

УДК 532.31

doi:10.18720/SPBPU/2/id24-92

А.А. Суханов

## ЦЕПНАЯ ЛИНИЯ В ВОДЕ



Александр Алексеевич Суханов,  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра  
Великого  
Россия, Санкт-Петербург  
Тел.: (812) 552-7801, E-mail: [Alexeevich2012@gmail.com](mailto:Alexeevich2012@gmail.com)

### Аннотация

В работе исследуется влияние силы Архимеда на геометрию и натяжение однородной гибкой нити, помещенной в жидкость. Актуальность исследования обусловлена требованиями безопасности постоянно расширяющегося парка подводных морских и океанических длинномерных объектов, таких как информационные кабели, силовые тросы, трубопроводы и т.п. В литературе достаточно полно изучена механика гибких нитей в воздухе. Если такая нить погружена в жидкость, то во всех расчетах рекомендуется вместо погонного веса нити в воздухе брать погонный вес нити в жидкости с учетом выталкивающей силы Архимеда. Однако, это широко распространенное заблуждение, ибо архимедова сила, как будет показано, не всегда уменьшает вес объекта в жидкости. Правильный учет архимедовой силы приводит к принципиально другим возникающим напряжениям в подводных конструкциях, что необходимо иметь в виду в прочностных и усталостных расчетах.

*Ключевые слова:* гибкая нить, цепная линия, архимедова сила, натяжение.

### Введение

Рассмотрим классическую нерастяжимую гибкую нить, подвешенную за края на одном горизонтальном уровне (рис. 1). Под действием силы тяжести нить принимает форму, называемую цепной линией. Примерами цепных линий являются собственно цепи, тросы, кабели, провода, трубопроводы и т.п. При этом последние можно лишь условно относить к гибким. Однако при достаточно длинных пролетах между точками

закрепления приближенно можно считать и трубопроводы относительно податливыми на изгиб. Основными разыскиваемыми параметрами в статике гибких нитей являются стрела провисания  $f$  и сила натяжения  $T$ , необходимые для пространственного и прочностного расчетов. Впервые задача была решена в конце 17-го века И.Бернулли, Г.Лейбницем и Х.Гюйгенсом [1] и впоследствии дополнена и расширена различными постановками многими исследователями (см., например, [2-10]).

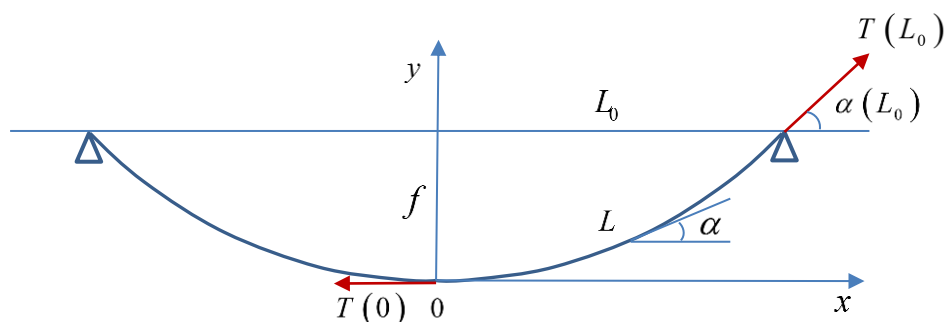


Рис. 1. Цепная линия

Приведем основные соотношения однородной гибкой нерастяжимой нити в воздухе [9, 10].

$$y = a \left( ch \frac{x}{a} - 1 \right), \quad y' = tg \alpha = sh \frac{x}{a}, \quad (1)$$

$$f = a \left( ch \frac{L_0}{a} - 1 \right), \quad \frac{L}{a} = sh \frac{L_0}{a}, \quad (2)$$

$$T = H ch \frac{x}{a}, \quad T_x = T \cos \alpha = H, \quad T_y = T \sin \alpha = H sh \frac{x}{a}, \quad (3)$$

$$T_y(L_0) = q_c L, \quad H = q_c a = Const. \quad (4)$$

Здесь  $L_0$  - половина расстояния между опорами,  $L$  - половина длины цепной линии,  $f$  - стрела провисания,  $\alpha$  - угол наклона нити,  $T$  - натяжение нити,  $T_x = H$  - горизонтальная составляющая натяжения нити (постоянна),  $T_y$  - вертикальная составляющая натяжения нити,  $q_c$  - погонный вес нити в воздухе,  $a$  - параметр, имеющий размерность длины, определяемый геометрией нити из формул (2) по расстоянию между опорами и стреле провисания или по длине нити.

Зависимости (1)-(4) получены для гибкой нити, подвешенной в воздухе. Если соответствующие конструкции расположены в воде или другой жидкости, то всеми исследователями рекомендуется вместо погонного веса нити в воздухе  $q_c$  использовать погонный вес нити в воде, который с учетом архимедовой силы равен

$$q = q_c - q_h, \quad (5)$$

где  $q_h$  - погонный вес вытесненной жидкостной трубки. В этом случае зависимости (1)-(3) сохранятся, а выражения (4) примут вид

$$T_y(L_0) = (q_c - q_h)L, \quad H = (q_c - q_h)a = Const. \quad (6)$$

Однако не все так просто. Формулы (5)-(6) предполагают, что выталкивающая сила Архимеда на любой участок нити действует так же вертикально, как и сила тяжести. И надо, стало быть, учесть результирующую этих двух вертикальных сил, равную их разности. К сожалению, это широко распространенная ошибка, ибо сила Архимеда далеко не всегда вертикальна и, более того, может быть направлена даже не вверх, а вниз!

Остановимся более подробно на этом «парадоксе» архимедовой силы. Дело в том, что сила Архимеда равна поверхностному интегралу векторов давления гидростатических сил по всей омываемой площади погруженного в жидкость тела. Если тело полностью омывается жидкостью, то в соответствии с формулой Остроградского-Гаусса [11] поверхностный интеграл переходит в объемный и результирующая сила Архимеда равна весу вытесненной жидкости, направлена против градиента гидростатического поля давлений, т.е. строго вверх, и приложена к центру масс вытесненного объема жидкости. Однако, если тело или часть тела не полностью омываются жидкостью, то сила Архимеда будет уже совсем другой, не имеющей ничего общего с весом вытесненного объема жидкости. Исключение составляет реальная цепочка, погруженная в жидкость. Каждое звено такой цепочки полностью омывается жидкостью и на него действует классическая сила Архимеда, направленная вверх и равная весу вытесненной жидкости этим звеном. Другим примером может служить гирлянда сосисок, которой часто моделируют гибкие нити. И здесь каждый конечный элемент (сосиска) полностью (за исключением тонкого соединительного хвостика) омывается жидкостью и никаких неувязок с силой Архимеда не возникает.

В нашем случае подводных длинных тросов, кабелей, трубопроводов реальная сила Архимеда будет уже не вертикальна, а нормальна к оси гибкой нити на каждом элементарном участке нити. Это очевидно, ибо сила давления нормальна к поверхности. Однако ниже докажем это утверждение строго. И, разумеется, величина силы Архимеда будет отличаться от классической. Эта особенность длинных подводных нитей произвольного сечения была рассмотрена в [12]. Но до аналитических решений уравнений равновесия нити в жидкости дело тогда не дошло. Проведенные автором численные расчеты нагрузок на конкретные неглубоководные и почти горизонтальные подводные кабели не позволили сделать далеко идущие выводы, к которым удалось прийти в настоящее время.

Приведем простые примеры. На рис. 2 изображена известная олимпиадная задача по физике для школьников. Что будет с деревянным плавающим в аквариуме кубиком, если его прижать ко дну аквариума? Ответ на первый взгляд парадоксален: кубик останется на дне! Однако ничего парадоксального в этом нет. Просто на прижатый ко дну кубик не действует сила давления на нижнюю грань. И результирующая сила Архимеда в этом случае будет не выталкивать кубик, а сильнее прижимать его ко дну. На рис. 2, а сила Архимеда, равная весу вытесненной воды, удерживает кубик на плаву. На рис. 2, б сила Архимеда, равная весу столба воды над кубиком, прижимает кубик ко дну аквариума.

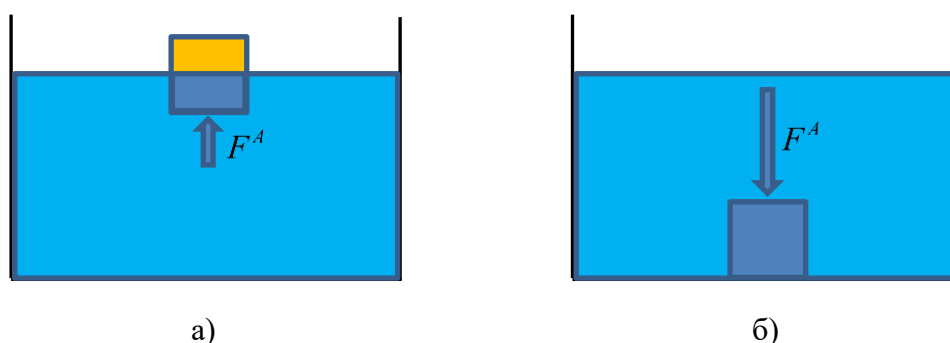


Рис. 2. Деревянный кубик в аквариуме

Рассмотренная коллизия с «залипанием» на дне подводных лодок [13] и затонувших кораблей [14] известна подводникам и спасателям. При этом оторвать ото дна субмарину или судно тем сложнее и тяжелее, чем глубже они затонули, что совершенно естественно. Тем не менее, бытует мнение, что особой проблемы прилипания ко дну нет, т.к. и дно неровное, и днище неплоское. И вода снизу просачивается под днище, тем самым создавая подъемную силу. Но при этом забывается тот факт, что со временем происходит процесс засасывания твердого тела в грунт с выдавливанием этой самой воды из-под днища, и выталкивающая сила давления на днище исчезает.

Чтобы подтвердить «переворачивание» силы Архимеда в реальных условиях, автор провел натурный эксперимент над собой в бассейне. Не повторять!!! Очень опасно! Для этого я на самой малой глубине, «отталкиваясь» руками от воды, не без труда прижался животом к кафельному дну бассейна (рис. 3), предварительно попросив товарища подстраховать меня при необходимости, ибо ясно понимал возможную опасность мероприятия. И меня тут же прижало ко дну бассейна с такой силой, что я не мог оторваться ото дна! Я очень испугался. Потом прикинул, что меня прижала сила Архимеда величиной примерно 200 кг. Я с трудом и на последнем издыхании смог оторваться от кафельного дна бассейна. При этом товарищ ничем не мог мне помочь, ибо при наклонении ко мне он всплывал... Вот так люди и тонут даже на мелководье, подумал я.

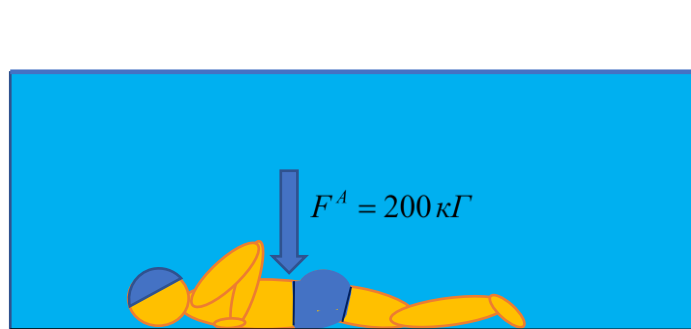


Рис. 3. Человек на дне бассейна

### Вывод уравнений статики цепной линии в воде

Рассмотренные примеры наглядно показали необходимость учета реального распределения архимедовой силы по смачиваемой поверхности. Для глубоководных кабелей, тросов и трубопроводов при расчетах на прочность такой учет является принципиальным. Ниже мы увидим, что разница в подходах может быть недопустимо большой. И результаты отличаются тем значительнее, чем глубже подводные конструкции!

Рассмотрим малый элемент гибкой нерастяжимой нити  $dl$  произвольного, но постоянного осесимметричного сечения  $S$ , погруженный в воду или любую другую жидкость с плотностью  $\rho_h$  (рис. 4). Для простоты под жидкостью будем понимать воду. Подчеркнем, что здесь сила Архимеда  $F^A$  не направлена вверх, как это обычно принимается, а нормальна к оси элемента, т.к. сам элемент не омывается со всех сторон водой, ибо его торцы не соприкасаются с водой. Именно этот факт почему-то упускается из вида при выводе уравнений цепной линии в воде.

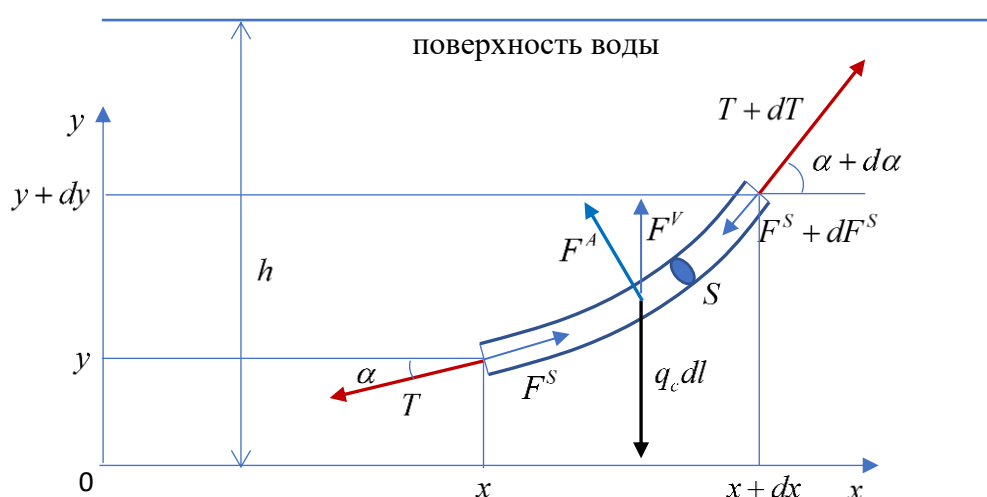


Рис. 4. Малый элемент нити

Здесь начало системы координат также привязано к нижней точке цепной линии,  $x, y$  - координаты начала элемента нити,  $h$  - глубина погружения нити от поверхности воды до нижней ее точки,  $S$  - площадь сечения нити,  $\alpha$  - угол наклона нити,  $T$  - натяжение нити,  $q_c dl$  - вес элемента нити в воздухе,  $F^A$  - архимедова сила, действующая только на боковую поверхность нити,  $F^S$  - подразумеваемая архимедова сила, действующая на торец нити, если бы он омывался водой,  $F^V$  - подразумеваемая (объемная) архимедова сила, действующая на весь элемент нити, если бы он полностью омывался водой, символом  $d$  обозначается бесконечно малое приращение соответствующей переменной.

Главной проблемой при составлении уравнения равновесия нити является сложность получения выражения для архимедовой силы  $F^A$  в удобоваримом виде, пригодном для решения соответствующего дифференциального уравнения. Именно это обстоятельство не позволило получить конечные формулы цепной линии в воде в работе [12]. Поэтому сейчас пойдем другим путем и найдем  $F^A$  через решение обратной задачи. Если элемент нити полностью омывается водой, то вектор выталкивающей (объемной) силы Архимеда  $\mathbf{F}^V$  направлен строго вверх и равен весу вытесненной воды. Тогда его проекции на оси координат равны

$$\begin{aligned} F_x^V &= F_x^A + q_h(h-y)\cos\alpha - q_h(h-y-dy)\cos(\alpha+d\alpha) = 0 \\ F_y^V &= F_y^A + q_h(h-y)\sin\alpha - q_h(h-y-dy)\sin(\alpha+d\alpha) = q_h dl \end{aligned} \quad (7)$$

где  $q_h = \rho_h g S$  - погонный вес вытесненной водяной трубки,  $\rho_h$  - плотность воды или любой другой жидкости,  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$  - ускорение свободного падения. Отсюда легко находим искомые проекции силы Архимеда на боковую поверхность нашего элемента нити

$$\begin{aligned} F_x^A &= -q_h(h-y)\cos\alpha + q_h(h-y-dy)\cos(\alpha+d\alpha) \\ F_y^A &= -q_h(h-y)\sin\alpha + q_h(h-y-dy)\sin(\alpha+d\alpha) + q_h dl \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь можно написать уравнения статики равновесного положения нити в виде проекций всех сил, действующих на каждый элемент нити, имея в виду, что все силы расположены в вертикальной плоскости  $x, y$

$$\begin{aligned} -T\cos\alpha + (T+dT)\cos(\alpha+d\alpha) - q_h(h-y)\cos\alpha + q_h(h-y-dy)\cos(\alpha+d\alpha) &= 0 \\ -T\sin\alpha + (T+dT)\sin(\alpha+d\alpha) - q_h(h-y)\sin\alpha + q_h(h-y-dy)\sin(\alpha+d\alpha) &= \\ = (q_c - q_h)dl \end{aligned} \quad (9)$$

Получившиеся уравнения более громоздкие, нежели у цепной линии в воздухе (см., например, [9, 10]), однако процесс их решения будет отчасти похожим.

Упростим вначале тригонометрию, учитывая малость приращения угла  $d\alpha$ :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + d\alpha) &= \cos \alpha - \sin \alpha d\alpha \\ \sin(\alpha + d\alpha) &= \sin \alpha + \cos \alpha d\alpha\end{aligned}\quad (10)$$

Подставляя (10) в (9) и отбрасывая слагаемые второго порядка малости, получим

$$\begin{aligned}-T \sin \alpha d\alpha + \cos \alpha dT - q_h \cos \alpha dy - q_h (h - y) \sin \alpha d\alpha &= 0 \\ T \cos \alpha d\alpha + \sin \alpha dT - q_h \sin \alpha dy + q_h (h - y) \cos \alpha d\alpha &= (q_c - q_h) dl\end{aligned}\quad (11)$$

Первое уравнение (11) можно представить как

$$d[T \cos \alpha + q_h (h - y) \cos \alpha] = 0,$$

откуда получаем первый интеграл системы

$$[T + q_h (h - y)] \cos \alpha = H = Const. \quad (12)$$

Отметим, что при отсутствии воды ( $q_h = 0$ ) выражения для натяжения нити  $T$  совпадут с классическими (3)-(4). Однако при нахождении цепной линии в воде сила натяжения  $T$  будет зависеть от глубины ее погружения  $h$  и, более того, может даже поменять знак, т.е. из растягивающей силы превратиться в сжимающую! Подробнее об этом эффекте будет рассказано ниже.

Преобразуем теперь аналогично второе уравнение системы (11):

$$d\{[T + q_h (h - y)] \sin \alpha\} = (q_c - q_h) dl. \quad (13)$$

Из уравнения (12) находим

$$[T + q_h (h - y)] = \frac{H}{\cos \alpha}. \quad (14)$$

Подставляя далее (14) в (13) и учитывая, что  $H = Const$ , получаем

$$d(\operatorname{tg} \alpha) = \frac{q_c - q_h}{H} dl. \quad (15)$$

Запишем полезные соотношения:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = y', \quad dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (16)$$

Введем далее постоянный параметр, имеющий размерность длины и определяющий, как будет видно из дальнейшего, конфигурацию цепной линии:

$$a = \frac{H}{q_c - q_h}. \quad (17)$$

Тогда уравнение (15) с учетом (16) и (17) запишется в виде

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{a}. \quad (18)$$

Упростим уравнение в полных дифференциалах (18), сделав замену переменных

$$y' = sh z, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+sh^2 z} = ch z, \quad d(sh z) = ch z dz,$$

благодаря которой получим простое дифференциальное уравнение

$$dz = \frac{dx}{a},$$

решение которого записывается в виде

$$z = \frac{x}{a} + C_1 = arsh y', \quad (19)$$

где константа интегрирования  $C_1 = 0$  из условия  $y'(0) = 0$  в нижней точке цепной линии. Из (19) получаем новое дифференциальное уравнение

$$y' = sh \frac{x}{a},$$

решение которого имеет вид

$$y = a ch \frac{x}{a} + C_2,$$

где константа интегрирования  $C_2 = -a$  из условия  $y(0) = 0$  в нижней точке цепной линии. Таким образом, получаем классическое уравнение цепной линии (1) как функции  $y(x)$

$$y = a \left( ch \frac{x}{a} - 1 \right), \quad y' = tg \alpha = sh \frac{x}{a}. \quad (20)$$

Чтобы определить параметр  $a$ , найдем половину длины цепной линии  $L$ . Из (16) и (20) следует

$$dl = \sqrt{1+y'^2} dx = \sqrt{1+sh^2 \frac{x}{a}} dx = ch \frac{x}{a} dx,$$

откуда

$$L = \int_0^{L_0} dl = \int_0^{L_0} ch \frac{x}{a} dx = ash \frac{L_0}{a} \quad \text{или} \quad \frac{L}{a} = sh \frac{L_0}{a}. \quad (21)$$



Трансцендентное уравнение (21) служит для определения параметра  $a$ , задающего конфигурацию цепной линии (соотношение ее длины и расстояния между опорами).

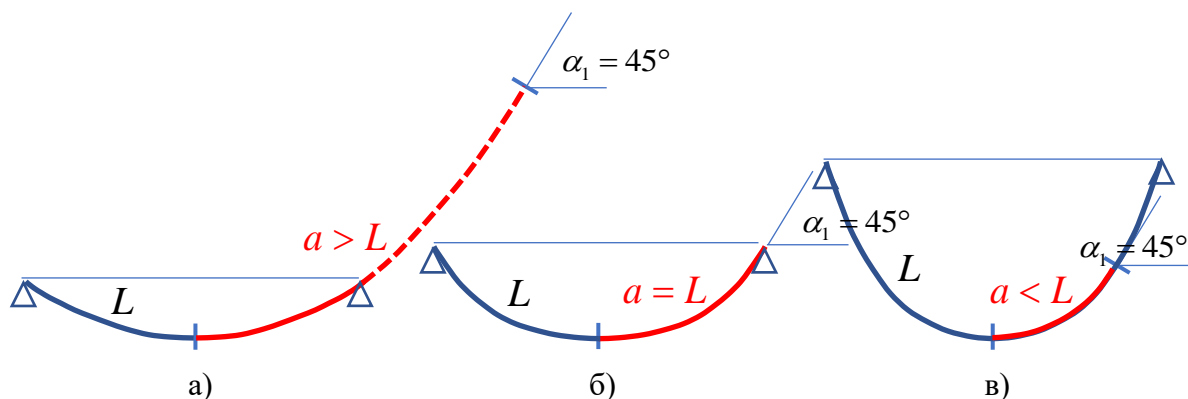
Из геометрических характеристик осталось определить стрелу провисания цепной линии, равную  $y(L_0)$ :

$$f = y(L_0) = a \left( ch \frac{L_0}{a} - 1 \right). \quad (22)$$

**Геометрический вывод.** Уравнения цепной линии в воде (20) - (21) в точности совпали с уравнениями цепной линии в воздухе! Этот факт очевиден, если в качестве выталкивающей силы Архимеда брать вертикально направленную объемную (неправильную) силу, что эквивалентно уменьшению плотности гибкой линии, которая не входит в уравнение статики. Однако совсем другое дело, если прикладывать к каждому участку гибкой нити правильную поверхностную силу Архимеда, которая не равна объемной как по величине, так и по направлению (она направлена по нормали к оси нити). В этом случае распределение внутренних и внешних сил, действующих на каждый элемент гибкой нити, принципиально другое. И тот факт, что даже при этом форма цепной линии та же, представляется удивительным и подлежащим дополнительному осмыслению!

Найдем физический смысл параметра  $a$ , входящего во все формулы. Из (20) и (21) следует, что  $a = L_1$ , где  $L_1$  - дуговая длина (возможно, мыслимая) цепной линии от нижней точки до точки с углом наклона  $\alpha_1 = 45^\circ$  ( $tg \alpha_1 = 1$ ). Удивительно, но эта естественная геометрическая интерпретация почему-то отсутствует в литературе. При малой стреле провисания  $a > L$ , а при большой стреле  $a < L$  (рис. 5). При  $a = L$  стрела провисания равна

$$f = L \left( ch \frac{L_0}{L} - 1 \right) = (\sqrt{2} - 1)L. \quad (23)$$



**Рис. 5.** Различные формы цепных линий:

а) малая стрела, б) средняя стрела, в) большая стрела

Найдем теперь натяжение  $T$  в нити. Заметим, что в силу (20)

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{1 + sh^2 \frac{x}{a}} = ch \frac{x}{a}. \quad (24)$$

Тогда из (12) и (17) с учетом (24) получаем

$$T + q_h (h - y) = \frac{H}{\cos \alpha} = (q_c - q_h) a ch \frac{x}{a}.$$

И окончательно, подставляя  $y$  из (20),

$$T = q_c a ch \frac{x}{a} - q_h (h + a). \quad (25)$$

**Силовой вывод.** Натяжение гибкой нити  $T$  (25) теперь принципиально отличается от общепринятых выражений (3)-(4), даже если вместо погонного веса нити в воздухе подставить ее вес в воде (5). В формулах (3)-(5) натяжение нити не зависит от глубины погружения. А здесь натяжение нити существенно зависит от глубины  $h$ . При этом с увеличением глубины натяжение может даже поменять свой знак, т.е. из растягивающего превратиться в сжимающее! И величина такого натяжения будет расти с глубиной практически неограниченно! Естественно, на воздухе ( $q_h = 0$ ) формула (25) переходит в (3)-(4).

Поверить в такой «парадоксальный» на первый взгляд результат (25) действительно непросто. Проведем мысленный эксперимент, подтверждающий зависимость (25) и опровергающий общепринятые силовые соотношения (3)-(5). Пусть наш кабель (трос, трубопровод) представляет собой гибкую на изгиб, но очень жесткую на растяжение и сжатие пружинку, заключенную в оболочку, не пропускающую воду как с боков, так и с торцов. В воздухе сила тяжести немного растянет такой кабель и в каждом его сечении будут действовать растягивающие (положительные) напряжения. При этом полная реакция  $R$  и ее вертикальная составляющая  $R_y$  на каждой опоре в соответствии с классикой (3)-(4) будут равны

$$R = q_c a ch \frac{L_0}{a}, \quad R_y = q_c L, \quad (26)$$

что не подлежит сомнению. При полном погружении такого кабеля в жидкость в соответствии с объемной (неправильной) моделью архимедовой силы на опору со стороны кабельной пружинки будет действовать в соответствии с (3)-(5) не зависящая от глубины сила растяжения

$$T(L_0) = (q_c - q_h) a ch \frac{L_0}{a} = \text{Const}.$$

Дополнительно на торец такого кабеля будет действовать в том же направлении сила гидростатического давления

$$F^S = \rho_h g (h - f) S = q_h (h - f), \quad (27)$$

пропорциональная глубине погружения торца кабеля. В этом случае результирующая реакция опоры будет также переменной и увеличивающейся с глубиной. Но это противоречит очевидному факту постоянства реакций на опорах независимо от глубины погружения при полном омывании конструкции! Таким образом, общепринятая объемная модель архимедовой силы не является адекватной.

С другой стороны, рассматриваемая поверхностная модель силы Архимеда дает в соответствии с (25) переменную силу внутреннего натяжения кабеля, синхронно увеличивающуюся с глубиной погружения и частично компенсирующую силу давления на торец кабеля. Действительно, суммарная реакция опоры в соответствии с формулами (25), (27) и (22) является постоянной и равной

$$\begin{aligned} R &= T(L_0) + F^S = q_c a ch \frac{L_0}{a} - q_h (h + a) + q_h (h - f) = \\ &= q_c a ch \frac{L_0}{a} - q_h \left( a + a \left( ch \frac{L_0}{a} - 1 \right) \right) = (q_c - q_h) a ch \frac{L_0}{a}. \end{aligned} \quad (28)$$

При этом на большой глубине осевая сила внутреннего натяжения кабеля становится отрицательной (см. (25)), т.е. модельная кабельная пружинка под действием сил Архимеда немного сожмется и будет давить на опоры снизу, что качественно подтверждает формулу (25) и легко снимает «обвинения» в ее «парадоксальности».

Для дополнительной верификации общей реакции (28) найдем ее вертикальную составляющую, используя соотношения (21) и (24):

$$R_y = R \sin \alpha(L_0) = R \cos \alpha(L_0) \operatorname{tg} \alpha(L_0) = (q_c - q_h) a ch \frac{L_0}{a} \frac{1}{ch \frac{L_0}{a}} sh \frac{L_0}{a} = (q_c - q_h) L,$$

что в точности равно половине веса кабеля в воде, как и должно быть.

Таким образом, полученное силовое выражение для внутреннего натяжения гибкой нити (25) не противоречит физике архимедовой силы и выдает правильные реакции для опор в жидкости. В отличие от этого, общепринятые силовые формулы (3)-(5) для гибкой нити, погруженной в жидкость с учетом ее плотности, справедливы лишь для реальной цепочки, состоящей из отдельных звеньев, или гирлянды шарнирно соединенных элементов, для которых поверхностная сила Архимеда превращается в объемную.

**Замечание.** Тонкостенные трубопроводы на больших глубинах испытывают значительные окружные сжимающие напряжения, являющиеся основными при прочностных расчетах [15, 16]. При этом второе слагаемое в осевом натяжении трубопровода (25), пропорциональное глубине и параметру  $a$ , может существенно увеличить возникающие напряжения, что необходимо учитывать при расчетах и строительстве подводных сооружений и коммуникаций.

## Погонная сила Архимеда

Найдем распределенную по длине нити (погонную) силу Архимеда. Запишем проекции силы Архимеда на элемент нити (8) с упрощениями (10)

$$\begin{aligned} F_x^A &= -q_h \cos \alpha dy - q_h (h - y) \sin \alpha d\alpha \\ F_y^A &= -q_h \sin \alpha dy + q_h (h - y) \cos \alpha d\alpha + q_h dl \end{aligned} \quad (29)$$

Чтобы выразить  $dy$  и  $d\alpha$  через элемент  $dl$ , найдем дифференциалы от  $\operatorname{tg} \alpha = sh \frac{x}{a}$

$$d(\operatorname{tg} \alpha) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = d\left( sh \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{a} ch \frac{x}{a} dx ,$$

откуда с учетом (24)

$$dx = \cos \alpha dl, \quad dy = \sin \alpha dl, \quad d\alpha = \frac{1}{a} \cos^2 \alpha dl . \quad (30)$$

Подставляя прогиб  $y$  (20) и дифференциалы (30) в (29) и деля на  $dl$ , находим проекции погонной силы Архимеда вдоль нити

$$f_x^A = -\sin \alpha \cos^2 \alpha \left( 1 + \frac{h}{a} \right) q_h, \quad f_y^A = \cos^3 \alpha \left( 1 + \frac{h}{a} \right) q_h . \quad (31)$$

Найдем величину погонной силы Архимеда

$$f^A = \sqrt{(f_x^A)^2 + (f_y^A)^2} = \cos^2 \alpha \left( 1 + \frac{h}{a} \right) q_h = ch^{-2} \frac{x}{a} \left( 1 + \frac{h}{a} \right) q_h . \quad (32)$$

Осталось проверить нормальность поверхностной силы Архимеда к оси нити. Для этого найдем ее тангенциальную составляющую

$$f_\tau^A = f_x^A \cos \alpha + f_y^A \sin \alpha = -\sin \alpha \cos^2 \alpha \left( 1 + \frac{h}{a} \right) q_h \cos \alpha + \cos^3 \alpha \left( 1 + \frac{h}{a} \right) q_h \sin \alpha = 0,$$

что подтверждает правильность предположений и полученных результатов.

На рис. 6, а представлены традиционные неверные объемные погонные силы Архимеда, на рис. 6, б – правильные поверхностные погонные и торцевые (жирные) силы Архимеда.

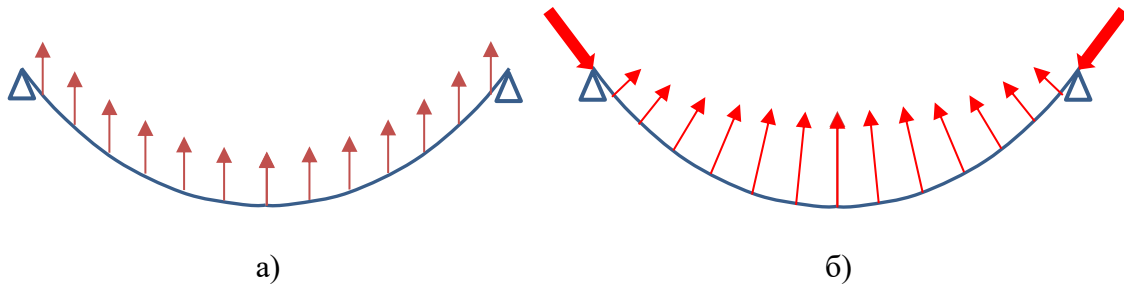


Рис. 6. Погонные и торцевые силы Архимеда

## Заключение

1. Подробно рассмотрена задача статики однородной тяжелой гибкой нити, погруженной в жидкость. При этом в отличие от общепринятого представления архимедовой силы как объемной и вертикально направленной, что не соответствует действительности в общем случае, используется реальная поверхностная сила Архимеда, нормальная к оси нити.

2. Показано, что геометрия такой нити в точности совпадает с цепной линией в воздухе при той же длине и таком же закреплении.

3. Получено правильное распределение натяжения нити по ее длине, принципиально отличающееся от обычно используемого для цепной линии в воздухе с поправкой на плотность жидкости. При этом реальное натяжение может быть много больше традиционного и, более того, может даже сменить знак, превратившись из растягивающего в сжимающее. При определенных конфигурации нити и глубине ее погружения напряжение вдоль нити может даже иметь разные знаки, оставаясь в верхней части у опор растягивающим, а в окрестности нижней точки сжимающим!

4. Указанные обстоятельства и найденные напряжения необходимо учитывать при проектировании подводных сооружений и прокладке трубопроводов и кабелей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Яковлев В.И. Предыстория аналитической механики. - М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 328 с.
- [2] Розенбергер Ф. История физики в новое время. – Л.: ГТТИ, 1933. – 340 с.
- [3] Смольников Б.А. Механика в истории науки и общества. – М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2014. – 608 с.
- [4] Дукельский А.И. Подвесные канатные дороги и кабельные краны. Изд. 3-е, перераб. – М., Л.: Машгиз, 1951. – 398 с.
- [5] Справочник проектировщика /Под ред. Уманского А.А. – М.: Стройиздат, 1960. – 1048 с.
- [6] Щедров В.С. Основы механики гибкой нити. – М.: Машгиз, 1961. – 172 с.
- [7] Алексеев Н.И. Статика и установившееся движение гибкой нити. - М.: Легкая индустрия, 1970. – 272 с.
- [8] Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. - М.: Машиностроение, 1978. - 222 с.
- [9] Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. – М.: Наука, 1980. – 240 с.
- [10] Смирнов А.С., Дегилевич Е.А. Колебания цепных систем: учеб. Пособие. – СПб: Политех-Пресс, 2021. – 246 с.

- [11] Остроградский М.В. Избранные труды. - М.: Изд-во Академии наук СССР, 1958. - 583 с.
- [12] Хейсина В.В, Елисеев В.В., Суханов А.А. Силы, действующие на трубку в жидкости //Материалы межвузовской научной конференции. Ч.3. – СПб: Изд. СПбГТУ, 1999. – С. 58-59
- [13] Платонов А.В. Подводные лодки. – СПб: Полигон, 2002. – 256 с.
- [14] Горз Джозеф Н. Подъем затонувших кораблей. – Л.: Судостроение, 1978. – 352 с.
- [15] Справочник по сопротивлению материалов /Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.
- [16] Павлов П.А., Паршин Л.К., Мельников Б.Е., Шерстнев В.А. Сопротивление материалов: Учебное пособие. – СПб: Лань, 2003. – 528 с.

А.А.Sukhanov

## CHAIN LINE IN THE WATER

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia

### Abstract

The work is devoted to the influence of the Archimedes force on the geometry and tension of a homogeneous flexible cord placed in a liquid. The actuality of the study is connected with safety requirements of the ever-expanding fleet of underwater sea and ocean long objects, such as information cables, power ropes, pipelines, etc. The mechanics of flexible cords in the air has been sufficiently studied in the literature. If cord is in the water then it is recommended to take a linear weight of cord in water in sum with Archimedean force instead of the linear force in air. This is a widely spread error because Archimedean force reduces object weight in water not in all cases. Correct considering of Archimedean force bring us to principally different stress in underwater structures. This should be considered in stress and fatigue analysis.

*Key words:* flexible cord, chain line, Archimedean force, tension.

### REFERENCES

- [1] Yakovlev V.I. Prehistory of analytical mechanics. - M., Izhevsk: Regular and chaotic dynamics, 2001. – 328 p.
- [2] Rosenberger F. History of physics in modern times. – L.: GTTI, 1933. – 340 p.

- [3] Smolnikov B.A. Mechanics in the history of science and society. – M., Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2014. – 608 p.
- [4] Dukelsky A.I. Suspended cable cars and cable cranes. Ed. 3rd, revised – M., L.: Mashgiz, 1951. – 398 p.
- [5] Designer's Handbook /Ed. Umansky A.A. – M.: Stroyizdat, 1960. – 1048 p.
- [6] Shchedrov V.S. Basic mechanics of flexible cord. – M.: Mashgiz, 1961. – 172 p.
- [7] Alekseev N.I. Statics and steady motion of a flexible cord. - M.: Light industry, 1970. – 272 p.
- [8] Svetlitsky V.A. Mechanics of flexible rods and cords. - M.: Mechanical Engineering, 1978. - 222 p.
- [9] Merkin D.R. Introduction to the mechanics of flexible cord. – M.: Nauka, 1980. – 240 p.
- [10] Smirnov A.S., Degilevich E.A. Oscillations of chain systems: textbook. Benefit. – St. Petersburg: Polytech-Press, 2021. – 246 p.
- [11] Ostrogradsky M.V. Selected works. - M.: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1958. - 583 p.
- [12] Kheisina V.V., Eliseev V.V., Sukhanov A.A. Forces acting on a tube in a liquid //Materials of the interuniversity scientific conference. Part 3. – St. Petersburg: Publishing house. St. Petersburg State Technical University, 1999. – P. 58-59
- [13] Platonov A.V. Submarines. – St. Petersburg: Polygon, 2002. – 256 p.
- [14] Gorse Joseph N. Raising sunken ships. – L.: Shipbuilding, 1978. – 352 p.
- [15] Handbook on strength of materials / Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.V. – 2nd ed., revised and additional. – Kiev: Nauk. Dumka, 1988. – 736 p.
- [16] Pavlov P.A., Parshin L.K., Melnikov B.E., Sherstnev V.A. Strength of materials: Textbook. – St. Petersburg: Lan, 2003. – 528 p.