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t), \end{cases} \quad (1)$$

где a_{ij} – параметры математической модели; $x_i(t)$ – неизвестные функции, зависящие от времени t ; $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Предположим, что в момент времени $t = 0$: $x_1(t)_{t=0} = x_1(0)$, $x_2(t)_{t=0} = x_2(0)$, ..., $x_n(t)_{t=0} = x_n(0)$. В рамках математической модели (1) сформированы две задачи.

Прямая задача. По заданным значениям параметров $a_{ij} = a_{ij}^0$, где $i, j = 1, 2, \dots, n$ и значениям $x_1(0)$, $x_2(0)$, ..., $x_n(0)$, определить неизвестные функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$.

Обратная задача. По заданным значениям $\tilde{x}_1(t)$, $\tilde{x}_2(t)$, ..., $\tilde{x}_n(t)$, являющимся измеренными данными функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ в моменты времени t_k , где $k = 1, 2, \dots, m$, определить значения параметров a_{ij}^0 , где $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Для решения поставленной обратной задачи использована методика, разработанная в [13].

Система уравнений (1) преобразована к более простому виду – системе алгебраических уравнений в **формальном** виде:

$$\begin{cases} x_1(t)a_{11} + x_2(t)a_{12} + \dots + x_n(t)a_{1n} = \frac{x_1(t+h) - x_1(t-h)}{2h} + o(h^3), \\ x_1(t)a_{21} + x_2(t)a_{22} + \dots + x_n(t)a_{2n} = \frac{x_2(t+h) - x_2(t-h)}{2h} + o(h^3), \\ \dots \\ x_1(t)a_{n1} + x_2(t)a_{n2} + \dots + x_n(t)a_{nn} = \frac{x_n(t+h) - x_n(t-h)}{2h} + o(h^3), \end{cases} \quad (2)$$

относительно параметров a_{ij} , где $i, j = 1, 2, \dots, n$; h – малое положительное число, такое, что $o(h^3)$ можно пренебречь.

Можно преобразовать систему (2) к виду: $\mathbf{X}\mathbf{K} = \mathbf{B}$, где $\mathbf{X}$ – матрица с элементами $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$; $\mathbf{K}$ – вектор с элементами a_{ij} ; $\mathbf{B}$ – вектор свободных членов.

Сформирована **условно точная** система уравнений

$$\mathbf{X}_0\mathbf{K} = \mathbf{B}_0,$$

где $\mathbf{X}_0$ – матрица с элементами $x_1^0(t_k)$, $x_2^0(t_k)$, ..., $x_n^0(t_k)$, которые являются условно точными значениями функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ в моменты времени t_k , $k = 1, 2, \dots, m$; $\mathbf{B}_0$ – вектор свободных членов с элементами $x_1^0(t_k \pm h)$, $x_2^0(t_k \pm h)$, ..., $x_n^0(t_k \pm h)$ – условно точные значения функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ в моменты времени $t_k \pm h$, $k = 1, 2, \dots, m$. Рассмотрим условие, при котором значения $x_1(t_k)$, $x_2(t_k)$, ..., $x_n(t_k)$, $x_1(t \pm h)$, $x_2(t \pm h)$, ..., $x_n(t \pm h)$ считаются «идеальными», т.е. не содержат никаких погрешностей. Решение системы уравнений $\mathbf{X}_0\mathbf{K} = \mathbf{B}_0$ обозначается вектором $\mathbf{K}^0$ и называется условно точным решением.

Сформирована **приближенная** система уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t)a_{11} + \tilde{x}_2(t)a_{12} + \dots + \tilde{x}_n(t)a_{1n} = \frac{\tilde{x}_1(t+h) - \tilde{x}_1(t-h)}{2h}, \\ \tilde{x}_1(t)a_{21} + \tilde{x}_2(t)a_{22} + \dots + \tilde{x}_n(t)a_{2n} = \frac{\tilde{x}_2(t+h) - \tilde{x}_2(t-h)}{2h}, \\ \dots \\ \tilde{x}_1(t)a_{n1} + \tilde{x}_2(t)a_{n2} + \dots + \tilde{x}_n(t)a_{nn} = \frac{\tilde{x}_n(t+h) - \tilde{x}_n(t-h)}{2h}. \end{cases} \quad (3)$$

Систему уравнений (3) можно преобразовать к виду:

$$X_\eta K = B_\delta,$$

где X_η и B_δ – приближения к матрице X и вектору B по отношениям: $\|X_\eta - X_0\| \leq \eta$, $\|B_\delta - B_0\| \leq \delta$, η, δ – маленькие положительные числа.

Сформирована задача минимизации функционала:

$$M(K) = \|X_\eta K - B_\delta\|^2 + \alpha \|K\|^2 \rightarrow \min_{\alpha} \min_K. \quad (4)$$

Из решения задачи (4) построена система уравнений Тихонова:

$$(X_\eta^* X_\eta + \alpha E)K = X_\eta^* B_\delta, \quad (5)$$

где X_η^* – сопряженная матрица к X_η ; α – параметр регуляризации.

Решение системы уравнений (5) имеет вид

$$K^\alpha = (X_\eta^* X_\eta + \alpha E)^{-1} X_\eta^* B_\delta$$

и называется регуляризованным решением. В работах [1, 3–5, 18] было доказано, что при каждом фиксированном значении α решение K^α единственно и непрерывно зависит от исходных данных $\{X_\eta, B_\delta\}$. Далее необходимо найти значение параметра регуляризации так, чтобы регуляризованное решение K^α аппроксимировало условно точное решение K^0 .

2. Разработка метода определения значений параметра регуляризации

На практике трудно задать максимальные погрешности η, δ исходных данных. Рассмотрим метод выбора квазиоптимальных значений параметра регуляризации [6, 7, 14, 15, 17]. В общем случае, когда задан некоторый пробный элемент, вместо задачи (4) решена задача минимизации функционала:

$$M(K) = \|X_\eta K - B_\delta\|^2 + \alpha \|K - K^*\|^2 \rightarrow \min_{\alpha} \min_K, \quad (6)$$

где K^* – начальное приближение (матожидание, прогноз) к K^0 .

Система уравнений Тихонова имеет вид:

$$(X_\eta^* X_\eta + \alpha E)K = X_\eta^* B_\delta + \alpha K^*. \quad (7)$$

Регуляризованное решение имеет вид:

$$K^\alpha = (X_\eta^* X_\eta + \alpha E)^{-1} X_\eta^* B_\delta + \alpha (X_\eta^* X_\eta + \alpha E)^{-1} K^*.$$

Рассмотрим задачу (4). Пусть при некотором значении параметра регуляризации α регуляризованное решение

$$K_1^\alpha = (X_\eta^* X_\eta + \alpha E)^{-1} X_\eta^* B_\delta$$

приближает K^0 , т. е. $\|K_1^\alpha - K^0\| \approx 0$.

Рассмотрим задачу (6) с начальным приближением $K^* \equiv K_1^\alpha$. Пусть также при значении α регуляризованное решение

$$K_2^\alpha = (X_\eta^* X_\eta + \alpha E)^{-1} X_\eta^* B_\delta + \alpha (X_\eta^* X_\eta + \alpha E)^{-1} K_1^\alpha$$

приближает K^0 , т. е. $\|K_2^\alpha - K^0\| \approx 0$. Нетрудно вычислить, что

$$K_2^\alpha - K_1^\alpha = -\alpha \frac{dK_1^\alpha}{d\alpha}.$$

В качестве значения параметра регуляризации выбрано α так, чтобы

$$\chi(\alpha) = \left\| \alpha \frac{dK^\alpha}{d\alpha} \right\| \rightarrow \min_\alpha.$$

Построена последовательность значений параметра регуляризации $\{\alpha_k\}$ с начальным значением α_0 и знаменатель прогрессии q , $0 < q < 1$, где $\alpha_{k+1} = q\alpha_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Имеем, что

$$\chi(\alpha_k) = \left\| -\alpha_k \frac{dK^{\alpha_k}}{d\alpha_k} \right\| \approx \left\| -\alpha_k \frac{K^{\alpha_{k+1}} - K^{\alpha_k}}{\alpha_{k+1} - \alpha_k} \right\| = \frac{1}{1-q} \|K^{\alpha_{k+1}} - K^{\alpha_k}\|,$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. По методу выбора квазиоптимальных значений параметра регуляризации в последовательности $\{\alpha_k\}$ выбраны значения α_k так, чтобы

$$\chi(\alpha_k) = \|K^{\alpha_k} - K^{\alpha_{k-1}}\|$$

достигало минимума.

3. Улучшение метода выбора квазиоптимальных значений параметра регуляризации

В методе выбора квазиоптимальных значений параметра регуляризации не оценено отклонение регуляризованных решений к условному точному решению. Условие

$$\chi(\alpha) = \left\| -\alpha \frac{dK^\alpha}{d\alpha} \right\| \rightarrow \min_\alpha$$

не гарантирует, что отклонение корректирующего решения от условно точного решения будет минимальным.

Имеем, что

$$\|K_2^\alpha - K_1^\alpha\| \leq \|K_2^\alpha - K^0\| + \|K_1^\alpha - K^0\|.$$

Если существует такое значение параметра регуляризации α , что K_1^α и K_2^α являются приближенными регуляризованными решениями, т. е.

$$\|K_1^\alpha - K_0\| \approx 0 \text{ и } \|K_2^\alpha - K_0\| \approx 0,$$

то

$$\|K_2^\alpha - K_1^\alpha\| = \left\| -\alpha \frac{dK_1^\alpha}{d\alpha} \right\| \approx 0.$$

Из последовательности $\{\alpha_k\}$ будут выбраны значения α_k , при которых выполнено условие

$$\chi(\alpha_k) = \frac{1}{1-q} \|K^{\alpha_{k+1}} - K^{\alpha_k}\| \approx 0,$$

а не

$$\chi(\alpha_k) = \frac{1}{1-q} \|K^{\alpha_{k+1}} - K^{\alpha_k}\| \rightarrow \min.$$

Далее оценено отклонение найденных регуляризованных решений к условно точному решению. Имеем, что

$$\|X_\eta K^\alpha - B_\delta\| \leq \eta \|K^\alpha\| + \|X_0\| \|K^\alpha - K^0\| + \delta.$$

Из этого неравенства следует, что, если невязка $\|X_\eta K^\alpha - B_\delta\|$ больше заданного числа в зависимости от конкретной задачи, то хотя бы одно из трех значений $\eta \|K^\alpha\|$, $\|X_0\| \|K^\alpha - K^0\|$ и δ больше этого числа. В рамках данной работы рассмотрен случай, когда погрешность исходных данных мала, т. е. η и δ примерно равны нулю. Поэтому в качестве приближенного регуляризованного решения K^α выбраны элементы, при которых удовлетворяется условие $\|X_\eta K^\alpha - B_\delta\| \approx 0$. Регуляризованные решения K^α , при которых невязка $\|X_\eta K^\alpha - B_\delta\|$ больше заданного числа, могут быть проигнорированы.

4. Численный пример

Рассмотрим процесс нефтепереработки с исходной смесью, состоящей из одного тяжелого углеводорода **C**. Под действием температуры и соударений углеводород **C** распадается на углеводороды **A**, **B** и также превращается в изомер **D** с тем же количеством атомов углерода, что и в исходной молекуле. Вещество **D** также распадается на **A** и **B**, либо обратно превращается в **C**. Пусть продукты реакции **A**, **B** – это более легкие углеводороды, но **B** превращается в **A**, с углеводородом **A** далее никаких превращений не происходит [2, 16].

Математическая модель кинетики реакций каталитического крекинга в рассматриваемом процессе нефтепереработки имеет вид [2, 16]:

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = k_5 y_2(t) + k_1 y_3(t) + k_4 y_4(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = -k_5 y_2(t) + k_1 y_3(t) + k_4 y_4(t), \\ \frac{dy_3(t)}{dt} = -(k_1 + k_2) y_3(t) + k_3 y_4(t), \\ \frac{dy_4(t)}{dt} = k_2 y_3(t) - (k_2 + k_4) y_4(t), \end{cases} \quad (8)$$

где $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, $y_4(t)$ – концентрации веществ **A**, **B**, **C**, **D** в момент времени t .

Прямая задача. По заданным значениям констант $k_1 = 0,02$, $k_2 = 0,001$, $k_3 = 0,001$, $k_4 = 0,02$, $k_5 = 0,1$ и концентрациям веществ **A**, **B**, **C**, **D** в начальный момент времени $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 90$, $y_4(0) = 10$, определить функции $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, $y_4(t)$.

Обратная задача. По измеренным концентрациям веществ в моменты времени t_k , т.е. $\tilde{y}_1(t_k)$, $\tilde{y}_2(t_k)$, $\tilde{y}_3(t_k)$, $\tilde{y}_4(t_k)$, где $k = 1, 2, \dots, N$, найти константы скорости реакций k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , k_5 .

Пусть известны концентрации веществ, измеренные в некоторые моменты времени (см. табл. 1).

Таблица 1

Измеренные концентрации веществ

k	$t_k(c)$	$\tilde{y}_1(t_k)$	$\tilde{y}_2(t_k)$	$\tilde{y}_3(t_k)$	$\tilde{y}_4(t_k)$
1	0	0	0	90	10
2	30	77,76	12,48	48,11	6,77
3	60	132,29	7,47	25,75	4,37
4	90	162,81	4,13	13,79	2,74
5	120	179,59	2,27	7,39	1,68
6	150	188,50	1,24	3,96	1,01
7	180	193,85	0,68	2,13	0,60
8	210	196,63	0,38	1,14	0,36
9	240	198,15	0,21	0,62	0,21
10	270	198,98	0,11	0,33	0,12

Регуляризирующая система уравнений Тихонова имеет вид:

$$\begin{cases} (2559,68 + \alpha)k_1 + 853,23k_2 - 150,31k_3 + 300,62k_4 = 57,66, \\ 853,23k_1 + (1432,43 + \alpha)k_2 - 150,31k_3 - 123,71k_4 = 15,77, \\ -150,31k_1 - 150,31k_2 + (26,60 + \alpha)k_3 = -3,11, \\ 300,62k_1 - 123,71k_2 + (79,81 + \alpha)k_4 = 7,46, \\ (145,72 + \alpha)k_5 = 15,08. \end{cases} \quad (9)$$

Построена последовательность значений параметров регуляризации $\{\alpha_i\}$, где $\alpha_{i+1} = q\alpha_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, 100$, $\alpha_0 = 1$, $q = 0,9$. Решена система

уравнений (9) с каждым значением параметра регуляризации α_i . В результате расчетов найдена последовательность регуляризованных решений $\{K^{\alpha_i}\}$, где $i = 0, 1, 2, \dots, 100$.

Вычислены нормы разности регуляризованных решений на двух соседних итерациях: $\Delta_i = \|K^{\alpha_{i+1}} - K^{\alpha_i}\|$, где $i = 0, 1, \dots, 99$. График норм разности регуляризованных решений на двух соседних итерациях представлена на рисунке 1.

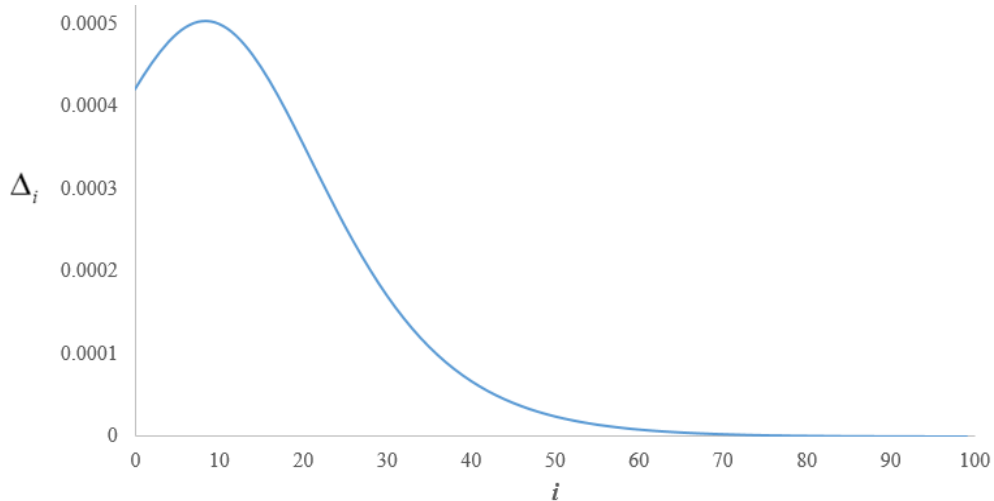


Рис. 1. Нормы разности регуляризованных решений на двух соседних итерациях

На рисунке 2 видно, что Δ_i примерно равны нулю при $i = 0, 1, \dots, 99$. Более того, Δ_i изменяются очень мало при $i = 70, 81, \dots, 99$. Поэтому будем игнорировать решения K^{α_i} , где $i = 70, 81, \dots, 99$. Множество Q возможных приближенных регуляризованных решений состоит из элементов K^{α_i} , где $i = 0, 1, \dots, 70$.

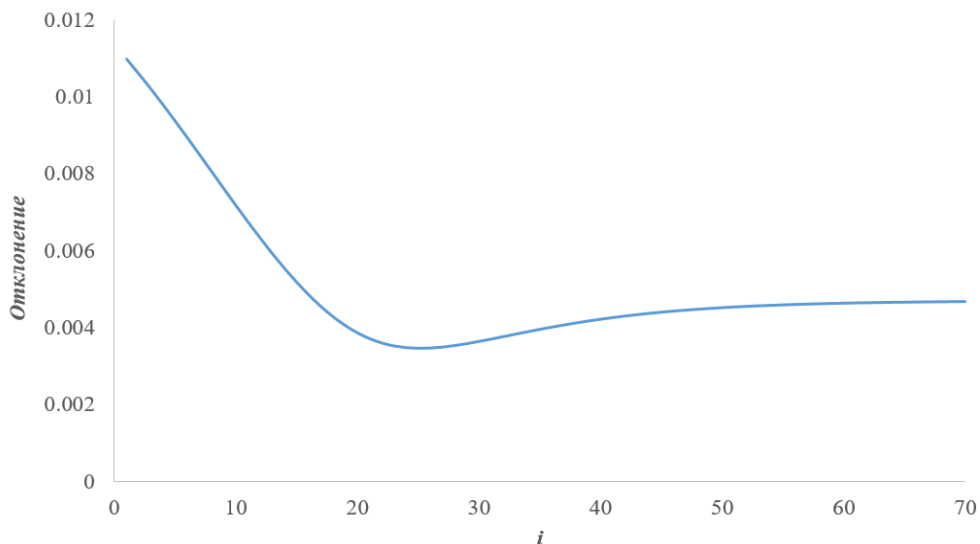


Рис. 2. Отклонение регуляризованных решений к условно точному решению

По методу выбора квазиоптимальных значений параметра регуляризации выбрано значение параметра регуляризации $\alpha = \alpha_{70} = 0,0007$. По

разработанному методу определения параметра регуляризации определены значения параметра регуляризации $\alpha = \alpha_i$, где $i = 0, 1, \dots, 70$. В соответствии со значениями $\alpha = \alpha_i$, где $i = 0, 1, \dots, 70$, найдено множество регуляризованных решений. Вычислено отклонение найденных регуляризованных решений к условно точному решению: $\|K^{\alpha_i} - K^0\|$, где $i = 0, 1, \dots, 70$. График отклонений регуляризованных решений к условно точному решению показан на рисунке 2.

Отклонение регуляризованного решения к условно точному решению равно 0,0047. На рисунке 2 видно, что регуляризованное решение, найденное методом выбора квазиоптимальных значений параметра регуляризации, не является лучшим приближенным решением.

Вычислена невязка двух частей приближенной системы алгебраических уравнений с каждым найденным регуляризованным решением. График невязок двух частей приближенной системы алгебраических уравнений представлен на рисунке 3.

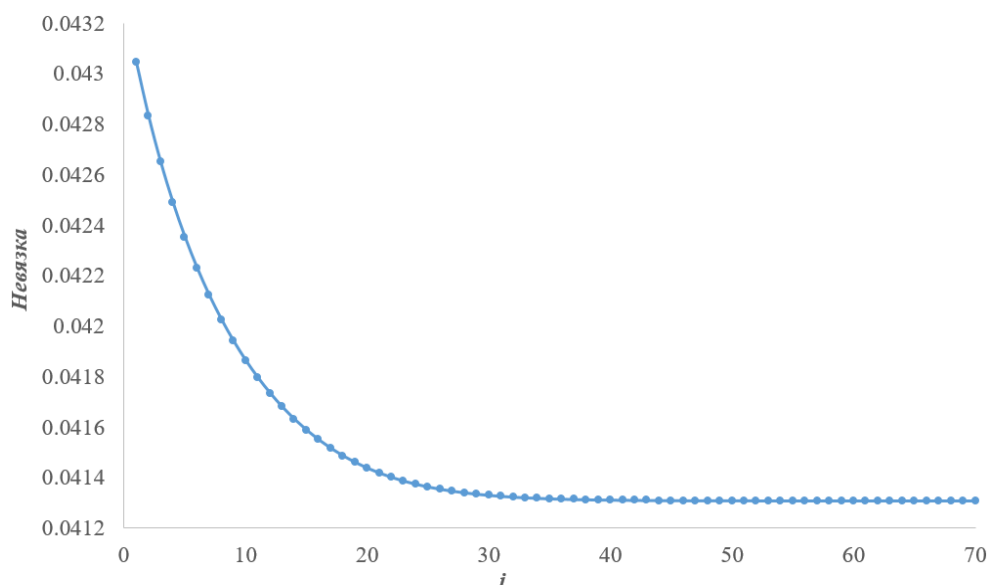


Рис. 3. Невязки двух частей приближенной системы алгебраических уравнений

На рисунке 3 видно, что невязка двух частей приближенной системы алгебраических уравнений примерно равна нулю при регуляризованных решениях K^{α_i} , где $i = 0, 1, \dots, 70$. Итак, в качестве приближенных значений параметров математической модели (1) можно принять значения $k_1^{\alpha_i}$, $k_2^{\alpha_i}$, $k_3^{\alpha_i}$, $k_4^{\alpha_i}$, $k_5^{\alpha_i}$, где $i = 0, 1, \dots, 70$. В дальнейшем будет рассмотрена и решена задача, связанная с выбором из множества регуляризованных решений наилучших значений параметров математической модели для прогнозирования поведения объектов/процессов.

Заключение

В данной работе был разработан метод определения значений параметра регуляризации при решении некорректных обратных задач с

помощью метода регуляризации Тихонова. Разработанный метод позволяет найти множество регуляризованных решений, отклонение которых к условно точному решению примерно равно нулю. Была решена обратная задача восстановления значений параметров в процессе нефтепереработки. Полученные результаты показывают возможность использования разработанного метода в сочетании с методом регуляризации Тихонова при решении некорректных обратных задач. В будущем будет рассмотрена и решена задача нахождения наилучшего решения в этом множестве для моделирования и прогнозирования поведения объектов/процессов.

Список литературы

1. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.
2. Заикин П. В., Лысенкова С. А., Микшина В. С. Аналитическое решение системы дифференциальных уравнений математической модели кинетики процесса нефтепереработки // Вестник кибернетики. – 2018. – № 2. – С. 120–126.
3. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
4. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирский федеральный университет, 2009. – 457 с.
5. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 289 с.
6. Лисковец О. А. Теория и методы решения некорректных задач // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. – 1982. – Т. 20. – С. 116–178.
7. Лэ В. Х. Коэффициентная обратная задача в математической модели кинетики процесса нефтепереработки // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2022. – Т. 18. – № 5. – С. 64–72.
8. Лэ В. Х. Устойчивость динамической системы с приближенными параметрами, найденными методом регуляризации Тихонова // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2022. – № 12. – С. 429–435.
9. Лэ В. Х., Фирсов А. Н. Метод регуляризации Тихонова для решения обратной задачи в математической модели кинетики процесса нефтепереработки // Вестник кибернетики. – 2022. – Т. 48. – № 4. – С. 49–58.
10. Лэ В. Х., Черненькая Л. В. Алгоритм оценки отклонения между регуляризованным и точным решениями в обратных задачах // International Journal of Open Information Technologies. – 2023. – Т. 11. – № 10. – С. 6–13.
11. Лэ В. Х., Черненькая Л. В. Исследование устойчивости регуляризованных решений коэффициентной обратной задачи. Часть 1 // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2023. – № 1. – С. 8–14.
12. Лэ В. Х., Черненькая Л. В. Исследование устойчивости регуляризованных решений коэффициентной обратной задачи. Часть 2 // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2023. – № 1. – С. 239–247.
13. Лэ В. Х., Черненькая Л. В. Методика нахождения приближенного решения для коэффициентной обратной задачи // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2022. – № 10. – С. 274–282.
14. Морозов В. А. Алгоритмические основы методов решения некорректно поставленных задач // Выч. мет. программирование. – 2003. – Т. 4. – № 1. – С. 130–141.
15. Морозов В. А. Методы регуляризации неустойчивых задач. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 216 с.

16. О математическом моделировании каталитического крекинга: монография / В. С. Микшина, В. В. Григоренко, М. В. Архипкина [и др.]. – СПб.: Научные технологии, 2021. – 120 с.
17. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Издательство ЛКИ, 2009. – 480 с.
18. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 285 с.
19. Le Van-Huyen, Chernenkaya L. V. Optimization of the set of regularized solutions in the coefficient inverse problem // 2023 International Conference for Advancement in Technology (ICONAT), Goa, India. – IEEE, 2023. – Pp. 1–6.
20. Le Van-Huyen. Optimization in the method of choosing quasi-optimal values of the regularization parameter // Lecture Notes in Electrical Engineering. – Singapore: Springer, 2023. – Pp. 491–501.