

УДК 621 + 531.8

doi:10.18720/SPVPU/2/id24-88

Г.Н. Петров<sup>1</sup>, А.Н. Евграфов<sup>2</sup>

## ЭФФЕКТИВНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ



<sup>1</sup>Геннадий Николаевич Петров,  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра  
Великого, Санкт-Петербург, Россия.  
Тел.: (812)297-4845, E-mail: [gnpet@mail.ru](mailto:gnpet@mail.ru).



<sup>2</sup>Александр Николаевич Евграфов,  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра  
Великого, Санкт-Петербург, Россия.  
Тел.: (812)297-4845, E-mail: [alexevgrafov@mail.ru](mailto:alexevgrafov@mail.ru).

### Аннотация

Для повышения точности систем с программным управлением используются обратные связи. Рассмотрены вопросы эффективности и устойчивости построения замкнутых систем управления с обратными связями.

*Ключевые слова:* динамика машин, программное управление, эффективность управления, устойчивость, обратная связь.

### Введение

В работах [1-5] показаны основные принципы построения машин с программным управлением. Рассмотрены проблемы реализуемости программного движения и программного управления. Выявлены источники динамических ошибок (влияние начальных условий, неадекватность динамической модели системы, реализуемость программного движения). Обсудим ещё две проблемы, с которыми приходится сталкиваться при

создании замкнутых систем управления с обратными связями: эффективность и устойчивость.

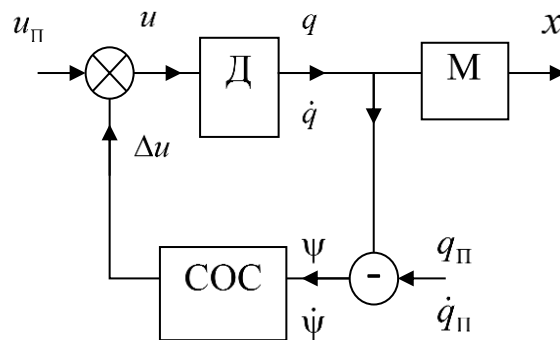


Рис. 1. Схема замкнутой системы с программным управлением

## Методы

Рассмотрим структурную схему системы с программным управлением (рис. 1) [6,7]. Здесь на выходе двигателя (на валу ротора) устанавливаются измерительные устройства (датчики), определяющие угол поворота и угловую скорость ротора и сравнивающие значения  $q(t)$  и  $\dot{q}(t)$  с их программными значениями. Разности  $\psi = q(t) - q_{\text{П}}(t)$  и  $\dot{\psi} = \dot{q}(t) - \dot{q}_{\text{П}}(t)$  представляют собой ошибки по координате ротора и его угловой скорости. Сигналы  $\psi$  и  $\dot{\psi}$  подаются на вход системы обратной связи (СОС), представляющий собой регулятор – устройство, формирующее сигнал  $\Delta u$ , складывающийся с сигналом программного управления  $u_{\text{П}}(t)$ , подаваемым на вход двигателя. Закон управления, связывающий сигнал обратной связи  $\Delta u$  с ошибками  $\psi$  и  $\dot{\psi}$ , обычно выбирается в форме

$$\Delta u = -k \cdot \psi - k_1 \cdot \dot{\psi}, \quad (1)$$

где  $k$  и  $k_1$  – положительные коэффициенты усиления по координате и по скорости. Из формулы (1) следует, что знак корректирующего сигнала  $\Delta u$  противоположен знакам ошибок, т. е. при  $q > q_{\text{П}}$ ,  $\dot{q} > \dot{q}_{\text{П}}$ , корректирующий сигнал уменьшает входной параметр и тем самым уменьшает скорость двигателя, а следовательно, и величину ошибок. При  $q < q_{\text{П}}$ ,  $\dot{q} < \dot{q}_{\text{П}}$  происходит увеличение скорости двигателя, что также приводит к уменьшению ошибок [8, 9]. Таким образом, формирование закона управления в соответствии с (1) направлено на уменьшение динамических ошибок, а, следовательно, на повышение точности отработки системой программного движения.

## Эффективность замкнутой системы управления

Составим уравнение движения механической системы с линейной функцией положения

$$J_{\Pi} \cdot \ddot{q} = Q, \quad (2)$$

где  $\ddot{q}$  – угловое ускорение ротора двигателя,  $J_{\Pi}$  – приведенный момент инерции,  $Q$  – движущий момент. В связи с тем, что в системах с программным управлением возникают большие переменные инерционные силы, вызывающие значительные колебания движущего момента, при их исследовании должна использоваться динамическая характеристика двигателя. Полагаем, что используется двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, принимаем эту характеристику в форме [10]:

$$\tau \cdot \dot{Q} + Q = r \cdot u - s \cdot \dot{q}, \quad (3)$$

где  $\tau, r, s$  – параметры двигателя.

Рассмотрим частный пример (рис.2) [11, 12]. На вход двигателя постоянного тока с независимым возбуждением подается знакопеременное входное напряжение  $u(t)$ , вызывающее реверсивное движение ротора, которое с помощью зубчатой передачи и зубчато-реечного механизма преобразуется в возвратно-поступательное движение выходного звена – зубчатой рейки; таким образом, в этой схеме используется принцип программного управления.

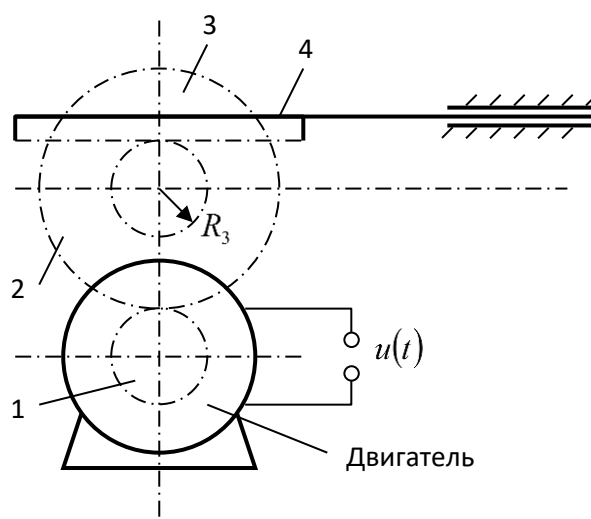


Рис. 2. Схема системы с зубчато-реечным исполнительным механизмом

Пусть задан программный закон движения выходного звена  $x_{\Pi}(t)$ . Из кинематических соотношений легко определить программный закон изменения  $q_{\Pi}(t)$ :

$$q_{\Pi}(t) = \frac{x_{\Pi}(t) \cdot i_{12}}{R_3}. \quad (4)$$

где  $i_{12}$  – передаточное отношение зубчатой передачи;  $R_3$  – радиус начальной окружности зубчатого колеса 3.

Подставив  $Q$  из (2) в (3), получим уравнение движения ротора двигателя в форме

$$\tau \cdot J_{\Pi} \cdot \ddot{q} + J_{\Pi} \cdot \dot{q} + s \cdot q = r \cdot u(t) \quad (5)$$

или, после деления на  $s$ ,

$$\tau \cdot \tau_M \cdot \ddot{q} + \tau_M \cdot \dot{q} + q = \frac{r}{s} \cdot u(t). \quad (6)$$

где  $\tau_M = \frac{J_{\Pi}}{s}$  – механическая постоянная времени.

Пусть в этой системе, движение которой описывается уравнением (6), введена обратная связь (1). Подставляя в (6)

$$u(t) = u_{\Pi}(t) + \Delta u = u_{\Pi}(t) - k \cdot \psi - k_1 \cdot \dot{\psi}; \quad q = q_{\Pi} + \psi$$

и предполагая из [30], что  $u_{\Pi} = \frac{s}{r} \dot{q}_{\Pi}$ , получим

$$\tau \cdot \tau_M (\ddot{q}_{\Pi} + \ddot{\psi}) + \tau_M (\dot{q}_{\Pi} + \dot{\psi}) + q_{\Pi} + \psi = \frac{r}{s} (u_{\Pi}(t) - k \cdot \psi - k_1 \cdot \dot{\psi}). \quad (7)$$

После элементарных преобразований запишем уравнение для динамической ошибки:

$$\tau \cdot \tau_M \cdot \ddot{\psi} + \tau_M \cdot \dot{\psi} + \left(1 + \frac{r}{s} \cdot k_1\right) \dot{\psi} + \frac{r}{s} k \cdot \psi = -\tau \cdot \tau_M \cdot \ddot{q}_{\Pi} - \tau_M \cdot \dot{q}_{\Pi}. \quad (8)$$

Предположим теперь, что требуется осуществить периодическое возвратно-поступательное движение рабочего органа по закону

$$x_{\Pi} = a \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (9)$$

где  $a$  и  $\omega$  – заданная амплитуда и частота. Подставляя (9) в (4), находим

$$q_{\Pi} = \frac{a \cdot i_{12}}{R_3} \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (10)$$

Определим динамическую ошибку при программном движении (10). Будем искать частное решение уравнения (8) в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha_1), \\ \dot{\psi} &= -\omega \cdot \psi_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha_1), \\ \ddot{\psi} &= -\omega^2 \cdot \psi_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha_1), \\ \dddot{\psi} &= \omega^3 \cdot \psi_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha_1). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставим (11) и (10) в (8):

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left(1 + \frac{r}{s} \cdot k_1 - \tau \cdot \tau_M \cdot \omega^2\right)^2 \cdot \omega^2 + \left(\frac{r}{s} \cdot k - \tau_M \cdot \omega^2\right)^2} \cdot \psi_1 \cdot \cos(\omega \cdot t - \alpha_1^* + \alpha_1) = \\ &= q_{\Pi 0} \cdot \tau_M \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha_1^{**}), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $q_{\Pi 0} = \frac{a \cdot i_{12}}{R_3}$ ;

$$\cos(\alpha^*) = \frac{\frac{r}{s} k - \tau_M \cdot \omega^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{r}{s} k_1 - \tau \cdot \tau_M \cdot \omega^2\right)^2 \cdot \omega^2 + \left(\frac{r}{s} k - \tau_M \cdot \omega^2\right)^2}};$$

$$\cos(\alpha^{**}) = -\frac{\tau \cdot \omega}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}};$$

$$\sin(\alpha^*) = -\frac{1 + \frac{r}{s} k_1 - \tau \cdot \tau_M \cdot \omega^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{r}{s} k_1 - \tau \cdot \tau_M \cdot \omega^2\right)^2 \cdot \omega^2 + \left(\frac{r}{s} k - \tau_M \cdot \omega^2\right)^2}};$$

$$\sin(\alpha^{**}) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}.$$

Приравняв коэффициенты при косинусах, найдем выражение для амплитуды динамической ошибки:

$$\Psi_1 = \frac{q_{П0} \cdot \tau_M \cdot \omega^2 \sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{r}{s} k_1 - \tau \cdot \tau_M \cdot \omega^2\right)^2 \omega^2 + \left(\frac{r}{s} k - \tau_M \cdot \omega^2\right)^2}}. \quad (13)$$

При отсутствии обратной связи, т. е. при  $k = 0$ ,  $k_1 = 0$ , амплитуда динамической ошибки определяется выражением

$$\Psi_1^0 = \frac{q_{П0} \cdot \tau_M \cdot \omega \sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}{\sqrt{\left(1 - \tau \cdot \tau_M \cdot \omega^2\right)^2 + \tau_M^2 \cdot \omega^2}}. \quad (14)$$

Эффективность введения обратной связи можно характеризовать коэффициентом эффективности, который равен отношению амплитуд ошибок в замкнутой и разомкнутой системах [13]. Разделив (13) на (14), получаем

$$K_{Э} = \frac{\Psi_1}{\Psi_1^0} = \frac{\omega \sqrt{\left(1 - \tau \cdot \tau_M \cdot \omega^2\right)^2 + \tau_M^2 \omega^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{r}{s} k_1 - \tau \cdot \tau_M \cdot \omega^2\right)^2 \omega^2 + \left(\frac{r}{s} k - \tau_M \cdot \omega^2\right)^2}}. \quad (15)$$

Чем меньше коэффициент эффективности  $K_{Э}$ , тем более эффективным оказывается введение обратной связи. Первые слагаемые подкоренных выражений в числителе и знаменателе (15) удовлетворяют неравенству

$$\left|1 + \frac{r}{s} k_1 - \tau \cdot \tau_M \cdot \omega^2\right| > \left|1 - \tau \cdot \tau_M \cdot \omega^2\right| \quad (16)$$

при любом  $k_1$ , если  $\tau \cdot \tau_M \cdot \omega^2 < 1$ ; если же  $\tau \cdot \tau_M \cdot \omega^2 > 1$ , то неравенство (16) выполняется при

$$k_1 > 2 \frac{s}{r} (\tau \cdot \tau_M \cdot \omega^2 - 1). \quad (17)$$

Вторые слагаемые удовлетворяют неравенству

$$\left| \frac{r}{s}k - \tau_M \cdot \omega^2 \right| > \tau_M \cdot \omega^2, \quad (18)$$

если

$$k > 2 \frac{s}{r} \tau_M \cdot \omega^2. \quad (19)$$

Таким образом, при достаточно больших значениях  $k$  и  $k_1$ , удовлетворяющих условиям (17) и (19), выполняются оба неравенства – (16) и (18), а при этом модуль числителя в выражении (15) наверняка будет меньше модуля знаменателя, т. е. будет выполняться условие эффективности управления ( $K_{\omega} < 1$ ). Более того, при дальнейшем увеличении коэффициента усиления значение  $K_{\omega}$  будет монотонно убывать, стремясь к нулю; при этом будет стремиться к нулю амплитуда динамической ошибки по скорости.

### Условия устойчивости замкнутой системы.

Казалось бы, увеличивая коэффициенты усиления системы обратной связи, можно обеспечить сколь угодно высокую точность выполнения программного движения. В действительности возможности повышения точности ограничены рядом причин, главная из которых – необходимость обеспечения устойчивости замкнутой системы. Для исследования устойчивости рассматриваемой системы обратимся к уравнению (8). Для асимптотической устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы характеристическое уравнение

$$\tau \cdot \tau_M \cdot \lambda^3 + \tau_M \cdot \lambda^2 + \left( 1 + \frac{r}{s} \cdot k_1 \right) \lambda + \frac{r}{s} k = 0 \quad (20)$$

имело все корни с отрицательными вещественными частями [14]. Для этого все коэффициенты этого уравнения должны быть положительными, что выполняется, если  $k > 0$ ,  $k_1 > -\frac{s}{r}$ , а также должно выполняться условие Гурвица для уравнения третьей степени [15], которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\tau \cdot \tau_M \frac{r}{s} k < \tau_M \left( 1 + \frac{r}{s} k_1 \right). \quad (21)$$

Обозначив  $\frac{r}{s}k = \alpha$ ,  $\frac{r}{s}k_1 = \beta$ , приводим условие (21) к виду

$$\tau \cdot \alpha < 1 + \beta.$$

На рис. 3 представлены области устойчивости системы на плоскости параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ , соответствующие различным величинам  $\tau$ . Чем больше постоянная времени двигателя  $\tau$ , тем меньше область допустимых значений  $\alpha$  и  $\beta$ , а следовательно, и коэффициентов усиления  $k$  и  $k_1$ .

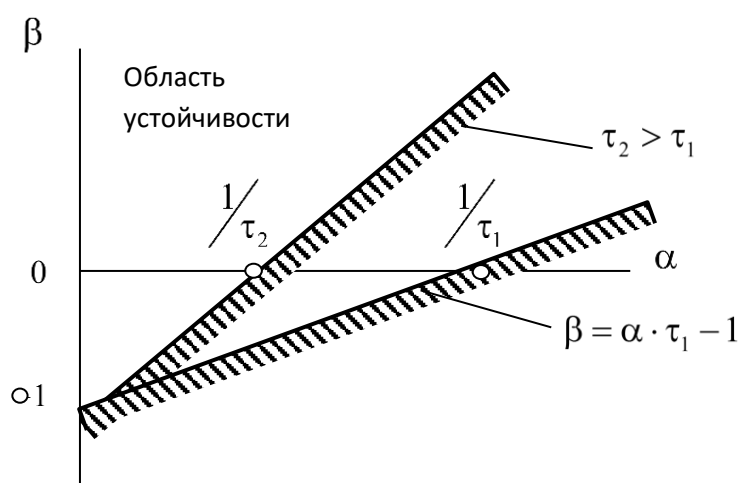


Рис. 3. Область устойчивости системы

### Заключение

Таким образом, увеличение коэффициентов усиления системы обратной связи может приводить к неустойчивости замкнутой системы. Отрицательная обратная связь, которая по принципу действия должна была бы вызывать уменьшение динамической ошибки, в действительности оказывается причиной ее неограниченного увеличения. Не описывая подробно все процессы, возникающие в замкнутой системе, отметим только, что по существу неустойчивость вызывается инерционностью двигателя, характеристикой которой является его постоянная времени  $\tau$ . Эта инерционность приводит к смещению по фазе колебательного момента двигателя по отношению к той колебательной компоненте переходного процесса, которую он должен демпфировать. В результате момент двигателя, возбужденный сигналом обратной связи, вместо



демпфирующего становится раскачивающим. Чем больше значение  $\tau$ , тем сильнее сказывается этот эффект.

Следует отметить, что инерционностью обладают и другие элементы системы управления. Так, например, сигнал на входе регулятора  $\Delta u$  связан с динамической ошибкой  $\psi$  более сложной зависимостью, чем та, что описана выражением (1). В первом приближении динамические процессы, происходящие в регуляторе, описываются уравнением вида

$$\tau_p \cdot \Delta \dot{u} + \Delta u = -k \cdot \psi - k_1 \cdot \dot{\psi}, \quad (22)$$

где  $\tau_p$  – постоянная времени регулятора. Обычно «запаздывание» в регуляторе мало ( $\tau_p \ll \tau, \tau_M$ ), так что при малых коэффициентах усиления им можно пренебречь. Однако с увеличением значений  $k$  и  $k_1$  влияние малой постоянной  $\tau_p$  на устойчивость системы становится существенным.

Чем больше коэффициенты усиления цепи обратной связи, тем более точной должна быть динамическая модель системы. В частности, это относится к учету упругости звеньев механической системы, что становится необходимым в системах управления движением прецизионных машин, в которых программные движения должны выполняться с высокой точностью.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Евграфов А.Н., Петров Г.Н., К вопросу о динамике машин с программным управлением//Современное машиностроение. Наука и образование. 2023. № 12. С. 65-80.
- [2] Коловский М.З., Петров Г.Н., Слоущ А.В. Об управлении движением замкнутых рычажных механизмов с несколькими степенями свободы. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2000. № 4.
- [3] Evgrafov, A.N., Petrov, G.N., Khlebosolov, I.O., Andrienko, P.A. On the Issue of Dynamics of Program-Controlled Machines. Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2024, PartF 128, pp. 11–20.
- [4] Kolovsky M.Z., Evgrafov A.N., Semenov Yu.A., Slousch A.V., Advanced Theory of Mechanisms and Machines. Springer-Verlag Heidelberg New York, 2000, P. 394.
- [5] Коловский М.З. Динамика машин. Л.: Машиностроение, 1989. 263 с.
- [6] Евграфов А.Н., Каразин В.И., Хлебосолов И.О. Воспроизведение параметров движения на ротационных стендах. Теория механизмов и машин. 2003. Т. 1. № 1 (1). С. 92-96.

- [7] Evgrafov A.N., Karazin V.I., Kozlikin D.P., Khlebosolov I.O. Centrifuges for variable accelerations generation. *International Review of Mechanical Engineering*. Volume 11, Issue 5, 2017, Pp. 280-285
- [8] Semenov Yu., Semenova N., Egorova O. Dynamic Mesh Forces in Accounting of the Time Variable Mesh Stiffness of a Gear Train. *International Review of Mechanical Engineering*, 2018, Vol. 12, №9, pp. 736-741.
- [9] Semenov Yu. A., Semenova N. S. Study of Mechanisms with Allowance for Friction Forces in Kinematic Pairs. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2019. pp. 169-180.
- [10] Evgrafov A.N., Petrov G.N. Drive selection of multidirectional mechanism with excess inputs. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2016, Pp. 31-37.
- [11] Evgrafov A.N., Karazin V.I., Kozlikin D.P., Khlebosolov I.O. Some Characteristics of Linear Acceleration Reproduction with Flexible Harmonical Component / *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2018. Pp. 71-81. DOI: 10.1007/978-3-319-72929-9\_9
- [12] Хростицкий А.А., Евграфов А.Н., Терёшин В.А. Геометрия и кинематика пространственного шестизвенника с избыточными связями. *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета*. 2011. № 2 (123). С. 170-176.
- [13] Evgrafov A.N., Karazin V.I., Khisamov A.V. Research of high-level control system for centrifuge engine. 2018. *International Review of Mechanical Engineering* Pp. 400-404.
- [14] Теория механизмов и механика машин: учебник для вузов / [Г.А. Тимофеев и др.]; под ред. Г.А. Тимофеева. – 8-е изд. перераб. и доп. – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – 566 с. : ил.
- [15] Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. (3-е, Стереотипное) Санкт-Петербург, 2015.

## **EFFICIENCY AND STABILITY OF CLOSED-LOOP CONTROL SYSTEM WITH FEEDBACKS**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia

### **Abstract**

Feedbacks are used to improve the accuracy of program-controlled systems. The questions of efficiency and stability of construction of closed-loop control systems with feedbacks are considered.

Key words: machine dynamics, program control, control efficiency, stability, feedback.

### **REFERENCES**

- [1] Evgrafov A.N., Petrov G.N., To the question of dynamics of machines with program control//Sovremennoe mashinostroenie. Science and education. 2023. № 12. Pp. 65-80. (rus.)
- [2] Kolovskiy M.Z., Petrov G.N., Sloush A.V. About control of motion of the closed lever mechanisms with several degrees of freedom. Problems of mechanical engineering and reliability of machines. 2000. № 4. (rus.)
- [3] Evgrafov, A.N., Petrov, G.N., Khlebosolov, I.O., Andrienko, P.A. On the Issue of Dynamics of Program-Controlled Machines. Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2024, PartF 128, Pp. 11–20.
- [4] Kolovsky M.Z., Evgrafov A.N., Semenov Yu.A., Slousch A.V., Advanced Theory of Mechanisms and Machines. Springer-Verlag Heidelberg New York, 2000, p. 394.
- [5] Kolovsky M.Z. Dynamics of machines. L.: Mashinostroenie, 1989. 263 p. (rus.)
- [6] Evgrafov A.N., Karazin V.I., Khlebosolov I.O. Reproduction of motion parameters on rotational stands. Theory of mechanisms and machines. 2003. T. 1. № 1 (1). Pp. 92-96. (rus.)
- [7] Evgrafov A.N., Karazin V.I., Kozlikin D.P., Khlebosolov I.O. Centrifuges for variable accelerations generation. International Review of Mechanical Engineering. Volume 11, Issue 5, 2017, Pp. 280-285
- [8] Semenov Yu., Semenova N., Egorova O. Dynamic Mesh Forces in Accounting of the Time Variable Mesh Stiffness of a Gear Train. International Review of Mechanical Engineering, 2018, Vol. 12, №9, Pp. 736-741.

- [9] Semenov Yu. A., Semenova N. S. Study of Mechanisms with Allowance for Friction Forces in Kinematic Pairs. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2019. Pp. 169-180.
- [10] Evgrafov A.N., Petrov G.N. Drive selection of multidirectional mechanism with excess inputs. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2016, Pp. 31-37.
- [11] Evgrafov A.N., Karazin V.I., Kozlikin D.P., Khlebosolov I.O. Some Characteristics of Linear Acceleration Reproduction with Flexible Harmonical Component / Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2018. Pp. 71-81. DOI: 10.1007/978-3-319-72929-9\_9
- [12] Khrostitskiy A.A., Evgrafov A.N., Teryoshin V.A. Geometry and kinematics of a spatial hexagon with redundant links. Scientific and Technical Vedomosti of St. Petersburg State Polytechnic University. 2011. № 2 (123). Pp. 170-176. (rus.)
- [13] Evgrafov A.N., Karazin V.I., Khisamov A.V. Research of high-level control system for centrifuge engine. 2018. International Review of Mechanical Engineering Pp. 400-404.
- [14] Theory of mechanisms and mechanics of machines: textbook for universities / [G.A. Timofeev et al.]; ed. by G.A. Timofeev. - 8th ed. revision and additions - Moscow: Bauman Moscow State Technical University Publishing House, 2017. - 566 p. : ill. (rus.)
- [15] Pervozvansky A.A. Course of the theory of automatic control. (3rd, Stereotype) St. Petersburg, 2015. (rus.)