

УДК 517.977.1

doi:10.18720/SPBPU/2/id24-555

*Иванова Елизавета Владимировна*¹,

бакалавр;

*Рябов Геннадий Александрович*²,

ассистент;

*Черненькая Людмила Васильевна*³,

профессор, д-р техн. наук, ст. науч. сотр.

ВЫВОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ВОДОИЗМЕЩАЮЩЕГО СУДНА

^{1,2,3} Россия, Санкт-Петербург,

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

¹ liivnvv@yandex.ru, ² genaryabov@gmail.com, ³ chern_lv@spbstu.ru

Аннотация. Для успешного управления движением судна необходима непрерывная оценка его состояния. Для этих целей используются математические модели маневрирования, которые состоят из двенадцати переменных, характеризующих состояние морского плавательного объекта в любой момент времени. В работе приведен вывод математической модели движения водоизмещающего судна при наличии ветро-волновых возмущений. С учетом принятых допущений получена линеаризованная модель.

Ключевые слова: математическая модель, нелинейная модель, морской плавательный объект, маневрирование, линеаризация, математическое моделирование, управление.

*Elizaveta V. Ivanova*¹,
bachelor;

*Gennady A. Ryabov*²,
Assistant Lecturer;

*Liudmila V. Chernenkaya*³,
Professor, Doctor of Technical Sciences

DERIVATION OF A MATHEMATICAL MODEL OF MOTION OF A DISPLACEMENT VESSEL

^{1,2,3} Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia,

¹ liivnvv@yandex.ru, ² genaryabov@gmail.com, ³ chern_lv@spbstu.ru

Abstract. Continuous assessment of the vessel's condition is necessary for successful control of the vessel's movement. For these purposes, mathematical models of maneuvering are used, which consist of twelve variables characterizing the state of a marine swimming object at any given time. The paper presents the conclusion of a mathematical model of displacement vessel motion in the presence of wind-wave disturbances. Taking into account the accepted assumptions, a linearized model is obtained.

Keywords: mathematical model, nonlinear model, marine swimming object, maneuvering, linearization, mathematical modeling, control.

Введение

Математические модели, используемые для оценки маневренных характеристик судна (устойчивости на курсе, поворотливости) водоизмещающих судов, представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение в горизонтальной плоскости [1].

В настоящее время в литературе представлен целый ряд математических моделей маневрирования (Войткунский, Першиц и др., 1973, 1985 [2], [3]; Басин, 1968 [4]; Афремов, Сергеев, Русецкий, 2016 [5]; Васильев, 1989 [6]; Гофман, 1988 [7]; Соболев, 1963; 1976 [8], [9]; Chislett, 1996 [10]). Основное отличие приведенных математических моделей заключается в способе определения и представления гидродинамических неинерционных (вязкостных) сил и момента. Указанные компоненты определяются либо теоретическим путем [8–10], либо расчетно-экспериментальным способом [2–7] по соотношениям, полученным на основе анализа результатов испытаний в опытовых бассейнах модели заданного судна или судов-прототипов.

Наличие ветро-волновых возмущений приводит к действию на судно аэродинамических и средних волновых сил и момента [2, 3, 5], способных привести к изменению его маневренных характеристик [7]. Интенсивность и номенклатура внешних воздействий зависят от предполагаемых условий эксплуатации судна. В частности, если интенсивность волнения

относительно невелика (например, в районе портов), то можно ограничиться учётом только ветровой нагрузки.

Все модели движения морских плавательных объектов (МПО) делятся на *линейные модели*, *частично линеаризованные модели* и *нелинейные модели*. Однако ни одна из математических моделей не является линейной по всем параметрам: рассматривается линейность по угловой скорости ω и угол дрейфа β .

1. Постановка задачи

1.1. Описание моделируемого объекта

Рассматривается водоизмещающее судно, движущееся передним ходом на глубокой воде со скоростью v – относительная скорость хода или число Фруда по длине $F_n = \frac{U}{\sqrt{g \cdot L}} = 0,26$ где L – длина судна по конструктивную ватерлинию (КВЛ).

Управление курсом судна осуществляется перекладками кормовых рулей, установленных за гребными винтами.

1.2. Вывод математической модели маневрирования судна

Математическая модель маневрирования рассматриваемого судна представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую движение судна в горизонтальной плоскости.

Для составления математической модели используются системы координат, представленные на рисунке 1.

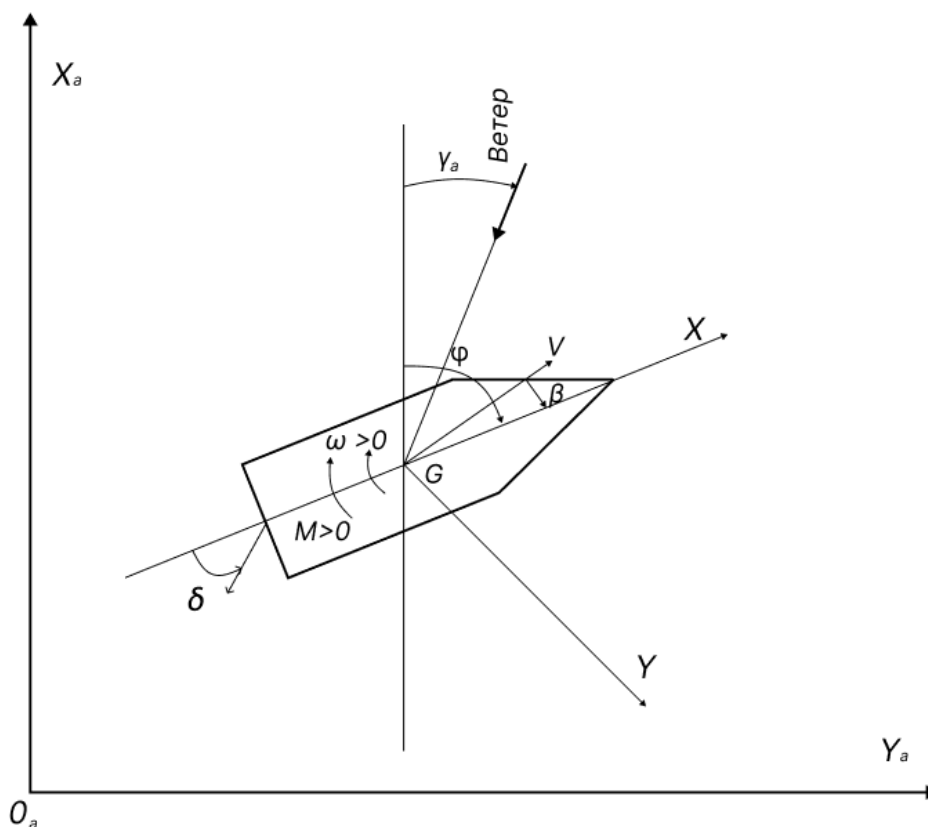


Рис. 1. Системы координат

Связанная с судном система координат $GXYZ$ с началом в центре масс (ЦМ), оси GX и GY находятся в горизонтальной плоскости, ось GX лежит в диаметральной плоскости (ДП) судна и направлена в нос, ось GY – на правый борт, GZ – вертикально вверх. Оси связанной системы координат совпадают с главными осями инерции судна.

В неподвижной система координат $O_a X_a Y_a$ ось $O_a X_a$ направлена на север (совпадает с заданным направлением движения), ось $O_a Y_a$ – на восток.

В качестве внешних возмущений обычно рассматривают аэродинамические силы и момент, обусловленные действием ветра (скорость ветра считается постоянной) на надводную часть корпуса.

Движение судна определяется следующими кинематическими параметрами:

- проекции скорости возмущённого движения v_x, v_y на оси связанной с судном системы координат;
- угол рыскания φ (угол между продольной осью модели и заданным в неподвижной системе координат направлением движения);
- угловая скорость рыскания ω относительно вертикальной оси;
- координаты траектории центра масс судна x_{ag}, y_{ag} в неподвижной системе координат.

В начальный момент времени ($t = 0$) судно движется вдоль оси GX со скоростью v_0 , угол дрейфа (угол между направлением скорости и осью GX) $\beta = 0$, угол $\varphi = 0$ (судно находится на заданном курсе) и угловая скорость рыскания $\omega = 0$.

При составлении математической модели маневрирования были приняты следующие допущения [2, 3, 5, 7].

1) Характер движения судна определяется действующими на него силами и моментами, которые условно делятся на 2 категории:

1.1) инерционные компоненты, вызванные инерцией массы корпуса судна и присоединённой массой воды – продольная сила F_{xIN} и боковая сила F_{yIN} и момент M_{IN} относительно вертикальной оси, проходящей через ЦМ;

1.2) неинерционные (вихревые, связанные с образованием волн при движении судна) компоненты, обусловленные вязкостью воды – F_{xH}, F_{yH} и M_H .

2) При расчёте инерционных компонент предполагается:

2.1) оси связанной системы координат совпадают с главными осями инерции судна;

2.2) судно симметрично относительно диаметральной плоскости (ДП);

2.3) пренебрегаем асимметрией судна относительно поперечной вертикальной плоскости (GYZ), проходящей через начало координат ($m_{26} = 0$);

2.4) присоединённые массы представлены в виде:

2.4.1) присоединённая масса при движении в продольном направлении $m_{11} = k_{11} * m$;

2.4.2) присоединённая масса при движении в боковом направлении $m_{22} = k_{22} * m$;

2.4.3) присоединённый момент инерции при вращении относительно вертикальной оси $m_{66} = k_{66} * I_z$;

2.4.4) коэффициенты присоединённых масс k_{11} , k_{22} , k_{66} постоянны и определяются исключительно формой корпуса (пренебрегаем влиянием свободной поверхности).

При принятых допущениях инерционные силы и момент определяются соотношениями:

$$F_{xIN} = -m(1 + k_{11}) * \frac{dv_x}{dt} + m(1 + k_{22}) * v_y * \omega + (m_{26} * \omega^2), \quad (1)$$

$$F_{yIN} = -m(1 + k_{22}) * \frac{dv_y}{dt} - m(1 + k_{11}) * v_x * \omega - \left(m_{26} * \frac{d\omega}{dt}\right), \quad (2)$$

$$M_{IN} = -I_z(1 + k_{66}) * \frac{d\omega}{dt} - m(k_{22} - k_{11}) * U_x * v_y - (m_{26} * \frac{dv_y}{dt} + m_{26} * U_x * \omega). \quad (3)$$

Пренебрегаем асимметрией судна относительно поперечной вертикальной плоскости (GYZ), проходящей через начало координат ($m_{26} = 0$):

$$F_{xIN} = -m(1 + k_{11}) * \frac{dv_x}{dt} + m(1 + k_{22}) * v_y * \omega, \quad (4)$$

$$F_{yIN} = -m(1 + k_{22}) * \frac{dv_y}{dt} - m(1 + k_{11}) * v_x * \omega, \quad (5)$$

$$M_{IN} = -I_z(1 + k_{66}) * \frac{d\omega}{dt} - m(k_{22} - k_{11}) * U_x * v_y. \quad (6)$$

3) Силы и моменты вихревой природы (гидродинамические силы F_{xH} , F_{yH} и момент M_H относительно центра масс) являются функцией угла дрейфа β и угловой скоростью ω .

Наиболее распространённый теоретический метод определения гидродинамических характеристик основан на циркуляционно-отрывной теории, разработанной К. К. Федяевским и Г. В. Соболевым [9].

Для рассматриваемого судна гидродинамические характеристики определяются по соотношениям (2), (3) и (5). Приведённые в справочниках формулы для расчёта гидродинамических характеристик получены на основе анализа результатов серийных модельных испытаний в опытных бассейнах и содержат компоненты инерционных сил, обусловленных угловой скоростью ω ($\Delta F_x = m * k_{22} * v_y * \omega$, $\Delta F_y = -m * k_{11} * U_x * \omega$) и момента, связанного с наличием угла дрейфа ($\Delta M = -m(k_{22} - k_{11}) * U_x * v_y$), поэтому отдельными компонентами в уравнения движения указанные компоненты не входят.

Гидродинамические силы подразделяются на позиционные и демпфирующие:

$$F_{xH} = F_{x\beta} + F_{x\omega}, \quad (7)$$

$$F_{yH} = F_{y\beta} + F_{y\omega}, \quad (8)$$

$$M_H = M_\beta + M_\omega, \quad (9)$$

1) позиционные компоненты $F_{x\beta}(\beta)$, $F_{y\beta}(\beta)$ и $M_\beta(\beta)$ возникают при движениях судна прямым курсом с углом дрейфа β ;

2) демпфирующие компоненты $F_{x\omega}(\omega)$, $F_{y\omega}(\omega)$ и $M_\omega(\omega)$ обусловлены вращением судна вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω .

При рассмотрении управляемого движения к перечисленным выше силам и моментам необходимо добавить силы и моменты, обусловленные перекладками органов управления (кормовыми рулями). С учетом принятых допущениях система управляемого бокового движения судна примет вид (10) и (11):

$$m * (1 + k_{11}) * \frac{dv_x}{dt} = m * v_y * \omega + F_{x\beta} + F_{x\omega} + F_{x\delta}, \quad (10)$$

$$m * (1 + k_{22}) * \frac{dv_y}{dt} = -m * v_x * \omega + F_{y\beta} + F_{y\omega} + F_{y\delta}, \quad (11)$$

$$I_z * (1 + k_{66}) * \frac{d\omega}{dt} = M_\beta + M_\omega + M_\delta. \quad (12)$$

при $t = 0$, $v_x = v_0$, $v_y = 0$, $\omega = 0$.

2. Линеаризация математической модели маневрирования

2.1. Дополнение к математической модели движения водоизмещающего судна

При решении различных задач (например, при проводке судна по заданной траектории $y_{ag} = f(x_{ag})$ или при движении с заданным курсом) система уравнений (10)–(12) дополняется следующими уравнениями, определяющие курс судна (13) и координаты траектории в неподвижной системе координат (14) и (15):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad (13)$$

$$\frac{dx_{ag}}{dt} = U_x * \cos \varphi - v_x * \sin \varphi, \quad (14)$$

$$\frac{dy_{ag}}{dt} = v_y * \cos \varphi + v_x * \sin \varphi. \quad (15)$$

2.2. Линеаризация модели движения морского плавательного объекта

При линеаризации системы уравнений (10)–(12) полагаем: β , ω – малые первого порядка. Следовательно,

$$v_x = v_0 * \cos \beta \approx v_0 * \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) \approx v_0 + 0^2,$$

$$v_y = -v_0 * \sin \beta \approx -v_0 * \left(\beta - \frac{\beta^3}{6}\right) \approx -v_0 * \beta + 0^3.$$

Рассмотрим порядок малости членов, входящих в уравнение (10):

$$m * v_y * \omega \approx -m * v_0 * \beta * \omega,$$

т. е. малая второго порядка

Компоненты сил на корпусе $F_{x\beta}, F_{x\omega}$ – чётные функции β и ω , так как сопротивление корпуса при движении с углом дрейфа и угловой скоростью должно быть больше, чем при движении на прямом курсе ($\beta = 0, \omega = 0$) независимо от направления движения. Компонента $F_{x\delta}$ – четная функция угла перекадки руля.

Таким образом, $F_{x\beta}, F_{x\omega}, F_{x\delta}$ – малые второго порядка ($\sim \beta^2, \omega^2, \delta^2$), следовательно, $\frac{dv_x}{dt}$ – тоже малая второго порядка. С точностью до малых 1 порядка $\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$.

Рассмотрим уравнение (11):

$$m * (1 + k_{22}) * \frac{dv_y}{dt} = -v_0 * m * (1 + k_{22}) * \frac{d\beta}{dt},$$

т. е. малая первого порядка.

С точностью до малых первого порядка компонента

$$-m * U_x * \omega \approx -m * v_0 * \omega.$$

Компоненты $F_{y\beta}, F_{y\omega}$ – нечётные функции β и ω (должны содержать только нечётные степени параметров). Компонента $F_{y\delta}$ – нечетная функция угла перекадки руля.

С точностью до малых первого порядка:

$$F_{y\beta} = C_y^\beta * G_1 * \beta = d_{y\beta} * v_0^2 * \beta, \quad (16)$$

$$F_{y\omega} = C_y^{\bar{\omega}} * G_1 * \bar{\omega} = C_y^{\bar{\omega}} * G_1 * \frac{L}{v_0} * \omega = d_{y\omega} * v_0 * \omega, \quad (17)$$

где $C_y^\beta, C_y^{\bar{\omega}}$ – производные коэффициента боковой силы по углу дрейфа β и безразмерной угловой скорости рыскания $\bar{\omega} = L/v_0 * \omega$. В соответствии с принятой системой координат $C_y^\beta > 0$ производная $C_y^{\bar{\omega}}$ может быть как положительной, так и отрицательной величиной:

$$G_1 = \frac{\rho * v_0^2}{2} * L * T, \quad (18)$$

где L, T – длина по КВЛ, осадка на миделе соответственно; $\rho = 1,025 \text{ т/м}^3$ – удельная плотность морской воды.

Пренебрегая влиянием на эффективность кормовых рулей параметров маневрирования, для расчета линеаризованной (с точностью до малых 1 порядка) суммарной боковой силы $F_{y\delta}$ на двух кормовых рулях используем соотношение [5]:

$$\begin{aligned}
F_{y\delta} &= 2 * C_{y\delta}^{\delta} * \left(T_{E1} + \frac{\rho * v_0^2}{2} * A_{R1} \right) * \delta = \\
&= 2 * C_{y\delta}^{\delta} * \frac{\rho * v_0^2}{2} * A_{b1} (C_{Te} + \bar{A}_{R1}) * \delta = d_{y\delta} * v_0^2 * \delta,
\end{aligned} \tag{19}$$

где $C_{y\delta}^{\delta}$ – производная коэффициента боковой силы руля по углу перекадки (в соответствии с принятой системой координат $C_{y\delta}^{\delta} < 0$); T_{E1} , A_{R1} – тяга одного винта, соответствующая движению прямым курсом с заданной скоростью и не переложённым рулём, и площадь одного руля соответственно;

$$C_{Te} = \frac{T_{E1}}{\frac{\rho * v_0^2}{2} * \frac{\pi * D_b^2}{4}}$$

является коэффициентом нагрузки винта по тяге;

$$A_{b1} = \frac{\pi * D_b^2}{4}$$

является площадью винта диска;

$$\bar{A}_{R1} = \frac{A_{R1}}{A_{b1}}$$

является относительной площадью руля (отнесённая к площади диска винта).

Производная $C_{y\delta}^{\delta}$ в соответствии с [5] рассчитывается по формуле:

$$C_{y\delta}^{\delta} = -0,64 * \frac{2\pi}{1+2/\lambda_R} * (1 - k_u), \tag{20}$$

где λ_R – удлинение руля.

Коэффициент k_u зависит от режима работы гребного винта (обобщённого коэффициента нагрузки винта по упору $\bar{C}_{Pe}$) и взаимного расположения руля и винта.

Обобщённый коэффициент нагрузки винта по упору $\bar{C}_{Pe}$ определяется соотношением:

$$\bar{C}_{Pe} = \frac{1}{\sqrt{1+C_{Pe}}}, \tag{21}$$

где C_{Pe} – традиционный коэффициент нагрузки винта по упору:

$$C_{Pe} = \frac{P_{E1}}{\frac{\rho * v_0^2}{2} * \frac{\pi * D_b^2}{4}}. \tag{22}$$

Преобразуем уравнение (12):

$$I_z * (1 + k_{66}) * \frac{d\omega}{dt},$$

т. е. малая первого порядка.

Компоненты M_{β} , M_{ω} – нечётные функции β и ω (должны содержать только нечётные степени параметров). Компонента M_{δ} – нечетная функция δ .

С точностью до малых первого порядка:

$$M_\beta = C_m^\beta * G_1 * L * \beta = d_{m\beta} * v_0^2 * \beta, \quad (23)$$

$$M_\omega = C_m^{\bar{\omega}} * G_1 * L * \bar{\omega} = C_y^{\bar{\omega}} * \frac{L}{v_0} * G_1 * L * \omega = d_{m\omega} * v_0 * \omega, \quad (24)$$

$$M_\delta = 2 * \bar{x}_R * F_{y\delta} * L * \delta = d_{m\delta} * v_0^2 * \delta, \quad (25)$$

где C_m^β , $C_m^{\bar{\omega}}$ – производные коэффициента момента рыскания по углу дрейфа β и безразмерной угловой скорости рыскания $\bar{\omega} = L/v_0 * \omega$. В соответствии с принятой системой координат $C_m^{\bar{\omega}} < 0$ производная C_m^β может быть как положительной, так и отрицательной величиной (если $C_m^\beta < 0$, то судно статистически устойчиво на курсе для большинства современных судов $C_m^\beta < 0$); $\bar{x}_R = x_R/L$ – относительная абсцисса оси баллера руля, отчитываемая от центра масс судна.

Таким образом, линеаризованная система уравнений управляемого бокового движения имеет вид:

$$\begin{cases} -v_0 * m * (1 + k_{22}) * \frac{d\beta}{dt} = -m * v_0 * \omega + F_{y\beta} + F_{y\omega} + F_{y\delta}, \\ I_z * (1 + k_{66}) * \frac{d\omega}{dt} = M_\beta + M_\omega + M_\delta, \end{cases} \quad (26a)$$

или (при наличии внешних возмущений F_{yVN}, M_{VN})

$$\begin{cases} \frac{d\beta}{dt} + a_{y\beta} * \beta + a_{y\omega} * \omega = a_{y\delta} * \delta + a_F * F_{yVN}, \\ \frac{d\omega}{dt} + a_{m\beta} * \beta + a_{m\omega} * \omega = a_{m\delta} * \delta + a_M * M_{VN}. \end{cases} \quad (26б)$$

В таблице 1 приведены обозначения, названия и единицы измерения в международной системе измерения (СИ) компонент, входящих в линеаризованные системы (26а) и (26б).

Таблица 1

Описание компонент, входящих в линеаризованную систему

Обозначение	Название	Единица измерения
φ	Угол рысканья	радианы
ω	Угловая скорость рысканья	радианы/секунда
β	Угол дрейфа	градусы
δ	Угол перекладки руля	градусы

В зависимости от решаемой задачи системы (26а) и (26б) дополняются уравнениями (13) или (14) и (15).

Коэффициенты $a_{y\beta}$, $a_{y\omega}$, $a_{y\delta}$, $a_{m\beta}$, $a_{m\omega}$, $a_{m\delta}$ рассчитываются по формулам:

$$a_{y\beta} = \frac{C_y^{\beta} \cdot \rho / 2 \cdot L \cdot T}{m \cdot (1 + k_{22})} \cdot v_0, \quad (27)$$

$$a_{y\omega} = \frac{(C_y^{\bar{\omega}} \cdot \rho / 2 \cdot L^2 \cdot T - m)}{m \cdot (1 + k_{22})} = \frac{C_{y1}^{\bar{\omega}} \cdot \rho / 2 \cdot L^2 \cdot T}{m \cdot (1 + k_{22})}, \quad (28)$$

$$a_{y\delta} = - \frac{2 \cdot \rho / 2 \cdot A_{b1} \cdot (C_{Te} + \bar{A}_{R1}) \cdot C_y^{\delta}}{m \cdot (1 + k_{22})} \cdot v_0, \quad (29)$$

$$a_{m\beta} = - \frac{C_m^{\beta} \cdot \rho / 2 \cdot L^2 \cdot T}{I_z \cdot (1 + k_{66})} \cdot v_0^2, \quad (30)$$

$$a_{m\omega} = - \frac{C_m^{\bar{\omega}} \cdot \rho / 2 \cdot L^3 \cdot T}{I_z \cdot (1 + k_{66})} \cdot v_0, \quad (31)$$

$$a_{m\delta} = \frac{2 \cdot \rho / 2 \cdot A_{b1} \cdot (C_{Te} + \bar{A}_{R1}) \cdot \bar{x}_R \cdot L \cdot C_y^{\delta}}{I_z \cdot (1 + k_{66})} \cdot v_0^2. \quad (32)$$

Коэффициенты a_F, a_M при внешних возмущениях рассчитываются по формулам:

$$a_F = - \frac{1}{v_0 \cdot m \cdot (1 + k_{22})}, \quad (33)$$

$$a_M = \frac{1}{I_z \cdot (1 + k_{66})}, \quad (34)$$

где m, I_z – масса и момент инерции массы относительно вертикальной оси; k_{22}, k_{66} – коэффициенты присоединённой массы (при движении вдоль оси GY) и присоединённого момента инерции (при вращении вокруг вертикальной оси).

$$C_{y1}^{\bar{\omega}} = \left(C_y^{\bar{\omega}} - 2 \cdot \frac{\nabla}{L^2 \cdot T} \right)$$

является суммарной (корпус и компонента центробежной силы) производной боковой силы по безразмерной угловой скорости $\bar{\omega}$ ($C_{y1}^{\bar{\omega}} < 0$, т. к. $|C_y^{\bar{\omega}}|$ существенно меньше величины $2 \cdot \nabla / L^2 \cdot T$).

2.3. Параметры рассматриваемого судна

Длина по КВЛ (конструктивную ватерлинию) $L = 90$ м, ширина $B = 16$ м, осадка на миделе $T = 4,2$ м, объёмное водоизмещение $\nabla = 3326,4$ м³.

Масса судна $m = 3409,56$ т, момент инерции массы относительно вертикальной оси $I_z = 1,576 \cdot 10^6$ тм², коэффициенты присоединённых масс $k_{11} = 0,029, k_{22} = 0,478, k_{66} = 0,376$.

Площадь и удлинение руля $A_{R1} = 4,8$ м², $\lambda_R = 2,0$, абсцисса оси баллера $\bar{x}_R = -0,472$, удлинение $\lambda_{RD} = 1,69$ и площадь $A_{RD1} = 3,78$ м² части руля, расположенной в струе гребного винта.

Диаметр гребного винта $D_b = 3,0$ м.

Коэффициент нагрузки винта по тяге $C_{Te} = 0,802$, обобщенный коэффициент нагрузки винта по упору $\bar{C}_{Pe} = 0,711$.

Гидродинамические коэффициенты:

$$C_y^\beta = 0,400, C_y^{\bar{\omega}} = 0,030, C_m^\beta = 0,09367, C_m^{\bar{\omega}} = -0,110, \\ C_{y\delta}^\delta = -1,857, C_{y1}^{\bar{\omega}} = -0,165.$$

Значения коэффициентов линеаризованных уравнений бокового управляемого движения (23) и (24) для заданных скоростей хода приведены в таблице 2.

Таблица 2

Результаты расчётов коэффициентов для различных значений скорости v_0

v_0 , узлы (М/с)	$a_{y\beta}$	$a_{y\omega}$	$a_{y\delta}$	$a_{m\beta}$	$a_{m\omega}$	$a_{m\delta}$
8 (4,11)	0,0632	-0,5710	0,0163	-0,01273	0,3271	0,0066
12 (6,17)	0,0949	-0,5728	0,0244	-0,0287	0,4911	0,0149
15 (7,71)	0,1186	-0,5728	0,0305	-0,0448	0,6136	0,0232

Коэффициенты a_F , a_M при внешних возмущениях, рассчитываемые по формулам (33), (34):

$$a_F = -1,98 * 10^{-4} * \frac{1}{v_0}, \\ a_M = 4,611 * 10^{-7}.$$

Таким образом, линеаризованная система уравнений управляемого бокового движения для синтеза управления при стабилизации курса при $v_0 = 8$ узлов имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} = -0,327 * \omega + 0,0127 * \beta + 0,0066 * \delta, \\ \frac{d\beta}{dt} = 0,573 * \omega - 0,0532 * \beta + 0,0163 * \delta, \end{cases} \quad (35)$$

или (при наличии внешних возмущений F_{yVN} , M_{VN})

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} = -0,3271 * \omega + 0,0127 * \beta + 0,0066 * \delta + 4,611 * 10^{-7} M_{VN}, \\ \frac{d\beta}{dt} = 0,5710 * \omega - 0,0632 * \beta + 0,0163 * \delta - \frac{1,980 * 10^{-4}}{4,11} F_{yVN}. \end{cases} \quad (36)$$

Задача исследования переходных процессов формулируется как задача Коши: найти решение системы при заданных начальных условиях и заданных входных воздействиях $u(t)$, которые могут иметь смысл управлений или внешних возмущений:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \\ x(0) &= x^0, \end{aligned}$$

где A, B, C, D – матрицы с постоянными коэффициентами, имеющие следующие размерности: $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{m \times n}$, $D \in R^{m \times m}$; векторы $u \in R^m$ – вход системы, $y \in R^m$ – выход системы, $x \in R^n$ – вектор состояний, $x(0)$ – начальное состояние.

Полученные матрицы A, B, C, D и вектора x и u системы (35):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,327 & 0,0127 \\ 0 & 0,573 & -0,0532 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,0066 \\ 0,0163 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x = (\varphi \quad \omega \quad \beta)^T, u = (\delta).$$

Полученные матрицы A, B, C, D и вектора x и u системы (36):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,327 & 0,0127 \\ 0 & 0,573 & -0,0532 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,0066 & 0,0000004611 & 0 \\ 0,0163 & 0 & -0,00004828 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x = (\varphi \quad \omega \quad \beta)^T, u = (\delta \quad M_{VN} \quad F_{yVN})^T.$$

Матрица управляемости системы (35):

$$S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0,0066 & -0,0019 \\ 0,0066 & -0,0019 & 0,0007 \\ 0,0163 & 0,0027 & -0,0013 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $S_y = 3 = n$, следовательно, система управляема согласно критерию Калмана.

Заключение

В работе проведён обзор существующих математических моделей движения, после чего была выведена нелинейная модель маневрирования морского подвижного объекта. Рассмотрены дополнения к полученной модели, выбор дополнительных уравнений определяется решаемой задачей. Далее была проведена линеаризация модели и приведены формулы для расчёта коэффициентов. В итоге была получена линейная модель движения водоизмещающего судна в векторно-матричной форме, которая может быть использована для синтеза систем управления в реальных задачах.

Список литературы

1. Юдин Ю. И., Сотников И. И. Математические модели плоскопараллельного движения судна. Классификация и критический анализ // Вестник МГТУ. – 2006. – Т. 9. – № 2.
2. Справочник по теории корабля: в 3-х томах. – Том 3. Управляемость водоизмещающих судов. Гидродинамика судов с динамическими принципами поддержания / Под ред. Я. И. Войткунского. – Л.: Судостроение, 1985. – 544 с.
3. Войткунский Я. И., Першиц Р. Я., Титов И. А. Справочник по теории корабля. – Л.: Судостроение, 1973. – 511 с.

4. Басин А. М. Ходкость и управляемость судов. – М.: Транспорт, 1968. – 255 с.
5. Афремов А. Ш., Мартиросов Г. Г., Немзер А. И., Русецкий А. А., Сергеев В. В., Шевцов С. П., Яковлев А. Ю. Средства активного управления судами. – СПб.: Крыловский государственный научный центр, 2016. – 182 с.
6. Васильев А. В. Управляемость судов. – Л.: Судостроение, 1989. – 327 с.
7. Гофман А. Д. Теория и расчет поворотливости судов внутреннего плавания. – Л.: Судостроение, 1971. – 255 с.
8. Федяевский К.К., Соболев Г.В. Управляемость корабля. – Л.: Судостроение, 1963. – 373 с.
9. Соболев Г. В. Управляемость корабля и автоматизация судовождения. – Л.: Судостроение, 1976. – 477 с.
10. Chislett M. S. A generalized math model for manoeuvring // Proceedings of the International Conference “Marine Simulation and Manoeuvrability” (MARSIM’96), Copenhagen, Denmark, 9–13 September 1996 / Ed. by M. S. Chislett, publ. by A. A. Balkema. – Rotterdam, The Netherlands, 1996.