

ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО ИЛИ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ



¹Алексей Сергеевич Смирнов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра
Великого

Институт проблем машиноведения Российской академии наук
Россия, Санкт-Петербург

Тел.: (812)552-7778, E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com



²Борис Александрович Смольников

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра
Великого

Институт проблем машиноведения Российской академии наук
Россия, Санкт-Петербург

Тел.: (812)552-7778, E-mail: smolnikovba@yandex.ru

Аннотация

В работе рассматривается движение сферического маятника с учетом слабой консервативной нелинейности и под действием сил внешнего или внутреннего трения. Для обоих вариантов трения строится диссипативная функция и выводятся уравнения движения, содержащие собственную кубическую нелинейность системы, которые записываются в удобной для дальнейших действий комплексной форме. На основе метода усреднения строится приближенное решение для системы, испытывающей действие того или иного вида трения, и из него можно получить выражения и для более простых моделей. Найденные результаты наглядно иллюстрируются в виде траекторий сферического маятника, которые отвечают различным моделям, в проекции на горизонтальную плоскость. Полученные решения вносят определенный вклад в теорию движения сферического маятника и могут оказаться полезными для разнообразных практических приложений.

Ключевые слова: сферический маятник, слабая нелинейность, внешнее трение, внутреннее трение, метод усреднения, траектория движения.

Введение

Сферический маятник (далее – СМ) представляет собой одну из самых известных маятниковых систем с двумя степенями свободы и привлекает большое внимание исследователей со всего мира уже более трех столетий. Это вызвано тем, что изучение динамического поведения СМ не только имеет фундаментальное теоретическое значение, но и позволяет описать поведение многих более сложных конструкций, что крайне важно с практической точки зрения [1]. Среди многочисленных приложений СМ в технических устройствах можно указать, например, грузоподъемные устройства типа мостовых и башенных кранов, тренажеры, спортивно-развлекательные комплексы, тросовые системы и др. [2]. Именно поэтому интерес к СМ сохраняется и в настоящее время, что подтверждает целый ряд как отечественных научных публикаций [3–12], так и зарубежных трудов [13–19], посвященных различным аспектам динамики СМ. Помимо этого, в 2019 г. вышла в свет и книга авторов настоящей статьи [2], посвященная механике СМ, в которой дается подробный анализ различных консервативных и диссипативных моделей СМ, а также исследуются его модификации. Все это позволяет утверждать, что в настоящее время СМ входит в число наиболее популярных объектов аналитической механики.

Тем не менее, существующие в литературе модели движения СМ не исчерпывают всех возможностей аналитического исследования, и немалый интерес представляет построение более сложных моделей по отношению к уже известным и их последующий анализ приближенными методами. Именно этому вопросу и посвящена данная статья, в которой производится одновременный учет как слабой консервативной нелинейности системы, так и диссипативных сил внешнего или внутреннего трения.

Математическая модель движения сферического маятника

Рассмотрим СМ, подвешенный в поле силы тяжести, масса концевого груза которого есть m , а длина СМ полагается равной l (рис. 1). Поскольку целью настоящей работы является исследование движения СМ при достаточно небольших отклонениях СМ от его нижнего положения равновесия, то в качестве обобщенных координат следует принять декартовы координаты x и y концевого груза, которые в этих условиях остаются малыми. Это обстоятельство позволит далее осуществлять разложения с необходимой точностью и строить приближенные решения.

Приступая к выводу уравнений движения СМ, запишем сначала его кинетическую энергию с точностью до слагаемых не выше четвертого порядка малости, считая, что обобщенные координаты x , y и обобщенные скорости \dot{x} и \dot{y} являются величинами первого порядка малости:

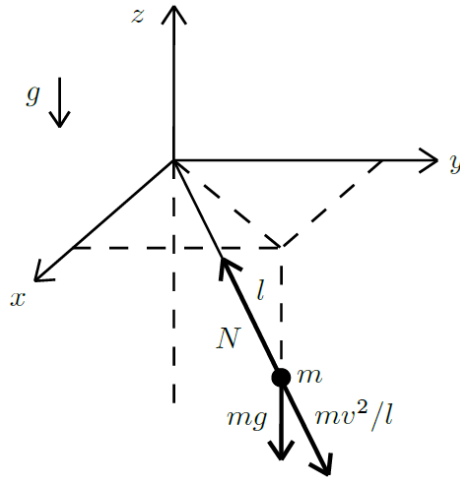


Рис. 1. Расчетная схема сферического маятника

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \approx \frac{1}{2}m \left[\left(1 + \frac{x^2}{l^2}\right)\dot{x}^2 + 2\frac{xy}{l^2}\dot{x}\dot{y} + \left(1 + \frac{y^2}{l^2}\right)\dot{y}^2 \right], \quad (1)$$

где v – скорость концевго груза СМ, а также принято во внимание, что с интересующей нас точностью из условия связи $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ вытекает:

$$z = -\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}, \quad \dot{z} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}} \approx \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{l}, \quad (2)$$

что и позволяет исключить из (1) зависимую величину \dot{z} . Отметим, что знак « \rightarrow » перед радикалом в выражении (2) для z взят из тех соображений, что при малых отклонениях СМ от нижнего положения равновесия, очевидно, $z < 0$. Далее выпишем потенциальную энергию системы с той же точностью, т. е. до слагаемых не выше четвертого порядка малости:

$$\Pi = mgz = -mg\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} \approx -mgl \left[1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{8l^4} \right]. \quad (3)$$

Записывая уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_x, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} + Q_y, \quad (4)$$

где Q_x и Q_y – обобщенные диссипативные силы, которые равны взятым с противоположным знаком частным производным диссипативной функции по обобщенным скоростям, получим:

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{x^2}{l^2}\right)\ddot{x} + \frac{xy}{l^2}\ddot{y} = -k^2x - \frac{x}{2l^2} \left[k^2(x^2 + y^2) + 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right] + \frac{1}{m}Q_x, \\ \frac{xy}{l^2}\ddot{x} + \left(1 + \frac{y^2}{l^2}\right)\ddot{y} = -k^2y - \frac{y}{2l^2} \left[k^2(x^2 + y^2) + 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right] + \frac{1}{m}Q_y. \end{cases} \quad (5)$$

В этих уравнениях учтена собственная, т. е. консервативная кубическая нелинейность СМ, при этом и выражения для Q_x и Q_y следует получать с точностью до величин не выше третьего порядка малости. Система (5) не очень удобна для построения приближенного аналитического решения, которое мы будем выполнять в дальнейшем. Поэтому целесообразно разрешить ее относительно обобщенных ускорений \ddot{x} и \ddot{y} , осуществить разложения с сохранением необходимой точности, а затем перенести линейные по x и y слагаемые в левую часть. В результате получим:

$$\begin{cases} \ddot{x} + k^2 x = \frac{x}{2l^2} [k^2(x^2 + y^2) - 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)] + \frac{1}{m} \left[\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) Q_x - \frac{xy}{l^2} Q_y \right], \\ \ddot{y} + k^2 y = \frac{y}{2l^2} [k^2(x^2 + y^2) - 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)] + \frac{1}{m} \left[\left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right) Q_y - \frac{xy}{l^2} Q_x \right]. \end{cases} \quad (6)$$

Удобство этой системы заключается в том, что в левых частях обоих уравнений стоят лишь традиционные линейные слагаемые, отвечающие колебаниям линейного консервативного осциллятора соответственно по x и y , а связь между уравнениями осуществляется через их правые части.

Далее следует конкретизировать диссипативные силы. Рассмотрим сначала внешнее вязкое трение, действующее на груз СМ со стороны окружающей среды, для которого диссипативная функция имеет вид:

$$R = \frac{1}{2} B v^2 = \frac{1}{2} B (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \approx \frac{1}{2} B \left[\left(1 + \frac{x^2}{l^2}\right) \dot{x}^2 + 2 \frac{xy}{l^2} \dot{x}\dot{y} + \left(1 + \frac{y^2}{l^2}\right) \dot{y}^2 \right], \quad (7)$$

где B – постоянный диссипативный коэффициент, так что здесь функция R пропорциональна кинетической энергии (1). А тогда обобщенные диссипативные силы с необходимой точностью будут:

$$Q_x = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = -B \left[\left(1 + \frac{x^2}{l^2}\right) \dot{x} + \frac{xy}{l^2} \dot{y} \right], \quad Q_y = -\frac{\partial R}{\partial \dot{y}} = -B \left[\frac{xy}{l^2} \dot{x} + \left(1 + \frac{y^2}{l^2}\right) \dot{y} \right]. \quad (8)$$

Подставляя их в уравнения (6), получим с той же точностью:

$$\begin{cases} \ddot{x} + k^2 x = \frac{x}{2l^2} [k^2(x^2 + y^2) - 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)] - 2n\dot{x}, \\ \ddot{y} + k^2 y = \frac{y}{2l^2} [k^2(x^2 + y^2) - 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)] - 2n\dot{y}, \end{cases} \quad (9)$$

где введен более удобный диссипативный коэффициент n по формуле $2n = B/m$. Видно, что диссипативные слагаемые здесь имеют первый порядок малости, тогда как кубическая диссипативная нелинейность полностью отсутствует, поскольку все отвечающие ей слагаемые третьего порядка малости сократились в процессе преобразования уравнений (6) после подстановки в них выражений (8) для обобщенных сил.

Более сложным образом осуществляется учет внутреннего трения при движении механических систем [20, 21]. Переходя к анализу внутреннего трения в стержне СМ, представим диссипативную функцию в виде [2]:

$$S = \frac{1}{2} \beta_0 \dot{N}^2, \quad (10)$$

где β_0 – постоянный диссипативный коэффициент, а N – усилие в стержне СМ, которое определяется по формуле (рис. 1):

$$N = \frac{mv^2}{l} - mg \frac{z}{l} \approx \frac{m}{l} \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + k^2 \left(l^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \right], \quad (11)$$

где также выписана его квадратичная аппроксимация, достаточная для дальнейших действий, причем $k = \sqrt{g/l}$ – частота малых колебаний математического маятника длиной l . Тогда для производной \dot{N} получим:

$$\dot{N} = \frac{m}{l} \left[2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} - k^2(x\dot{x} + y\dot{y}) \right]. \quad (12)$$

Для упрощения будем вычислять эту величину на невозмущенном движении СМ, т. е. на линейной консервативной модели, что позволит получить для \dot{N} квадратичную аппроксимацию относительно величин x , y , \dot{x} и \dot{y} . Как известно, в рамках указанной модели имеем независимые друг от друга уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$, $\ddot{y} + k^2 y = 0$, из которых остается исключить \ddot{x} и \ddot{y} и подставить их в (12), вследствие чего будем иметь:

$$\dot{N} = -\frac{3mk^2}{l}(x\dot{x} + y\dot{y}). \quad (13)$$

Таким образом, из (10) получим диссипативную функцию в виде:

$$S = \frac{1}{2} \beta m (x\dot{x} + y\dot{y})^2, \quad \beta = \frac{9\beta_0 m k^4}{l^2}, \quad (14)$$

где β – приведенный диссипативный коэффициент. Следовательно, здесь обобщенные диссипативные силы будут определяться выражениями:

$$Q_x = -\frac{\partial S}{\partial \dot{x}} = -\beta m x (x\dot{x} + y\dot{y}), \quad Q_y = -\frac{\partial S}{\partial \dot{y}} = -\beta m y (x\dot{x} + y\dot{y}). \quad (15)$$

Подставляя их в уравнения (6), получим с необходимой точностью:

$$\begin{cases} \ddot{x} + k^2 x = \frac{x}{2l^2} \left[k^2 (x^2 + y^2) - 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right] - \beta x (x\dot{x} + y\dot{y}), \\ \ddot{y} + k^2 y = \frac{y}{2l^2} \left[k^2 (x^2 + y^2) - 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right] - \beta y (x\dot{x} + y\dot{y}), \end{cases} \quad (16)$$

где диссипативные эффекты вовсе не содержат линейных слагаемых, а представляют собой величины третьего порядка малости.

Как систему (9), так и систему (16) можно записать в виде одного уравнения, если ввести в рассмотрение комплексную переменную

$w = x + iy$. Действительно, умножая второе уравнение каждой из этих систем на мнимую единицу i и прибавляя к полученному уравнению первое уравнение этих систем, получим после несложных преобразований:

$$\dot{w} + k^2 w = Q(w, \dot{w}), \quad (17)$$

где для случая внешнего трения имеем

$$Q(w, \dot{w}) = \frac{w}{2l^2} (k^2 w \bar{w} - 2\dot{w} \dot{\bar{w}}) - 2n\dot{w}, \quad (18)$$

тогда как для случая внутреннего трения будет

$$Q(w, \dot{w}) = \frac{w}{2l^2} (k^2 w \bar{w} - 2\dot{w} \dot{\bar{w}}) - \frac{\beta}{2} w (w \dot{\bar{w}} + \bar{w} \dot{w}), \quad (19)$$

причем $\bar{w} = x - iy$ – сопряженная величина по отношению к переменной w .

Построение приближенных решений

Перейдем к построению приближенных решений комплексного уравнения (17) для обоих вариантов функции $Q(w, \dot{w})$ согласно (18) и (19), используя для этой цели метод усреднения. Будем полагать, что функция $Q(w, \dot{w})$ является достаточно малой. Ясно, что все слагаемые третьего порядка малости в выражениях (18) и (19) можно трактовать как малую нелинейность (консервативную или диссипативную), тогда как линейное диссипативное слагаемое в (18) также можно считать малым, если положить малой величину n . В соответствии с методом усреднения для комплексных уравнений для w и \dot{w} принимаются выражения [2]:

$$w = Ae^{ikt} + Be^{-ikt}, \quad \dot{w} = ik(Ae^{ikt} - Be^{-ikt}), \quad (20)$$

где A и B – медленно меняющиеся функции времени: $A = A(t)$, $B = B(t)$, а усредненные уравнения для определения этих функций имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi/k} \tilde{Q}(A, B, e^{ikt}) e^{-ikt} dt, \\ \dot{B} = -\frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi/k} \tilde{Q}(A, B, e^{ikt}) e^{ikt} dt, \end{cases} \quad (21)$$

при этом под $\tilde{Q}(A, B, e^{ikt})$ подразумевается следующее выражение:

$$\tilde{Q}(A, B, e^{ikt}) = Q(Ae^{ikt} + Be^{-ikt}, ik(Ae^{ikt} - Be^{-ikt})). \quad (22)$$

Обсудим сначала случай внешнего трения, для которого согласно (18) будем иметь тогда:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(A, B, e^{ikt}) = \frac{k^2}{2l^2} \left[(2|B|^2 - |A|^2) Ae^{ikt} + (2|A|^2 - |B|^2) Be^{-ikt} \right] - \\ - 2nik(Ae^{ikt} - Be^{-ikt}) + \dots, \end{aligned} \quad (23)$$

где удержаны только необходимые слагаемые вида $e^{\pm ikt}$ и опущены несущественные слагаемые, которые после вычисления интегралов в (21) обратятся в нуль. Подставляя выражение (23) в систему (21), получим после интегрирования следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{A} = -\frac{ik}{4l^2} A (2|B|^2 - |A|^2) - nA, \\ \dot{B} = \frac{ik}{4l^2} B (2|A|^2 - |B|^2) - nB. \end{cases} \quad (24)$$

Домножая первое из этих уравнений на \bar{A} , а второе – на \bar{B} , получим:

$$\begin{cases} \dot{A}\bar{A} = -\frac{ik}{4l^2} |A|^2 (2|B|^2 - |A|^2) - n|A|^2, \\ \dot{B}\bar{B} = \frac{ik}{4l^2} |B|^2 (2|A|^2 - |B|^2) - n|B|^2. \end{cases} \quad (25)$$

Если взять комплексное сопряжение от каждого из полученных уравнений (25), то можно получить два других уравнения:

$$\begin{cases} A\dot{\bar{A}} = \frac{ik}{4l^2} |A|^2 (2|B|^2 - |A|^2) - n|A|^2, \\ B\dot{\bar{B}} = -\frac{ik}{4l^2} |B|^2 (2|A|^2 - |B|^2) - n|B|^2. \end{cases} \quad (26)$$

Складывая поочередно первые и вторые уравнения систем (25) и (26), получим еще одну систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} |A|^2 = \frac{d}{dt} (A\bar{A}) = \dot{A}\bar{A} + A\dot{\bar{A}} = -2n|A|^2, \\ \frac{d}{dt} |B|^2 = \frac{d}{dt} (B\bar{B}) = \dot{B}\bar{B} + B\dot{\bar{B}} = -2n|B|^2. \end{cases} \quad (27)$$

Эти уравнения уже являются независимыми друг от друга, причем первое из них позволяет определить $|A|$, тогда как второе – $|B|$:

$$|A| = |A_0| e^{-nt}, \quad |B| = |B_0| e^{-nt}, \quad (28)$$

где полагается, что в начальный момент времени $t = 0$ имеем $A = A_0$ (так что $|A| = |A_0|$) и $B = B_0$ (так что $|B| = |B_0|$). Эти формулы демонстрируют, что величины $|A|$ и $|B|$ убывают по экспоненциальному закону, как это было и в модели движения СМ при наличии внешнего трения, но без учета собственной нелинейности системы [2]. Однако выражения для самих медленно меняющихся функций A и B при одновременном учете внешнего трения и консервативной нелинейности будут уже более сложными. Переходя к их получению, вернемся к системе (24), которая с учетом формул (28) распадается на два независимых уравнения:

$$\begin{cases} \dot{A} = f_A(t)A, \\ \dot{B} = f_B(t)B, \end{cases} \quad (29)$$

где выражения для функций $f_A(t)$ и $f_B(t)$ имеют вид:

$$f_A(t) = -\frac{ik}{4l^2} \left(2|B_0|^2 - |A_0|^2 \right) e^{-2nt} - n, \quad f_B(t) = \frac{ik}{4l^2} \left(2|A_0|^2 - |B_0|^2 \right) e^{-2nt} - n. \quad (30)$$

Нетрудно понять, что решения уравнений (29) можно представить в следующей форме:

$$A(t) = A_0 \exp \left[\int_0^t f_A(\tau) d\tau \right], \quad B(t) = B_0 \exp \left[\int_0^t f_B(\tau) d\tau \right]. \quad (31)$$

Подставляя (30) в (31), получим после вычисления интегралов:

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0 \exp \left[-\frac{ik}{8nl^2} \left(2|B_0|^2 - |A_0|^2 \right) (1 - e^{-2nt}) - nt \right], \\ B(t) &= B_0 \exp \left[\frac{ik}{8nl^2} \left(2|A_0|^2 - |B_0|^2 \right) (1 - e^{-2nt}) - nt \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Отметим, что если бы мы рассматривали модель, учитывающую лишь слабую консервативную нелинейность при отсутствии внешнего трения (т. е. при $n = 0$), то из (28) мы имели бы $|A| = |A_0| = \text{const}$, $|B| = |B_0| = \text{const}$, а траекторией движения СМ в проекции на горизонтальную плоскость xu был бы прецессирующий эллипс, не изменяющий своих размеров. В этом случае в рассмотрение вводятся величины a и b – большая и меньшая оси траекторного эллипса, и их естественно использовать и в рамках модели, учитывающей как консервативную нелинейность, так и внешнее трение. Ясно, что тогда для $|A_0|$ и $|B_0|$ можно принять те же выражения, что имели место для $|A|$ и $|B|$ при $n = 0$, т. е. $|A_0| = (a + b) / 2$, $|B_0| = (a - b) / 2$ [2] (здесь и далее для определенности полагается, что $|A_0| > |B_0|$). Тогда формулы (32) можно преобразовать, после чего сразу записать решение для комплексной переменной w согласно первой формуле (20):

$$w(t) = e^{-nt} e^{i\psi(t)} \left[A_0 e^{i\theta(t)} + B_0 e^{-i\theta(t)} \right], \quad (33)$$

где функции $\psi(t)$ и $\theta(t)$ определяются выражениями:

$$\psi(t) = \frac{3kab(1 - e^{-2nt})}{16nl^2}, \quad \theta(t) = k \left[t - \frac{(a^2 + b^2)(1 - e^{-2nt})}{32nl^2} \right]. \quad (34)$$

Соотношение (33) показывает, что траекторный эллипс в рамках данной модели прецессирует с переменной угловой скоростью

$$\kappa = \dot{\psi}(t) = \frac{3kab}{8l^2} e^{-2nt}, \quad (35)$$

стремящейся к нулю при $t \rightarrow \infty$, при этом сам эллипс сжимается по экспоненциальному закону, а частота обращения по эллипсу равна

$$k_1 = \dot{\theta}(t) = k \left(1 - \frac{a^2 + b^2}{16l^2} e^{-2nt} \right), \quad (36)$$

и она при $t \rightarrow \infty$ будет стремиться к линейному значению k . Таким образом, с течением времени прецессия траекторного эллипса становится все менее выраженной, и эллипс скручивается практически без изменения своей ориентации с почти постоянной частотой обращения по нему, и в конечном счете происходит полное затухание движений СМ.

Рассмотрим упрощенные модели движения СМ по отношению к модели, которая учитывает и слабую консервативную нелинейность, и внешнюю диссипацию. Так, если положить $n = 0$ в (24), то мы будем иметь модель только со слабой нелинейностью, для которой, как уже говорилось, $|A| = |A_0|$ и $|B| = |B_0|$ – постоянные величины. Выполняя в выражении (33) с учетом (34) предельный переход при $n \rightarrow 0$ и раскрывая возникающие при этом неопределенности, получим известную формулу [2]:

$$w(t) = e^{ikt} \left(A_0 e^{ik_1 t} + B_0 e^{-ik_1 t} \right), \quad \kappa = \frac{3kab}{8l^2}, \quad k_1 = k \left(1 - \frac{a^2 + b^2}{16l^2} \right), \quad (37)$$

где величины κ и k_1 являются постоянными. Отбрасывая в (37) величины, имеющие второй порядок малости по a/l и b/l , получим выражение:

$$w(t) = A_0 e^{ikt} + B_0 e^{-ikt}, \quad (38)$$

отвечающее линейной модели СМ, в рамках которой траектория движения представляет собой неподвижный эллипс [2]. Для получения же модели, учитывающей только внешнее трение и не принимающей во внимание собственную нелинейность системы, поступим аналогичным образом с формулой (33) с учетом (34), которая после пренебрежения слагаемыми второго порядка малости по a/l и b/l приведет к виду:

$$w(t) = e^{-nt} \left(A_0 e^{ikt} + B_0 e^{-ikt} \right), \quad (39)$$

т. е. будет описывать просто скручивающийся эллипс без какого-либо изменения его ориентации. Разумеется, если положить в этом выражении $n = 0$, то мы вновь придем к формуле (38) для линейной модели СМ, как этого и следовало ожидать.

Обратимся теперь к построению приближенного решения для случая внутреннего трения. В этой задаче $Q(w, \dot{w})$ определяется формулой (19), поэтому согласно (22) после преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(A, B, e^{ikt}) = & \frac{k^2}{2l^2} \left[\left(2|B|^2 - |A|^2 \right) A e^{ikt} + \left(2|A|^2 - |B|^2 \right) B e^{-ikt} \right] - \\ & - \beta ik \left(|A|^2 e^{ikt} - |B|^2 e^{-ikt} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (40)$$

где по-прежнему выписаны только необходимые слагаемые. Тогда вместо уравнений (24) получим для данного случая следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{A} = -\frac{ik}{4l^2} A(2|B|^2 - |A|^2) - \frac{\beta}{2} A|B|^2, \\ \dot{B} = \frac{ik}{4l^2} B(2|A|^2 - |B|^2) - \frac{\beta}{2} B|A|^2. \end{cases} \quad (41)$$

Поступая с ними аналогичным образом, нетрудно получить уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}|A|^2 = -\beta|A|^2|B|^2, \\ \frac{d}{dt}|B|^2 = -\beta|B|^2|A|^2, \end{cases} \quad (42)$$

которые служат для определения $|A|$ и $|B|$. Однако в отличие от системы (27), здесь уравнения оказываются связанными друг с другом. Вычитая из первого уравнения (42) второе, получим следующий интеграл:

$$|A|^2 - |B|^2 = h = \text{const}, \quad (43)$$

причем $h > 0$, поскольку полагается, что $|A_0| > |B_0|$ (т. к. данный интеграл имеет место и при $t = 0$, то $h = |A_0|^2 - |B_0|^2 > 0$). Очевидно, полученный интеграл представляет собой интеграл момента, записанный в медленных переменных. В самом деле, известно, что момент количества движения p СМ относительно вертикальной оси z имеет вид [2]:

$$p = m(x\dot{y} - \dot{x}y) = \frac{m}{2i}(\bar{w}\dot{w} - \dot{\bar{w}}w) = mk(|A|^2 - |B|^2) = mkh = \text{const}, \quad (44)$$

где приняты во внимание формулы (20), откуда и следует сказанное. Таким образом, константа h в интеграле (43) пропорциональна моменту количества движения p относительно оси z . Из интеграла (43) следует, что $|B|^2 = |A|^2 - h$, после чего первое уравнение (42) принимает вид:

$$\frac{d}{dt}|A|^2 = -\beta|A|^2(|A|^2 - h). \quad (45)$$

Решая это уравнение с разделяющимися переменными, можно определить $|A|$, после чего при помощи формулы $|B|^2 = |A|^2 - h$ найти и $|B|$:

$$|A| = \sqrt{\frac{he^{\beta ht}}{e^{\beta ht} - 1 + \frac{h}{|A_0|^2}}}, \quad |B| = \sqrt{\frac{he^{-\beta ht}}{1 - e^{-\beta ht} + \frac{h}{|B_0|^2}}}, \quad (46)$$

при этом, конечно, $|B_0|^2 = |A_0|^2 - h$. Подчеркнем, что и здесь формулы (46) имеют тот же вид, что и в модели движения СМ при наличии внутреннего

трения без учета собственной нелинейности системы [2]. Остается получить выражения для самих медленно меняющихся функций A и B , для чего следует вернуться к системе (41). Ясно, что с учетом выражений (46) она также может быть приведена к виду (29), где теперь функции $f_A(t)$ и $f_B(t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} f_A(t) &= \frac{h}{2} \left(\frac{ik}{l^2} + \beta \right) - \left(\frac{ik}{4l^2} + \frac{\beta}{2} \right) \frac{he^{\beta ht}}{e^{\beta ht} - 1 + \frac{h}{|A_0|^2}}, \\ f_B(t) &= \frac{h}{2} \left(\frac{ik}{l^2} - \beta \right) + \left(\frac{ik}{4l^2} - \frac{\beta}{2} \right) \frac{he^{-\beta ht}}{1 - e^{-\beta ht} + \frac{h}{|B_0|^2}}. \end{aligned} \quad (47)$$

Отметим, что для наглядности выражения для $f_A(t)$ и $f_B(t)$ записаны здесь с учетом интеграла (43) так, чтобы в первом из них содержалось лишь $|A_0|$, а во втором – лишь $|B_0|$. Подставляя эти функции в (31) и выполняя интегрирование, получим после несложных преобразований:

$$A(t) = A_0 \frac{e^{\frac{h}{2} \left(\frac{ik}{l^2} + \beta \right) t}}{\left[1 + \frac{|A_0|^2}{h} (e^{\beta ht} - 1) \right]^{\frac{1}{2} + \frac{ik}{4l^2\beta}}}, \quad B(t) = B_0 \frac{e^{\frac{h}{2} \left(\frac{ik}{l^2} - \beta \right) t}}{\left[1 + \frac{|B_0|^2}{h} (1 - e^{-\beta ht}) \right]^{\frac{1}{2} + \frac{ik}{4l^2\beta}}}. \quad (48)$$

Учитывая вновь, что $|A_0| = (a+b)/2$, $|B_0| = (a-b)/2$, и, следовательно, из (43) имеем $h = |A_0|^2 - |B_0|^2 = ab$, преобразуем выражения (48), после чего сразу подставим их в первую формулу (20), которая и дает решение в окончательной форме:

$$w(t) = e^{i\psi(t)} \left[\varphi_A(t) A_0 e^{i\theta(t)} + \varphi_B(t) B_0 e^{-i\theta(t)} \right], \quad (49)$$

где функции $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\varphi_A(t)$ и $\varphi_B(t)$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{3kab}{8l^2} t, \quad \theta(t) = kt \left(1 - \frac{ab}{8l^2} \right) - \frac{k}{4l^2\beta} \ln \left[1 + \frac{(a-b)^2}{4ab} (1 - e^{-\beta abt}) \right], \\ \varphi_A(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(a-b)^2}{4ab} (1 - e^{-\beta abt})}}, \quad \varphi_B(t) = \frac{e^{-\frac{\beta abt}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{(a-b)^2}{4ab} (1 - e^{-\beta abt})}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Соотношение (49) показывает, во-первых, что траекторный эллипс в рамках данной модели прецессирует с постоянной угловой скоростью

$$\kappa = \dot{\psi}(t) = \frac{3kab}{8l^2} = \text{const}. \quad (51)$$

Во-вторых, большая полуось эллипса a_* и его меньшая полуось b_* плавно изменяются во времени, причем закон их изменения нетрудно установить:

$$\begin{aligned} a_*(t) &= \varphi_A(t)|A_0| + \varphi_B(t)|B_0| = \sqrt{ab} \sqrt{\frac{a+b+(a-b)e^{-\frac{\beta abt}{2}}}{a+b-(a-b)e^{-\frac{\beta abt}{2}}}}, \\ b_*(t) &= \varphi_A(t)|A_0| - \varphi_B(t)|B_0| = \sqrt{ab} \sqrt{\frac{a+b-(a-b)e^{-\frac{\beta abt}{2}}}{a+b+(a-b)e^{-\frac{\beta abt}{2}}}}, \end{aligned} \quad (52)$$

откуда видно, что большая полуось a_* с течением времени убывает, тогда как меньшая полуось b_* , напротив, возрастает, однако обе они при $t \rightarrow \infty$ стремятся к общему пределу: $a_* \rightarrow a_\infty = \sqrt{ab}$, $b_* \rightarrow b_\infty = \sqrt{ab}$. Наконец, частота обращения по эллипсу является величиной переменной, равной

$$k_1 = \dot{\theta}(t) = k \left[1 - \frac{ab(a+b)^2 + (a-b)^2 e^{-\beta abt}}{8l^2(a+b)^2 - (a-b)^2 e^{-\beta abt}} \right], \quad (53)$$

и она при $t \rightarrow \infty$ стремится к значению $k_{1\infty} = k \left[1 - a_\infty^2 / (8l^2) \right]$. Таким образом, с течением времени траектория СМ будет выходить на режим конического движения, который определяется выражением:

$$w = \tilde{A}_0 e^{i\tilde{k}t}, \quad \tilde{A}_0 = \left(\frac{a_\infty}{|A_0|} \right)^{1 + \frac{ik}{2l^2\beta}} A_0, \quad \tilde{k} = \kappa + k_{1\infty} = k \left(1 + \frac{a_\infty^2}{4l^2} \right). \quad (54)$$

Этот результат можно было предвидеть изначально, анализируя формулу для диссипативной функции (14), из которой вытекает, что действие диссипативных эффектов прекращается именно на коническом движении, для которого $x^2 + y^2 = \text{const}$. Остается отметить, что режим (54) по своей формульной структуре укладывается в рамки консервативной модели СМ со слабой нелинейностью. В этом нетрудно убедиться, если обратиться к выражению (37), которое при $B_0 = 0$ и $a = b$ (что отвечает коническому движению в консервативной модели со слабой нелинейностью) совпадает с точностью до обозначений с только что полученной формулой для w ($a = b$ вместо $a_\infty = b_\infty$, затем A_0 вместо \tilde{A}_0 , и, кроме того, k_1 вместо $k_{1\infty}$).

В завершение разговора о построении приближенных решений для модели СМ с внутренним трением и консервативной нелинейностью следует упомянуть и об упрощенных моделях, которые можно получить из нее. Так, если положить $\beta = 0$ в системе (41), то получим модель со слабой нелинейностью, для которой из (46) имеем, конечно, $|A| = |A_0|$ и $|B| = |B_0|$. Если при этом выполнить предельный переход при $\beta \rightarrow 0$ в выражении

(49) с учетом (50), то легко убедиться в том, что мы будем иметь формулы (37), как того и следовало ожидать, а из них в свою очередь можно получить и формулы (38) для линейной консервативной модели СМ, о чем уже подробно говорилось выше. Что касается модели, принимающей во внимание только лишь внутреннее трение без учета консервативной нелинейности, то для ее получения необходимо действовать несколько иначе, чем при рассмотрении варианта внешнего вязкого трения. Это связано с тем, что внешнее трение в уравнениях движения имело первый порядок малости, тогда внутреннее трение – третий порядок, т. е. такой же, как и консервативная кубическая нелинейность. Обращаясь к уравнениям (41), замечаем, что для исключения только этой нелинейности следует изъять из уравнений слагаемые, содержащие множителем ik/l^2 . Конечно, это никак не повлияет на уравнения (42), а, стало быть, и на их решения (46). Изымая слагаемые с ik/l^2 из всех последующих выражений, получим в конечном счете:

$$w(t) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \frac{(a-b)^2}{4ab}(1 - e^{-\beta abt})}} e^{ikt} + \frac{B_0 e^{\frac{\beta abt}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{(a-b)^2}{4ab}(1 - e^{-\beta abt})}} e^{-ikt}, \quad (55)$$

откуда следует, что полуоси траекторного эллипса ведут себя по-прежнему в соответствии с формулами (52), однако сам эллипс при этом сохраняет первоначальную ориентацию и постепенно превращается в окружность, а конечный конический режим движения описывается выражением:

$$w(t) = a_\infty \frac{A_0}{|A_0|} e^{ikt}. \quad (56)$$

Разумеется, если положить $\beta = 0$ в выражении (55), то мы в очередной раз придем к формуле (38) для линейной модели СМ, как и следовало ожидать.

Графическая иллюстрация

Перейдем теперь к графической интерпретации всех полученных результатов и представим траекторию движения СМ в проекции на горизонтальную плоскость xu в рамках различных моделей СМ. Для этого зададим начальные условия движения при $t = 0$ в следующем виде: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, $y = y_0$ и $\dot{y} = \dot{y}_0$. Тогда для комплексной переменной w будем иметь при $t = 0$: $w = w_0 = x_0 + iy_0$ и $\dot{w} = \dot{w}_0 = \dot{x}_0 + i\dot{y}_0$. Обращаясь к выражениям (20) и учитывая, что при $t = 0$ имеем $A = A_0$, $B = B_0$, получим для A_0 и B_0 следующие соотношения:

$$A_0 = \frac{1}{2} \left(w_0 + \frac{\dot{w}_0}{ik} \right), \quad B_0 = \frac{1}{2} \left(w_0 - \frac{\dot{w}_0}{ik} \right). \quad (57)$$

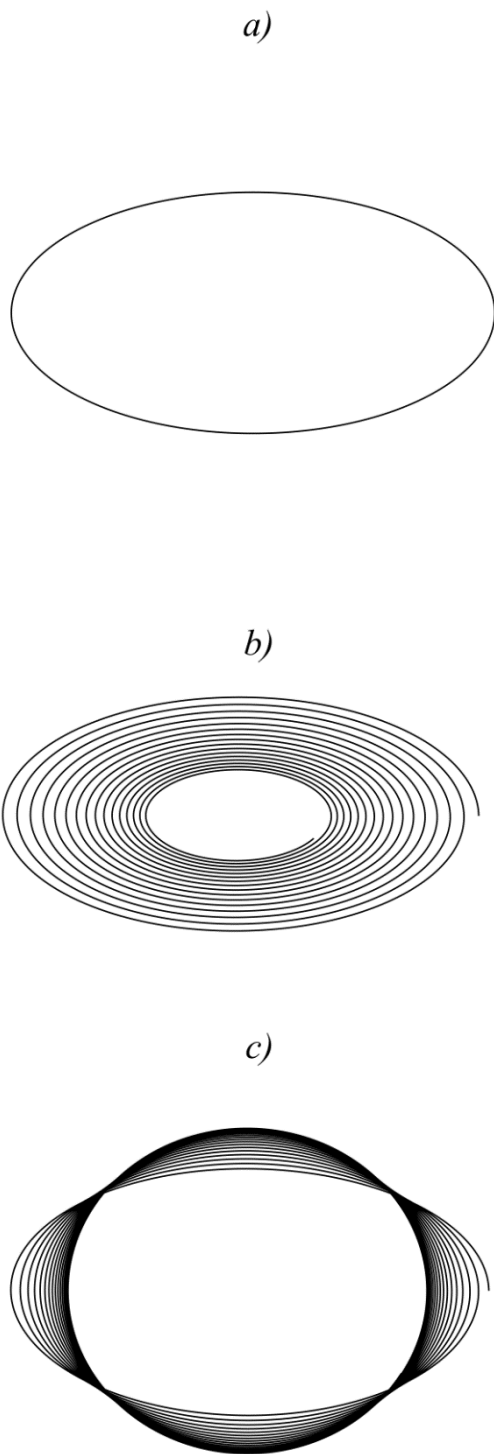


Рис. 2. Траектории СМ в рамках моделей без учета слабой консервативной нелинейности:
a) Консервативной модели;
b) Модели с внешним трением;
c) Модели с внутренним трением

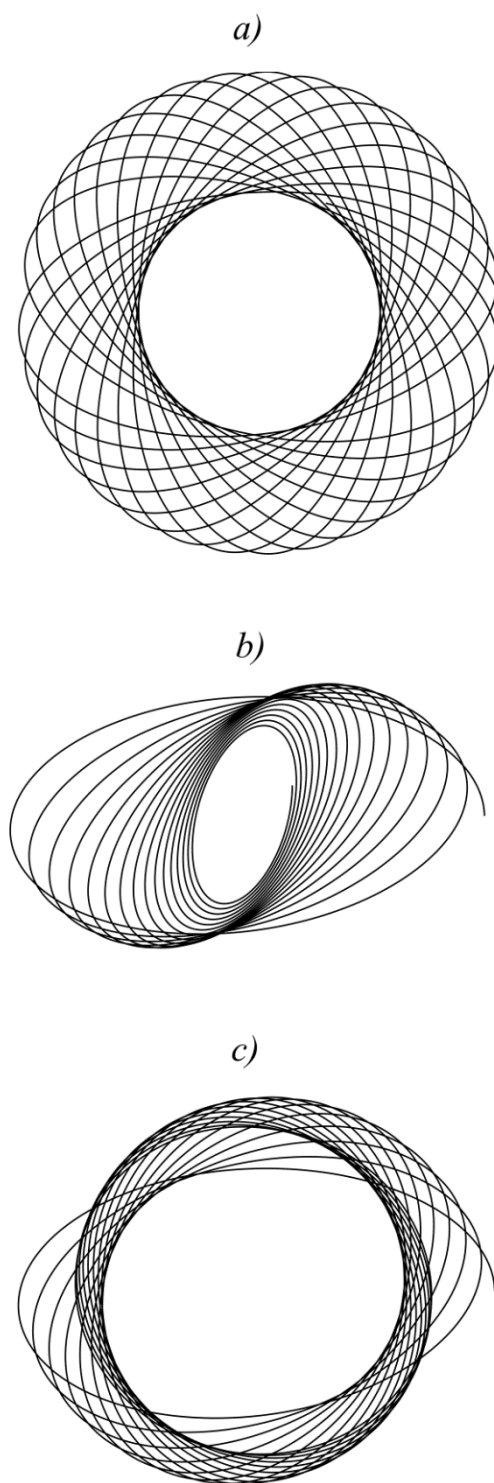


Рис. 3. Траектории СМ в рамках моделей с учетом слабой консервативной нелинейности:
a) Консервативной модели;
b) Модели с внешним трением;
c) Модели с внутренним трением

Ясно, что для создания пространственного движения СМ достаточно задать лишь начальное отклонение x_0 в положительном направлении оси x и начальную скорость \dot{y}_0 в положительном направлении оси y без задания начального отклонения y_0 и в направлении оси y и начальной скорости \dot{x}_0 в направлении оси x (т. е. положить $x_0 > 0$, $\dot{y}_0 > 0$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$). Это означает, что $w_0 = x_0$, $\dot{w}_0 = i\dot{y}_0$, и тогда из (57) находим:

$$A_0 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{\dot{y}_0}{k} \right), \quad B_0 = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{\dot{y}_0}{k} \right), \quad (58)$$

так что константы A_0 и B_0 становятся вещественными, при этом $|A_0| > |B_0|$. Полагая для определенности, что $x_0 > \dot{y}_0 / k$, получим для величин a и b :

$$a = |A_0| + |B_0| = x_0, \quad b = |A_0| - |B_0| = \frac{\dot{y}_0}{k}. \quad (59)$$

Представим теперь траекторию СМ в проекции на горизонтальную плоскость xu в рамках различных моделей. Сначала рассмотрим модели без учета слабой консервативной нелинейности: консервативную модель (рис. 2, *a*), модель с внешним трением (рис. 2, *b*) и модель с внутренним трением (рис. 2, *c*). Формулы, по которым можно построить траекторию в каждом из указанных случаев, имеют соответственно вид (38), (39) и (55), где следует помнить, что $w = x + iy$, так что $x = \operatorname{Re} w$, $y = \operatorname{Im} w$. Далее обратимся к аналогичным моделям с учетом слабой консервативной нелинейности: консервативной модели (рис. 3, *a*), модели с внешним трением (рис. 3, *b*) и модели с внутренним трением (рис. 3, *c*). Формулы, необходимые для построения отвечающих им траекторий, в этом случае имеют соответственно вид (37), (33) и (49). Отметим, что на рис. 2 и рис. 3 оси системы координат xu для большей наглядности построенных траекторий не показаны. Нетрудно видеть, что все приведенные траектории СМ находятся в полном согласии со сделанными выше выводами об их характере и наглядно демонстрируют общие и отличительные черты каждой из рассмотренных моделей.

Заключение

В данной работе был рассмотрен вопрос о построении и анализе моделей СМ, которые одновременно учитывают как собственную консервативную нелинейность СМ, имеющую третий порядок малости, так и действие внешнего вязкого трения со стороны окружающей среды или внутреннего трения в стержне СМ. Уравнения движения, отвечающие этим моделям, были записаны в комплексной форме, что позволило применить для приближенного аналитического решения в обоих вариантах трения метод усреднения для комплексных уравнений. В результате исследования

были получены конечные результаты в компактной форме, которая дает возможность выявить все основные особенности траектории движения СМ в проекции на горизонтальную плоскость. Графическая иллюстрация этих траекторий как для моделей, учитывающих консервативную нелинейность и диссипативные эффекты внешнего или внутреннего трения, так и для моделей, учитывающих лишь один из этих факторов или не учитывающих ни одного, позволяет наглядно проследить переход от простых моделей к сложным и наоборот. Полученные результаты имеют фундаментальное значение для механики маятниковых конструкций, а также могут оказаться полезными и при решении различных практических задач. Наконец, изученные модели СМ допускают дальнейшее развитие и обобщение на более сложные системы с несколькими степенями свободы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смольников Б.А., Смирнов А.С. О соответствии слабо-нелинейной и глобальной моделей сферического маятника. XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Сборник тезисов докладов в 4 томах. Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 г. Т. 1. Общая и прикладная механика. 2023. С. 343–346.
- [2] Смирнов А.С., Смольников Б.А. Механика сферического маятника. СПб.: Политех-пресс, 2019. 266 с.
- [3] Глухих Ю.Д. Колебания сферического маятника с вибрирующей точкой подвеса. Механика твердого тела: межведомственный сборник научных трудов. 2005. Вып. 35. С. 109–114.
- [4] Петров А.Г. Об уравнениях движения сферического маятника с колеблющейся точкой подвеса. Доклады Академии наук. 2005. Т. 405. № 1. С. 51–55.
- [5] Буланчук П.О., Петров А.Г. Об управлении движением сферического маятника с помощью вибрации точки подвеса. Доклады Академии наук. 2010. Т. 430. № 5. С. 627–630.
- [6] Маркеев А.П. О невырожденности функции Гамильтона сферического маятника. Доклады Академии наук. 2010. Т. 430. № 2. С. 189–194.
- [7] Неспирный В.Н., Королев В.А. Стационарные режимы сферического маятника с подвижной точкой подвеса. Механика твердого тела. 2011. Вып. 41. С. 225–232.
- [8] Стадник А.Н., Периг А.В., Дериглазов А.И. Применение относительных декартовых координат для сложного движения сферического маятника. Вестник Севастопольского национального технического университета. Механика, энергетика, экология. 2013. № 137. С. 24–31.

- [9] Довбыш С.А. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и неинтегрируемость многомерных систем. Приложения к задаче о движении сферического маятника с колеблющейся точкой подвеса. *Фундаментальная и прикладная математика*. 2014. Т. 19. Вып. 3. С. 23–90.
- [10] Мамонов Д.В. Задача о сферическом маятнике. Международная молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики». 17–19 ноября 2014 г., Томск. 2015. С. 72–75.
- [11] Заика В.В., Масленников А.Л. Математическое моделирование однозвенного сферического маятника в сферической системе координат. *Политехнический молодежный журнал*. 2019. № 9 (38). С. 1–12.
- [12] Кочетков А.В., Федотов П.В. Новые методические подходы решения сферического маятника в элементарных функциях. Введение в топологическую механику. *Вестник Евразийской науки*. 2019. Т. 11. № 2. С. 1–26.
- [13] Worland, R.S., Moelter, M.J. Two-dimensional pendulum experiments using a spark generator. *The Physics Teacher*, 2000, 38 (8), pp. 489–492.
- [14] Leung, A.Y.T., Kuang, J. L. On the chaotic dynamics of a spherical pendulum with a harmonically vibrating suspension. *Nonlinear Dynamics*, 2006, 43 (3), pp. 213–238.
- [15] Liu, G., Netic, D., Mareels, I. Non-local stabilization of a spherical inverted pendulum. *International Journal of Control*, 2008, 81 (7), pp. 1035–1053.
- [16] Myung-Gon, Y. Dynamics and stabilization of a spherical inverted pendulum on a wheeled cart. *International Journal of Control. Automation and Systems*, 2010, 8 (6), pp. 1271–1279.
- [17] Dullin, H.R. Semi-global symplectic invariants of the spherical pendulum. *Differential Equations*, 2013, 254 (7), pp. 2942–2963.
- [18] Litak, G., Margielewicz, J., Gaska, D., Yurchenko, D., Dąbek, K. Dynamic response of the spherical pendulum subjected to horizontal Lissajous excitation. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 102, pp. 2125–2142.
- [19] Trentin, J.F.S., Santos, D.A., da Silva, S., Schaub, H. Dynamic modeling and control of a spherical pendulum with a VSCMG. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2022, 44, 335.
- [20] Смольников Б.А., Смирнов А.С. Колебания струны с внутренним трением. *Современное машиностроение: Наука и образование*. 2021. С. 192–203.
- [21] Смирнов А.С., Смольников Б.А. Колебания двойного математического маятника с внутренним трением. *Современное машиностроение: Наука и образование*. 2022. С. 113–125.

MOTION OF A SPHERICAL PENDULUM WITH WEAK NONLINEARITY IN THE PRESENCE OF EXTERNAL OR INTERNAL FRICTION

¹Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia;

²Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Russia

Abstract

The work considers the motion of a spherical pendulum taking into account weak conservative nonlinearity and under the influence of external or internal friction forces. For both friction options, a dissipative function is constructed and equations of motion are derived containing the system's own cubic nonlinearity, which are written in a complex form convenient for further actions. Based on the averaging method, an approximate solution is constructed for a system under the action of one or another type of friction, and one can obtain expressions for simpler models from it. The results found are clearly illustrated in the form of trajectories of a spherical pendulum, which correspond to various models, in projection onto the horizontal plane. The solutions obtained make a certain contribution to the theory of motion of a spherical pendulum and can be useful for a variety of practical applications.

Key words: spherical pendulum, weak nonlinearity, external friction, internal friction, averaging method, motion trajectory.

REFERENCES

- [1] Smolnikov, B.A., Smirnov, A.S. On the correspondence between weakly nonlinear and global models of a spherical pendulum. XIII All-Russian Congress on Theoretical and Applied Mechanics. Collection of report abstracts in 4 volumes. St. Petersburg, August 21–25, 2023. Vol. 1. General and applied mechanics. 2023, pp. 343–346. (rus.)
- [2] Smirnov, A.S., Smolnikov, B.A. Spherical pendulum mechanics. St. Petersburg: Polytech-press, 2019. 266 p. (rus.)
- [3] Glukhikh, Yu.D. Oscillations of a spherical pendulum with a vibrating suspension point. Mechanics of Solids: interdepartmental collection of scientific papers, 2005, iss. 35, pp. 109–114. (rus.)
- [4] Petrov, A.G. On the equations of motion of a spherical pendulum with a fluctuating support. Doklady Physics, 2005, 50 (11), pp. 588–592.

- [5] Bulanchuk, P.O., Petrov, A.G. Controlling spherical-pendulum motion with the help of suspension-point vibration. *Doklady Physics*, 2010, 55 (2), pp. 85–88.
- [6] Markeev, A.P. In nondegeneracy of the Hamiltonian function for a spherical pendulum. *Doklady Physics*. 2010, 55 (1), pp. 33–38.
- [7] Nesporny, V.N., Korolyov, V.A. Stationary modes of spherical pendulum with movable suspension point. *Mechanics of Solids*, 2011, 41, pp. 225–232. (rus.)
- [8] Stadnik, A.N., Perig, A.V., Deriglazov, A.I. Introduction of Relative Cartesian Coordinates for the Compound Motion of Spherical Pendulum. *Bulletin of Sevastopol National Technical University. Mechanics, Energy, Ecology*. 2013, 137, pp. 24–31. (rus.)
- [9] Dovbysh, S.A. The Splitting of Separatrices, the Branching of Solutions, and Nonintegrability of Many-Dimensional Systems. Application to the Problem of the Motion of a Spherical Pendulum with an Oscillating Suspension Point. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, 214 (6), pp. 755–801.
- [10] Mamonov, D.V. Problem about a spherical pendulum. International youth scientific conference "Topical problems of modern continuum mechanics and celestial mechanics". November 17–19, 2014, Tomsk. 2015, pp. 72–75. (rus.)
- [11] Zaika, V.V., Maslennikov, A.L. Single-joint spherical pendulum mathematical modeling in spherical coordinate system. *Politechnical Student Journal*, 2019, 9 (38), pp. 1–12. (rus.)
- [12] Kochetkov, A.V., Fedotov, P.V. New methodical approaches of the solution of the spherical pendulum in elementary functions. Introduction to topological mechanics. *The Eurasian Scientific Journal*, 2019, 2 (11), pp. 1–26. (rus.)
- [13] Worland, R.S., Moelter, M.J. Two-dimensional pendulum experiments using a spark generator. *The Physics Teacher*, 2000, 38 (8), pp. 489–492.
- [14] Leung, A.Y.T., Kuang, J. L. On the chaotic dynamics of a spherical pendulum with a harmonically vibrating suspension. *Nonlinear Dynamics*, 2006, 43 (3), pp. 213–238.
- [15] Liu, G., Netic, D., Mareels, I. Non-local stabilization of a spherical inverted pendulum. *International Journal of Control*, 2008, 81 (7), pp. 1035–1053.
- [16] Myung-Gon, Y. Dynamics and stabilization of a spherical inverted pendulum on a wheeled cart. *International Journal of Control. Automation and Systems*, 2010, 8 (6), pp. 1271–1279.
- [17] Dullin, H.R. Semi-global symplectic invariants of the spherical pendulum. *Differential Equations*, 2013, 254 (7), pp. 2942–2963.

- [18] Litak, G., Margielewicz, J., Gaska, D., Yurchenko, D., Dąbek, K. Dynamic response of the spherical pendulum subjected to horizontal Lissajous excitation. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 102, pp. 2125–2142.
- [19] Trentin, J.F.S., Santos, D.A., da Silva, S., Schaub, H. Dynamic modeling and control of a spherical pendulum with a VSCMG. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2022, 44, 335.
- [20] Smolnikov, B.A., Smirnov, A.S. String oscillations with internal friction. *Modern mechanical engineering: Science and education*. 2021, pp. 192–203. (rus.)
- [21] Smirnov, A.S., Smolnikov, B.A. Oscillations of Double Mathematical Pendulum with Internal Friction. *Advances in Mechanical Engineering. MMESE 2022. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2023, pp. 153–163.