

ISSN 2223-0807

Современное машиностроение: Наука и образование 2024:  
материалы 13-й Международной научной конференции, 20 июня 2024 года  
/ Под ред. А.Н. Евграфова и А.А. Поповича. - СПб.: ПОЛИТЕХ\_ПРЕСС, 2024.

УДК 539.3:534.1

doi:10.18720/SPBPU/2/id24-96

Г.В. Филиппенко

## ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ С НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ. ОБОЛОЧЕЧНЫЕ МОДЫ



Георгий Викторович Филиппенко, к.ф.-м.н., с.н.с.,  
Институт проблем машиноведения РАН  
Россия, Санкт-Петербург,  
Тел.: (812)321-4763,  
E-mail: [g.filippenko@gmail.com](mailto:g.filippenko@gmail.com), [fgv@ipme.ru](mailto:fgv@ipme.ru)

### Аннотация

Актуальными для современной промышленности являются проблемы при проектировании и эксплуатации различных трубопроводов, которые моделируются неоднородными цилиндрическими оболочками. Неоднородность упругих свойств может быть заложена как изначально, так возникнуть и в результате эксплуатации. В статье неоднородная оболочка моделируется слоистой оболочкой (по классической теории Кирхгофа-Лява), неоднородные свойства которой зависят только от радиальной переменной. Рассматриваются свободные гармонические колебания оболочки. Проанализирована область применимости различных моделей усреднения параметров неоднородной оболочки на примере двуслойной оболочки с неоднородностью плотности материала. На основе точного аналитического решения, исследуется влияние неоднородности на собственные частоты оболочки для оболочечных мод.

*Ключевые слова:* водородное охрупчивание, неоднородные оболочки, многослойные оболочки, колебания оболочек,.

## Введение

Цилиндрические оболочки – важный элемент конструкций в технике и строительстве, моделирующий различные трубопроводы, опоры и пр. Неоднородность упругих свойств таких оболочек вдоль радиальной координаты может быть заложена изначально (например, многослойные оболочки), так возникнуть и в результате эксплуатации [1 – 11] (износ, водородное охрупчивание и др.). Что может привести к преждевременному износу трубопроводов и авариям, например, вследствие выхода на опасные режимы колебаний [12, 13]. Неоднородность может быть как кусочно постоянной (однородные слои), так и непрерывно меняющейся функцией, как на всем промежутке, так и внутри слоев.

Особый интерес представляют оболочечные моды. Они характеризуются изменением формы поперечного сечения оболочки (первоначально кругового кольца). Изложенные в литературе асимптотические подходы для учета изменения механических свойств оболочки по её толщине [14, 15] слишком сложны для получения достаточно простых оценочных формул. Поэтому в данной работе усредненные параметры классической оболочки с неоднородностью материала рассчитываются по формулам, приведенным в [16 – 18], но с введением необходимых поправок.

### 1. Модели усреднения неоднородной оболочки

Рассмотрим трубу как тонкую упругую круговую цилиндрическую оболочку. Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , где ось  $z$  совпадает с осью цилиндра, и локальную систему координат  $(t, \mathbf{k}, \mathbf{n})$ , где вектора  $\mathbf{t}, \mathbf{n}$  – касательный и нормальный единичные вектора к оболочке, а вектор  $\mathbf{k}$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . Длина цилиндрической оболочки  $l_0$ , толщина  $h$ . Оболочка занимает область  $R-h/2 \leq r \leq R+h/2$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $-l_0/2 \leq z \leq l_0/2$ . Зависимость всех процессов от времени предполагаем гармонической с частотой  $\omega$ , а временной фактор  $e^{-i\omega t}$  условимся всюду опускать. В качестве переменных, описывающих вибрационное поле, выберем вектор смещений оболочки  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\varphi, z) = (u_t, u_z, u_n)^T$ . Введем срединную поверхность  $r = R$  оболочки и будем отсчитывать от нее по наружной нормали переменную  $y$ .

Материал цилиндрической оболочки предполагаем неоднородным в направлении ее нормали, т.е. будут переменными величинами коэффициент Пуассона  $\nu = \nu(y)$ , объемная плотность  $\rho = \rho(y)$  и модуль Юнга  $E = E(y)$ .

Введем обозначение  $\sigma(y)$  для величины:

$$\sigma(y) = \frac{E(y)}{1 - \nu^2(y)}, \quad (1)$$

имеющей размерность напряжения. Повторяя рассуждения, проведенные в [17], но теперь уже для напряжения  $\sigma(y)$  (1) придем к уравнению нейтральной поверхности оболочки, уравнение которой описывается уравнением

$$r = R_* = R + y_0; \quad (2)$$

где  $R_*$  - эффективный радиус, а  $y_0$  вычисляется по формуле

$$y_0 = \left( \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(y) y dy \right) / \left( \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(y) dy \right). \quad (3)$$

При этом считаем, что параметры оболочки таковы, что если рассмотреть эту оболочку, как однородную с параметрами  $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  равными их среднеинтегральным значениям, то оболочка описывалась бы уравнением Кирхгофа-Лява [19]. Это уравнение можно записать, используя матричный дифференциальный оператор  $\mathbf{L}$  (3\*3), выделив его зависимость от параметров оболочки, в виде

$$\mathbf{L}(C_{1,2}, D_{1,2}, R) \mathbf{u} + h \rho \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

где

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \\ 1 - \nu \end{pmatrix} \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \frac{h^2}{12} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Вернемся к неоднородной оболочке, где параметры оболочки зависят от  $y$ . Разделим оболочку на  $n$  цилиндрических слоев толщиной  $\Delta_j y$ ,  $j = 1, \dots, n$ . И предположим, что для  $j$ -ого слоя выполняется уравнение

$$\mathbf{L}(c_{1,2}(y) \Delta_j y, d_{1,2}(y, y_0) \Delta_j y, R_j) \mathbf{u} + \Delta_j y \omega^2 \rho(y) \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

где  $R_j$  - средняя линия  $j$ -ого слоя и

$$\begin{pmatrix} c_1(y) \\ c_2(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu(y) \\ 1 - \nu(y) \end{pmatrix} \sigma(y), \quad \begin{pmatrix} d_1(y, y_0) \\ d_2(y, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(y) \\ c_2(y) \end{pmatrix} (y - y_0)^2. \quad (7)$$

Если считать, что внутри слоя все переменные и параметры не зависят от  $y$  непосредственно, а зависят от  $y$  посредством номера слоя  $j$ , то, фактически, уравнение (6) - это уравнение типа Кирхгофа-Лява для  $j$ -ого слоя. С радиусом кривизны  $R_j$  и с заменой жесткостей  $D_{1,2}$  (5) на  $d_{1,2}(y, y_0)\Delta_j y$  (7), т.е. здесь происходит учет сдвига нейтральной поверхности оболочки. Переходя к пределу  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta_j y \rightarrow 0$  проинтегрируем уравнение (6) по  $y$  от  $-h/2$  до  $h/2$ . При этом значения  $R_j$  заменяем на  $\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (R+y) dy$  - их "среднеинтегральное значение", равное  $R$ . Так как в дальнейшем смещения  $\mathbf{u}$  будем искать независимыми от  $y$ , то при интегрировании значения смещений  $\mathbf{u}(y)$  заменяем на их средние значения по толщине оболочки  $h$ .

Также будет удобно перейти к новым переменным  $l = l_0 / R$ ,  $\xi = y / h$  и к новым переменным  $z = z / R$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u} / R$ , сохраняя за последними прежние обозначения. В результате получим уравнение

$$\mathbf{L}(C_{1,2}^\#, \beta^2 D_{1,2}^\#(\xi_0)) \mathbf{u} + \omega^2 R^2 \rho_* \mathbf{u} = \mathbf{0}; \quad \rho_* = \int_{-1/2}^{1/2} \rho(\xi) d\xi; \quad \beta = h / R, \quad \xi_0 = y_0 / h \quad (8)$$

где

$$\begin{pmatrix} C_1^\# \\ C_2^\# \end{pmatrix} = \int_{-1/2}^{1/2} \begin{pmatrix} c_1(\xi) \\ c_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi, \quad \begin{pmatrix} D_1^\# \\ D_2^\# \end{pmatrix} = \int_{-1/2}^{1/2} \begin{pmatrix} d_1(\xi, \xi_0) \\ d_2(\xi, \xi_0) \end{pmatrix} d\xi; \quad (9)$$

Далее разделим (пронормируем) уравнение (8) на  $C_1^\# + C_2^\# = \sigma_* = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma(\xi) d\xi$  и придем к уравнению (10), где все переменные, операторы дифференцирования и параметры - безразмерны

$$\mathbf{L}(C_{1,2}^*, \beta^2 D_{1,2}^*(\xi_0)) \mathbf{u} + w^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}; \quad w^2 = \frac{\omega^2 R^2 \rho_*}{\sigma_*^2}, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \end{pmatrix} = \frac{1}{C_1^\# + C_2^\#} \begin{pmatrix} C_1^\# \\ C_2^\# \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} D_1^*(\xi_0) \\ D_2^*(\xi_0) \end{pmatrix} = \frac{1}{C_1^\# + C_2^\#} \begin{pmatrix} D_1^\#(\xi_0) \\ D_2^\#(\xi_0) \end{pmatrix}; \quad (11)$$

Рассмотрим возможные граничные условия для однородной оболочки (4) на её торце  $z = z_0$ . Они описываются уравнениями вида

$$\left( \mathbf{G}_n(C_{1,2}, D_{1,2}, R) \mathbf{u}^4 \right) \Big|_{z=z_0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^4 = (u_t, u_z, u_n, -\partial_z u_n). \quad (12)$$

При этом каждому из четырех основных типов граничных условий (жестким, свободным, шарнирно – опертым и скользящим [19]) отвечает один из матричных дифференциальных операторов  $\mathbf{G}_n$  ( $4 \times 4$ ), где  $n = 1, 2, 3, 4$ , соответственно. В частности, оператор  $\mathbf{G}_1 = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$ . Далее, предполагая зависимость параметров оболочки  $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  от переменной  $y$ , для рассматриваемой здесь неоднородной оболочки, проведем действия с уравнением (12), аналогичные проведенным с уравнением (6), в результате чего придем к граничному условию на торце в виде

$$\left( \mathbf{G}_n^* (C_{1,2}^*, \beta^2 D_{1,2}^*(\xi_0)) \mathbf{u}^4 \right) \Big|_{z=z_0} = \mathbf{0}, \quad (13)$$

Аналогично переписываются и возможные условия сшивания и скачка сил, использующие операторы  $\mathbf{G}_n$ .

Тем самым мы заменили исходную краевую задачу для неоднородной оболочки, краевой задачей для оболочки Кирхгофа-Лява с усредненными параметрами. В дальнейшем будем называть это первым методом.

Недостатком рассмотренного метода является то, что зависимость плотности  $\rho$  от координаты  $y$  входит только как среднеинтегральная (8) и не учитывает вклада составляющей плотности  $\rho_d(\xi) = \rho(\xi) - \rho_*$ , которую назовем “добавкой”.

Заметим, что формально эту добавку можно было бы учесть, разделив уравнение (6) на  $\rho(y)$ , где в этом случае в аргументах оператора  $\mathbf{L}$  в (5) будут фигурировать функции

$$\begin{pmatrix} c_1(y) \\ c_2(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu(y) \\ 1 - \nu(y) \end{pmatrix} \frac{\sigma(y)}{\rho(y)}, \quad \begin{pmatrix} d_1(y, y_0) \\ d_2(y, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(y) \\ c_2(y) \end{pmatrix} (y - y_0)^2, \quad (14)$$

и лишь затем его проинтегрировав. Действуя аналогично, как и выше, и разделив обе части полученного уравнения на  $\nu_*^2$ :

$$\nu_*^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \nu^2(\xi) d\xi, \quad \nu^2(\xi) = \sigma(\xi) / \rho(\xi) \quad (15)$$

получим усредненное уравнение вида (10), где теперь

$$w^2 = \frac{\omega^2 R^2}{\nu_*^2}, \quad \begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\nu_*^2} \int_{-1/2}^{1/2} \begin{pmatrix} c_1(\xi) \\ c_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi, \quad \begin{pmatrix} D_1^* \\ D_2^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\nu_*^2} \int_{-1/2}^{1/2} \begin{pmatrix} c_1(\xi) \\ c_2(\xi) \end{pmatrix} (\xi - \xi_0)^2 d\xi. \quad (16)$$

Однако, вычисления показывают плохое соответствие найденных собственных частот оболочки по этому уравнению, с найденными по

методу конечных элементов (КЭ) в [18], принятыми в качестве эталона. Это объясняется тем, что при таком способе фактически усредняется не баланс упругих и инерционных сил, входящих в уравнение Кирхгофа-Лява, а квадрат скорости волн деформации  $v^2$  срединной поверхности цилиндрической оболочки, т.е. подменяется исходное уравнение.

От этого недостатка избавлен другой способ учета неоднородности плотности. При нем средне интегральная плотность, как и прежде (в первом методе), участвует в балансе упругих и инерционных сил в слое  $[-h/2, h/2]$  оболочки за счет слагаемого (инерционной силы)  $w^2 \mathbf{u} = \frac{\omega^2 R^2 \rho_*}{\sigma_*^2} \mathbf{u}$  в уравнении (10). А добавка теперь дает вклад в изменение эффективного радиуса оболочки  $R_*$ , за счет создаваемого ею момента добавочной инерционной силы. Эту силу учтем, добавив её к силам упругости в (17):

$$R_* = R + y_1; \quad y_1 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1(y) y dy}{\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1(y) dy}; \quad \sigma_1(y) = \kappa^2 \sigma(y) + \omega^2 (\rho(y) - \rho_*) \Phi; \quad \kappa = 1/R, \quad (17)$$

где  $\kappa = 1/R$  - кривизна цилиндрической оболочки, а  $\Phi$  - безразмерный параметр, вид которого конкретизируем позже. Переходя к переменной  $\xi = y/h$  и проводя элементарные преобразования, получим

$$R_* = R + h\xi_1 = R(1 + \beta\xi_1), \quad \xi_1 = \int_{-1/2}^{1/2} \left[ \frac{\sigma(\xi)}{\sigma_*} + w^2 \Phi \frac{\rho(\xi)}{\rho_*} \right] \xi d\xi; \quad w^2 = \frac{\omega^2 R^2 \rho_*}{\sigma_*} \quad (18)$$

При этом координата  $y_0$  по-прежнему вычисляется по формуле (3), т.к. определяется только упругими характеристиками оболочки. В дальнейшем будем называть этот метод – “вторым методом”.

Заметим, что в случае плотности и коэффициента Пуассона, не зависящих от  $y$ , но при переменном модуле Юнга  $E = E(y)$ , этот метод совпадает с методом, приведенным в [18].

## 2. Модальный анализ

Рассмотрим свободные гармонические колебания описанной выше неоднородной оболочки с жёстко зажатыми торцами. Решение задачи ищется в виде:

$$\begin{pmatrix} u_t \\ u_z \\ u_n \end{pmatrix} = A e^{i\lambda z} \begin{pmatrix} \zeta \sin(m\varphi) \\ \xi \cos(m\varphi) \\ \gamma \cos(m\varphi) \end{pmatrix}; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -l/2 < z < l/2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Здесь:  $A, \zeta, \xi, \gamma$  – произвольные константы;  $\lambda$  – искомое волновое число, обезразмеренное на  $R$ . Метод решения аналогичен примененному в [18]. В результате, для каждого  $m$  находится набор безразмерных собственных частот (веток)  $w_j, j=1,2,\dots$ . Размерные частоты  $f$  в Гц восстанавливаются по формуле

$$f_j = \omega_j / 2\pi = \frac{1}{2\pi} \frac{w_j}{R_*} \sqrt{\frac{\sigma_*}{\rho_*}} \quad (20)$$

Соответствующие формы колебаний (моды) будем обозначать парой чисел  $\{m, j\}$ .

Отметим, что и первый и второй методы применимы для любых мод  $m \geq 0$ .

### 3. Вычисления

Для вычислений рассмотрим оболочечные моды, которым отвечают значения  $m \geq 2$ . Они характеризуются изменением формы поперечного сечения, в отличие от мод  $m < 2$ . Будем считать константами коэффициент Пуассона  $\nu$  и модуль Юнга  $E$ . Следовательно, будет константой и напряжение  $\sigma$  в (1). В этом случае координата  $y_1$  в (17) выражается формулой

$$y_1 = h\xi_1, \quad \xi_1 = w^2 \Phi \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\rho(\xi)}{\rho_*} \xi d\xi. \quad (21)$$

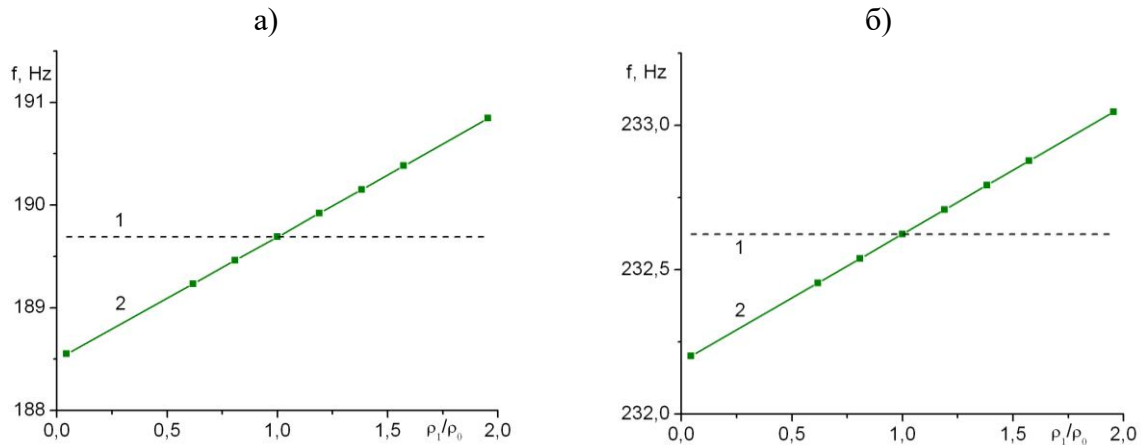
Плотность  $\rho$  возьмем кусочно-постоянной (случай двуслойной оболочки)

$$\rho(\xi) = \begin{cases} \rho_1, & -1/2 < \xi < 0, \\ \rho_2, & 0 < \xi < 1/2, \end{cases} \quad \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \rho_0. \quad (22)$$

Заметим, что узловые линии на поверхности оболочки делят ее на прямоугольные области со сторонами:  $l_0/j$  вдоль  $z$  и  $2\pi R/m$  вдоль окружной координаты. Потoki энергии через эти линии отсутствуют. Процессы внутри каждой площадки, определяются циркуляцией потока энергии внутри нее. Поэтому положим добавочную инерционную массу в (21) пропорциональной площади  $S = \frac{l_0}{j} \frac{2\pi R}{m}$  такой площадки, что приводит

к значению  $\Phi = \frac{l_0/R}{j} \frac{2\pi}{m}$  в (21).

Для расчета представленных графических зависимостей в Фортране [20] взяты следующие безразмерные параметры оболочки:  $\nu=0.3$ ,  $h/R=0.05$ ,  $l_0/R=20$ . Используются также размерные параметры оболочки:  $R=0.5$  м,  $E=2.1 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho_0=7850$  кг/м<sup>3</sup>,  $l_0=10$  м. Такие параметры оболочки близки к параметрам стальных труб магистральных газопроводов с диаметром 720 – 1420 мм.



**Рис. 1.** Зависимость собственной частоты оболочки  $f$  от относительной плотности  $\rho_1/\rho_0$ : а) мода {3, 1}, б) мода {3, 5}.

На рис. 1, а, б изображены зависимости собственных частот  $f$  оболочки как функций относительной плотности  $\rho_1/\rho_0$ , вычисленные двумя, рассмотренными выше, методами. Для вычислений подбирались значения плотности слоев  $\rho_1$  и  $\rho_2$  так, чтобы средне-интегральное значение плотности  $\rho_* = (\rho_1 + \rho_2)/2$  оставалось неизменным и равным  $\rho_0$ . Поэтому расчет частот по первому методу не выявляет такой “асимметрии” плотности слоев и дает горизонтальную пунктирную линию 1. А второй метод демонстрирует линейную зависимость: с относительным “утяжелением” внутреннего слоя (ростом  $\rho_1/\rho_0$ ), частоты  $f$  линейно растут (пропорционально уменьшению эффективного радиуса  $R_*$ ), что вызвано уменьшением моментов в оболочке относительно ее оси.

Полученные результаты (рис. 1, б) коррелируют с результатами счета на КЭ пакете ANSYS (принятыми в качестве эталона) в работе [18] на рис. 7б, которые также показывают линейный рост частоты  $f$  с ростом  $\rho_1/\rho_0$ . Обозначим частоты, полученные вторым методом и КЭ пакетом для фиксированного значения  $\rho_1/\rho_0$ , как  $f_F$  и  $f_A$ , соответственно.

Достаточно слабая зависимость собственной частоты  $f$  от относительной плотности  $\rho_1/\rho_0$  ведет к тому, что максимальная относительная погрешность определения частоты вторым методом и КЭ пакетом составляет примерно  $100\% \cdot |f_F - f_A|/f_A \approx 0,2\%$  для всего промежутка



изменения  $\rho_1/\rho_0$  на указанных рисунках и сопоставима с погрешностью в 0,1% самой однородной модели Кирхгофа-Лява (при  $\rho_1/\rho_0=1$ ). Поэтому более информативно анализировать относительную погрешность тангенса угла наклона соответствующих прямых, выражающих зависимости  $f$  от  $\rho_1/\rho_0$ , на этих рисунках. Она составляет  $\approx 30\%$ .

Заметим, что формулой (21) можно пользоваться не только в случае постоянных значений коэффициента Пуассона и модуля Юнга, но также, если выполнено соотношение  $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sigma(\xi)}{\sigma_*} \xi d\xi \ll w^2 \Phi \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\rho(\xi)}{\rho_*} \xi d\xi$  в (18).

## Выводы

Проанализирована область применимости различных моделей усреднения параметров неоднородной оболочки на основе теории классических оболочек. Неоднородные свойства предполагаются зависящими только от радиальной переменной,

На примере двуслойной оболочки проведены расчеты частот свободных колебаний трубы с неоднородностью плотности материала по радиальной переменной. Проведенные сравнения моделей усреднения оболочки показали ограниченность применения первого метода, который учитывает только усредненное значение плотности оболочки. Показано, что второй метод позволяет учесть добавку к средней плотности оболочки. Для рассмотренных в статье оболочечных мод второй метод показал линейный рост частоты с ростом плотности внутренней части оболочки.

В совокупности с ранее полученными результатами [18], рассмотренные методы позволяют расширить класс точно решаемых гранично – контактных задач с однородными цилиндрическими оболочками типа Кирхгофа-Лява на класс неоднородных оболочек, описанный в статье. Это дает возможность исследовать эффекты, вызванные неоднородностью оболочек. Например, оценивать изменение частот оболочки, вследствие ее водородного охрупчивания. А также могут быть полезны для КЭ пакетов, в качестве начального приближения для улучшения сходимости численных алгоритмов.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации. Регистрационный номер госбюджетного задания: 124040800009-8.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cheng Y.F. (Ed.) Stress Corrosion Cracking of Pipelines. 2013. John Wiley & Sons, Inc.: Hoboken, TX, Canada. p. 275.

- [2] Titov A.I., Lun-Fu A.V., Gayvaronskiy A.V., Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Lider A.M., Syrtanov M.S., Kudiiarov V.N. Hydrogen Accumulation and Distribution in Pipeline Steel in Intensified Corrosion Conditions. 2019. *Materials*, 12(9): 1409. Doi:10.3390/ma12091409.
- [3] Mytsyk B.G., Ivanytskyi Ya.L., Balitskii A.I., Kost' Ya.P., Sakharuk O.M. Study of hydrogen influence on 1020 steel by low deformation method. 2016. *Materials Letters*, Volume 184. pp. 328-331. Doi: 10.1016/j.matlet.2016.08.065.
- [4] Zhukov V.A. Stress corrosion cracking and electrochemical potential of titanium alloys. 2015. *Advances in Mechanical Engineering, Lecture Notes in Mechanical Engineering*. pp. 137-141.
- [5] Polyanskiy V.A., Belyaev A.K. (eds). *Advances in Hydrogen Embrittlement Study. Advanced Structured Materials*. 2021. Springer, Cham. XII, p. 213. Doi: 10.1007/978-3-030-66948-5.
- [6] Yagodzinsky Y., Saukkonen T., Andronova E., Rissanen L., Hanninen H. Hydrogen-Induced Cracking of Metastable Austenitic Stainless and High-Strength Carbon Steels. *Effects of Hydrogen on Materials: Proceedings of the 2008 International Hydrogen Conference*, Edited by Brian Somerday, Petros Sofronis, Russell H. Jones. 2009. ASM International, Materials Park, pp. 123-130.
- [7] Lawrence S. K., Somerday B. P., Ingraham M. D., Bahr D. F. Probing the Effect of Hydrogen on Elastic Properties and Plastic Deformation in Nickel Using Nanoindentation and Ultrasonic Methods. 2018. *JOM*, 70(7). pp. 1068-1073. Doi:10.1007/s11837-018-2850-z.
- [8] Müller C., Zamanzade M., Motz C. The Impact of Hydrogen on Mechanical Properties; A New In Situ Nanoindentation Testing Method. 2019. *Micromachines*, 10(2). p. 114. <https://doi.org/10.3390/mi10020114>.
- [9] Чулкин С.Г., Зиновьева Т.В. Расчет влияния водорода на прочность морского трубопровода. 2019. *Морские интеллектуальные технологии* №2 (44) Т.1. С.31-35. Doi: 10.13140/RG.2.2.22027.34088.
- [10] Зиновьева Т.В. Влияние концентрации водорода на растрескивание трубы. 2020. *Современное машиностроение: Наука и образование: материалы 9-й Международной научно-практической конференции / Под ред. А.Н.Евграфова и А.А. Поповича.- СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС. С.196-206. Doi: 10.1872/MMF-2020-15.*
- [11] Filippenko G.V., Zinovieva T.V. Analysis of axisymmetric vibrations of a hydrogen weakened pipe in a layered shell model. 2022. *Advances in Mechanical Engineering, LNME*. pp. 78–85. Doi: 10.1007/978-3-030-91553-7\_9
- [12] Filippenko G.V., Zinovieva T.V. Axisymmetric Vibrations of the Cylindrical Shell Loaded with Pointed Masses. 2021. *Advances in Mechanical Engineering. MMESE 2020. Lecture Notes in Mechanical*

- Engineering. Springer, Cham. pp. 80-91. Doi: 10.1007/978-3-030-62062-2\_9.
- [13] Filippenko G.V., Zinovieva T.V. Axially Symmetric oscillations of circular cylindrical shell with localized mass on Winkler foundation. 2022. APM 2020, LNME. pp. 245–257. Doi: 10.1007/978-3-030-92144-6\_19.
- [14] Вильде М.В., Коссович Л.Ю., Шевцова Ю.В. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки. 2012. Известия Саратовского Университета (N. S.), Серия Мат. Мех. Инф. 12(2), с. 56–64. Doi: 10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64.
- [15] Kaplunov J.D., Kossovich I.Yu, Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. 1988. San Diego: Academic Press. 226 p.
- [16] Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. 1975. М.: Машиностроение. 376 с.
- [17] Филиппенко Г.В., Зиновьева Т.В. Неосесимметричные колебания газопровода, ослабленного водородной коррозией, на основе модели неоднородной оболочки // Современное машиностроение: Наука и образование: материалы 11-й Международной научной конференции. – СПб.: ПОЛИТЕХ ПРЕСС, 2022. – С. 210–222. <https://elibrary.ru/gprvxh>.(РИНЦ)
- [18] Филиппенко Г.В., Зиновьева Т.В. Модальный анализ трубы, поврежденной водородом, как неоднородной по толщине оболочки // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – No 3. – С. 170–182. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.17
- [19] Елисеев В.В. Механика упругих тел. 2003. СПб.: Изд-во СПбГПУ. 336 с.
- [20] Chapra S.C., Canale R.P. Numerical Methods for Engineers. 2015. 970 p.

G.V. Filippenko

## **HARMONIC VIBRATIONS OF A CYLINDRICAL ELASTIC SHELL WITH INHOMOGENEOUS DENSITY. SHELL MODES.**

Institute for Problems in Mechanical Engineering (IPME RAS)  
of the Russian Academy of Science, St.-Petersburg, Russia

### **Abstract**

Actual for modern industry are problems in the design and operation of various pipelines, which are modelled by inhomogeneous cylindrical shells. The

inhomogeneity of elastic properties can be inherent from the beginning, or it can arise as a result of operation. In the paper such a shell is modelled by a layered shell according to the classical Kirchhoff-Love theory, the inhomogeneous properties of which depend only on the radial variable. Free harmonic vibrations of the shell are considered. The area of applicability of different models of averaging of inhomogeneous shell parameters is analysed on the example of a two-layer shell with inhomogeneity of material density. On the basis of the exact analytical solution, the influence of inhomogeneity on the shell natural frequencies for the shell modes is investigated.

*Key words:* hydrogen corrosion, non-homogeneous shells, multilayer shell, shell vibrations.

## REFERENCES

- [1] Cheng Y.F. (Ed.) Stress Corrosion Cracking of Pipelines. 2013. John Wiley & Sons, Inc.: Hoboken, TX, Canada. p. 275.
- [2] Titov A.I., Lun-Fu A.V., Gayvaronskiy A.V., Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Lider A.M., Syrtanov M.S., Kudiiarov V.N. Hydrogen Accumulation and Distribution in Pipeline Steel in Intensified Corrosion Conditions. 2019. *Materials*, 12(9): 1409. Doi:10.3390/ma12091409.
- [3] Mytsyk B.G., Ivanytskyi Ya.L., Balitskii A.I., Kost' Ya.P., Sakharuk O.M. Study of hydrogen influence on 1020 steel by low deformation method. 2016. *Materials Letters*, Volume 184. pp. 328-331. Doi: 10.1016/j.matlet.2016.08.065.
- [4] Zhukov V.A. Stress corrosion cracking and electrochemical potential of titanium alloys. 2015. *Advances in Mechanical Engineering, Lecture Notes in Mechanical Engineering*. pp. 137-141.
- [5] Polyanskiy V.A., Belyaev A.K. (eds). *Advances in Hydrogen Embrittlement Study. Advanced Structured Materials*. 2021. Springer, Cham. XII, p. 213. Doi: 10.1007/978-3-030-66948-5.
- [6] Yagodzinskyy Y., Saukkonen T., Andronova E., Rissanen L., Hanninen H. Hydrogen-Induced Cracking of Metastable Austenitic Stainless and High-Strength Carbon Steels. *Effects of Hydrogen on Materials: Proceedings of the 2008 International Hydrogen Conference*, Edited by Brian Somerday, Petros Sofronis, Russell H. Jones. 2009. ASM International, Materials Park, pp. 123-130.
- [7] Lawrence S. K., Somerday B. P., Ingraham M. D., Bahr D. F. Probing the Effect of Hydrogen on Elastic Properties and Plastic Deformation in Nickel Using Nanoindentation and Ultrasonic Methods. 2018. *JOM*, 70(7). pp. 1068-1073. Doi:10.1007/s11837-018-2850-z.
- [8] Müller C., Zamanzade M., Motz C. The Impact of Hydrogen on Mechanical Properties; A New In Situ Nanoindentation Testing Method. 2019. *Micromachines*, 10(2). p. 114. <https://doi.org/10.3390/mi10020114>.

- [9] Chulkin S.G., Zinovieva T.V. Calculation of hydrogen influence on strength of marine pipeline. 2019. Marine Intellectual technologies, №2 (44), V.1. pp.31-35. (rus.)
- [10] Zinovieva T.V. Influence of hydrogen concentration on pipe cracking. 2020. Modern mechanical engineering: Science and education. p. 196-206. Doi: 10.1872/MMF-2020-15. (rus.)
- [11] Filippenko G.V., Zinovieva T.V. Analysis of axisymmetric vibrations of a hydrogen weakened pipe in a layered shell model. 2022. Advances in Mechanical Engineering, LNME. pp. 78–85. Doi: 10.1007/978-3-030-91553-7\_9.
- [12] Filippenko G.V., Zinovieva T.V. Axisymmetric Vibrations of the Cylindrical Shell Loaded with Pointed Masses. 2021. Advances in Mechanical Engineering. MMESE 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. pp. 80-91. Doi: 10.1007/978-3-030-62062-2\_9.
- [13] Filippenko G.V., Zinovieva T.V. Axially Symmetric oscillations of circular cylindrical shell with localized mass on Winkler foundation. 2022. APM 2020, LNME. pp. 245–257. Doi: 10.1007/978-3-030-92144-6\_19.
- [14] Wilde M.V., Kossovich L.Y., Shevzova Y.V. Asymptotic integration of dynamic elasticity theory equations in the case of multilayered thin shell. 2012. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., vol. 12, iss. 2. pp. 56-64. Doi: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64>. (rus.)
- [15] Kaplunov J.D., Kossovich I.Yu, Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. 1988. San Diego: Academic Press. 226 p.
- [16] Karmishin A.V., Lyaskovec V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N. Statics and dynamics of thin-walled shell structures. 1975. M.: Mashinostroenie. 376 c. (rus.)
- [17] Filippenko G.V., Zinovieva T.V. Non-axisymmetric vibrations of a gas pipeline weakened by hydrogen corrosion, based on an inhomogeneous shell model. 2022. Modern mechanical engineering: Science and education (11<sup>th</sup> International conference MMESE-2022). p. 210—222. (rus.)
- [18] Filippenko G.V., Zinovieva T.V. Modal analysis of a hydrogen-damaged pipe as shell inhomogeneous on thickness. PNRPU Mechanics Bulletin, 2022, no. 3, pp. 170-182. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.17.
- [19] Eliseev V.V. Mechanics of Deformable Solids. 2003. St. Petersburg, Polytechnic University Press. 336 p. (rus.)
- [20] Chapra S.C., Canale R.P. Numerical Methods for Engineers. 2015. 970 p.