

УДК 531.395

doi:10.18720/SPBPU/2/id-107

Р.М. Киселев

## **ВЫЧИСЛЕНИЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ КОЛЬЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА ММГ, ВЫЗВАННОЕ ОТКЛОНЕНИЯМ ЕГО ГЕОМЕТРИИ**



Роман Михайлович Киселев,  
Московский государственный технический университет им.  
Н.Э. Баумана  
Россия, Москва  
Тел.: (499) 263-68-34, E-mail: kiselev.rom@bmstu.ru.

### **Аннотация**

Одним из важных элементов современных мехатронных и робототехнических систем являются датчики [1, 2]. Большой интерес представляет вопрос проектирования малогабаритных датчиков угловых скоростей, которые широко применяются в различных областях промышленности [3, 4]. Среди огромного разнообразия датчиков угловых скоростей в последние годы всё большее внимание уделяется проектированию микромеханических гироскопов (ММГ). Основной проблемой ММГ является высокая зависимость качественных показателей от отклонений геометрических и физических параметров резонатора [5]. В работе рассмотрены вопросы определения расщепления собственных частот колебаний кольцевых резонаторов ММГ, вызванных малым отклонением радиуса срединной поверхности резонатора. В качестве результата работы предлагается энергетический метод вычисления собственных частот колебаний кольцевого резонатора, адаптированный к геометрическим отклонениям. По итогам расчета показано, что наибольшее расщепление собственной частоты вызывается 2 и 4 гармониками отклонения радиуса.

*Ключевые слова:* кольцевой гироскоп, микромеханический гироскоп, кольцевой резонатор, расщепление собственных частот

## Введение

Гироскопы – класс устройств способных реагировать на изменение углов ориентации тела относительно инерциальной системы отсчета. Гироскопы нашли обширное применение в различных областях промышленности. Огромную роль гироскопы играют в системах наведения и навигации. На данный момент громоздкие гироскопы на базе гироскопов Фуко ушли в прошлое, а их место заняли миниатюрные лазерные, волоконно-оптические, электростатические, ядерные, микромеханические, твердотельные и другие виды гироскопов [3].

Среди различных видов гироскопов стоит выделить твердотельные волновые гироскопы (ТВГ) и, базирующиеся на них, микромеханические гироскопы (ММГ). Данные гироскопы обладают рядом преимуществ, главным из которых является простота, ММГ состоят всего лишь из 4 элементов (рис. 1): 1 – резонатор, 2 – крепления (ламели), 3 – система электродов позиционного возбуждения, 4 – система датчиков перемещения. ММГ относительно просты в изготовлении, резонатор и крепления как правило изготавливаются методом химического травления стекла или кремния, что позволяет автоматизировать процесс производства. В сравнении с аналогами ММГ также выделяются сравнительно небольшой ценой [6].

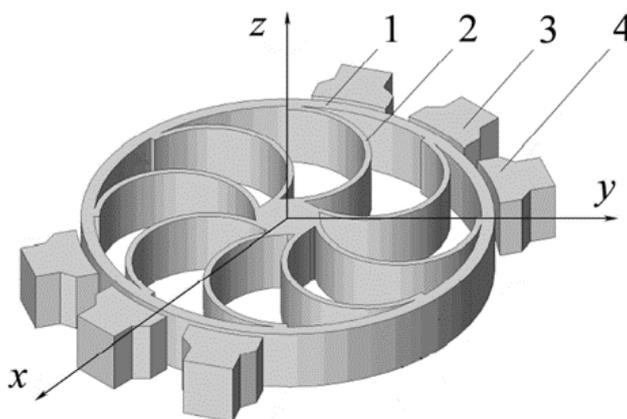


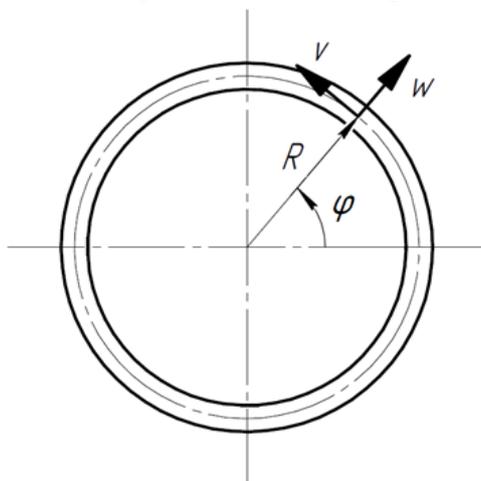
Рис. 1. Микромеханический гироскоп с кольцевым резонатором

Однако, ММГ обладают также рядом недостатков в сравнении с аналогами и прежде всего лазерными гироскопами, работа прибора очень сильно чувствительна к различного рода дефектам (дефекты массы, геометрии, погрешность возбудителей колебаний [7, 8]), а также к эффектам демпфирования (газовое демпфирование, термоэластическое демпфирование, демпфирование Акхайзера, Анкерное демпфирование и др. [9]). Не смотря на большое количество проблем во многих работах высказывается мнение о том, что при должном анализе влияния различного

рода дефектов на работу устройства задача предсказания поведения устройства при дефектах и задача уменьшения влияния дефектов на работу является реальной, а как следствие мы можем получить устройство с высокой точностью работы соизмеримой с более дорогими аналогами [10]. Для повышения точности работы прибора проводят оценку его работу, а затем балансировку в соответствии с известными на данный момент моделями влияния дефектов на прибор. Существует множество работ, посвященных анализу влияния дефектов на работу ММГ, однако стоит отметить, что многие явления до сих пор является малоизученными и слабо предсказуемыми (до сих пор не существует достоверно подтвержденной математической модели, описывающей анкерное демпфирование), также не существует единого метода оценки влияния дефектов, как правило влияния дефектов оцениваются по отдельности без учета их взаимного влияния друг на друга, в связи с этим исследование вопросов о влияние различных дефектов и демпфирующих явлений на работу ММГ по сей день остается актуальной и крайне востребованной.

## Методы

Итак, как уже было сказано в данной работе предлагается рассмотреть расщепление собственных частот, вызванной отклонением геометрических параметров. В качестве математической модели, описывающей динамику кольцевого резонатора, была выбрана кольцевая модель, описанная в работе [11]. Расчетная схема модели представлена на рис. 2.



**Рис. 2.** Расчетная схема кольцевой модели

Однако, данная модель требует определенной доработки. Для кольцевой модели можно задать только одним видом геометрических дефектов – дефект радиуса. Представим функцию радиуса в виде:

$$R(\varphi) = R_0 + \Delta R(\varphi), \quad (1)$$

где  $R_0$  – радиуса срединной линии идеального резонатора (средний радиус неидеального резонатора),  $\Delta R(\varphi)$  – отклонение радиуса.

Отклонение радиуса от среднего радиуса можно представить в виде ряда:

$$\Delta R(\varphi) = \sum_{m=1}^n R_m \cos(m\varphi), \quad (2)$$

где  $m$  – номер гармоники дефекта радиуса,  $R_m$  – амплитуда дефекта радиуса.

Получим условие нерастяжимости некругового кольца и выражение для кривизны в соответствии с общей теорией оболочек [12]. Зададим геометрию некругового кольца в декартовой системе координат:

$$\begin{cases} x(\varphi) = R(\varphi) \cos(\varphi) \\ y(\varphi) = R(\varphi) \sin(\varphi) \end{cases} \quad (3)$$

Масштабный коэффициент (параметр Ламе) можно определить по формуле:

$$A = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} \quad (4)$$

С учетом (3) выражение (4) принимает вид:

$$A = \sqrt{R_0^2 + 2R_0 \Delta R + 2\Delta R^2 + \left(\frac{d\Delta R}{d\varphi}\right)^2} \quad (5)$$

Орт касательной:

$$\bar{t} = \frac{1}{A} \frac{dx}{d\varphi} \bar{i} + \frac{1}{A} \frac{dy}{d\varphi} \bar{j} \quad (6)$$

Орт нормали:

$$\bar{n} = \frac{1}{A} \frac{dy}{d\varphi} \bar{i} - \frac{1}{A} \frac{dx}{d\varphi} \bar{j} \quad (7)$$

Орт нормали и касательной связаны соотношением:

$$\bar{n}\kappa = \frac{1}{A} \frac{d\bar{t}}{d\varphi}, \quad (8)$$

где  $\kappa$  – кривизна.

Тогда кривизна будет определяться выражением:

$$\kappa = \sqrt{\left(\frac{d}{A d\varphi} \left(\frac{dx}{A d\varphi}\right)\right)^2 + \left(\frac{d}{A d\varphi} \left(\frac{dy}{A d\varphi}\right)\right)^2} \quad (9)$$

С учетом линейризации выражения (9) получим выражения для кривизны:

$$\kappa = \frac{1}{R_0^3} \left[ \frac{dW}{d\varphi} \frac{d\Delta R}{d\varphi} - R_0 \frac{d^2W}{d\varphi^2} + 2\Delta R \frac{d^2W}{d\varphi^2} + \right. \\ \left. + W \left( -R_0 + 2\Delta R + 2 \frac{d^2\Delta R}{d\varphi^2} \right) - V \left( \frac{d\Delta R}{d\varphi} + \frac{d^3\Delta R}{d\varphi^3} \right) \right] \quad (10)$$

Запишем условие нерастяжимости некругового кольца [13]:

$$\frac{\partial V}{A \partial \varphi} + \frac{W}{R} = 0 \quad (11)$$

Путем подстановки выражений (1) и (5) в (11), а также последующей линеаризации получим, условие нерастяжимости некругового кольца в виде:

$$\frac{\partial V}{R_0 \partial \varphi} + \frac{W}{R_0} - \frac{W \Delta R}{R_0^2} - \frac{\Delta R}{R_0^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{W}{R_0^2} \frac{d^2 \Delta R}{d\varphi^2} = 0 \quad (12)$$

Выразим из (12) функцию перемещений  $W$ :

$$W = \frac{-R_0 \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \Delta R \frac{\partial V}{\partial \varphi}}{R_0 - \Delta R - \frac{d^2 \Delta R}{d\varphi^2}} \quad (13)$$

Упростим (13) с учетом  $\Delta R \ll R_0$ :

$$W = \left( -\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\Delta R}{R_0} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \left( 1 - \frac{\Delta R}{R_0} - \frac{1}{R_0} \frac{d^2 \Delta R}{d\varphi^2} \right) \quad (14)$$

Далее воспользуемся преобразованиями аналогичными работе []. Представим функция осевых перемещений  $V$  в виде:

$$V(\varphi, t) = \tilde{V}(\varphi) \cos(pt), \quad (15)$$

где  $p$  – собственная частот колебаний системы.

Разложим составляющую, зависящую от  $\varphi$  в ряд Фурье:

$$\tilde{V}(\varphi) = \tilde{V}_0 + \sum_{i=1}^k \tilde{V}_{ic} \cos(i\varphi) + \tilde{V}_{is} \sin(i\varphi) \quad (16)$$

Запишем вектор параметров:

$$\{Y\} = \begin{pmatrix} \tilde{V}_0 \\ \tilde{V}_{1c} \\ \tilde{V}_{1s} \\ \dots \\ \tilde{V}_{kc} \\ \tilde{V}_{ks} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Кинетическая энергия колебаний кольцевого резонатора:

$$T = \frac{S\rho}{2} \int_0^{2\pi} A \left( \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right) d\varphi, \quad (18)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения резонатора,  $\rho$  – плотность материала резонатора.

Потенциальная энергия упругих деформаций:

$$U = \frac{I_x}{2} \int_0^{2\pi} EA\kappa^2 d\varphi, \quad (19)$$

где  $I_x$  – момент инерции поперечного сечения резонатора.

Далее будем рассматривать амплитудные значения кинетической и потенциальной энергий, выразив их через вектор параметров (17):

$$\begin{cases} \tilde{T} = \frac{1}{2} p^2 \{Y\}^T [M] \{Y\} \\ \tilde{U} = \frac{1}{2} \{Y\}^T [K] \{Y\} \end{cases}, \quad (20)$$

где  $[M]$  – матрица масс,  $[K]$  – матрица жесткости.

Определим элементы матриц масс и жесткости:

$$\begin{cases} M_{ij} = \frac{d^2 \tilde{T}}{dY_i dY_j} \frac{1}{p^2} \\ K_{ij} = \frac{d^2 \tilde{U}}{dY_i dY_j} \end{cases} \quad (21)$$

Тогда можно определить собственные частоты колебаний резонатора из условия экстремальности функционала полной энергии системы [14]:

$$|[K] - p^2[M]| = 0 \quad (22)$$

Используя замену  $\lambda = p^2$  приходим к задаче на собственные значения [15], решением которой являются пары минимальных и максимальных значений собственных частоты:

$$|[K] - \lambda[M]| = 0 \quad (23)$$

Решениями уравнения (23) являются пары собственных частот, по которым можно определить искомое относительно расщепление собственных частот:

$$\psi = \frac{p_{max} - p_{min}}{p_0}, \quad (24)$$

где  $p_0$  – средняя собственная частота колебаний.

## Результаты

На основе, описанной методике была написана программа для расчета в среде MATLAB. Программа была отлажена в соответствии с известным аналитическим решением [13] для идеального кольца. Аналогичное решение было получено энергетическим методом, первая ненулевая собственная частот колебаний кольцевого резонатора:

$$p = \sqrt{\frac{36}{5} \frac{EI_x}{\rho SR^4}} \quad (25)$$

Далее были рассмотрены случаи наличия одной гармоники дефекта радиуса:

$$\Delta R(\varphi) = R_m \cos(m\varphi) \quad (26)$$

Для расчета был выбран резонатор с параметрами, приведенными в таблице 1.

Таблица 1. Параметры кольцевого резонатора

Параметр	Значение
Радиус срединной окружности, мм	20
Ширина поперечного сечения кольца, мм	0.5
Высота поперечного сечения кольца, мм	3
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	2210
Модуль Юнга, Па	7·10 <sup>10</sup>
Амплитуда гармоник дефектов плотности, кг/м <sup>3</sup>	22.1
Амплитуда гармоник дефектов модуля упругости, Па	7·10 <sup>8</sup>
Амплитуда гармоник дефектов радиуса, мм	0.2

Расчет был проведен для гармоник дефекта радиуса  $m = 1 \dots 10$ . Для всех гармоник, кроме 2 и 4 значение расщепление собственных частот оказалось пренебрежимо мало. Для четвертой гармоники дефекта плотности расщепление составило:

$$\psi_4 = 3.125 \frac{R_4}{R_0} \quad (27)$$

Для второй гармоники дефекта плотности расщепление составило:

$$\psi_2 = 0.051 \frac{R_4}{R_0} \quad (28)$$

Также был проведен расчет для комбинации второй и четвертой гармоники дефекта плотности, расщепление составило:

$$\psi = 3.077 \frac{R_4}{R_0} \quad (29)$$

## Обсуждение

Как мы видим из выражение (25) энергетический метод позволяет получить точное решение для собственных частот идеальной кольцевой модели.

Выражение расщепления собственной частоты для четвертой гармоники (27) с небольшой погрешностью соответствует известному решению, приведенному в работе [16].

Выражение расщепления собственной частоты для второй гармоники (28) не соответствует известному решению, приведенному в работе [16].

Данное расхождение вероятно связано с существенными допущениями, принятыми в работе [16], поскольку решение [16] является полностью линеаризованным, что делает его более приближенным, чем описанное в данной работе, а также с учетом того, что в работе [11] доказана высокая точность энергетического метода при исследовании других видов дефектов. Однако, данное утверждение требует более глубокое изучение данного вопроса путем проверки решения альтернативными методами, например, методом конечных элементов [17, 18].

Выражение (29) позволяет предположить в первом приближении линейную зависимость между расщепления гармоник дефекта радиуса, т.е. возможность определения полного расщепления собственной частоты, как алгебраической суммы расщепления собственных частот от отдельных дефектов. Данное утверждение также требует дальнейшей проверки.

## Заключение

Была описана модификация известного энергетического метода вычисления собственных частот колебаний кольцевого резонатора ММГ. В первом рассмотрении метод показал сходжение с известным решением альтернативным методом и возможность применения для решения практических задач вычисления расщепления собственных частот колебаний, вызванных малым отклонением геометрии.

Описанная математическая модель может быть использована для моделирования динамики неидеального резонатора и использована за основу для развития методов балансировки резонаторов по критерию уменьшения расщепления собственных частот, вызванных возмущением геометрии [19].

Методы, описанные в представленной работе, могут апробированы для решения аналогичных задач в будущем, например, рассмотрения комбинаций различных видов дефектов энергетическим методом.

В дальнейшем автором планируется более глубокое рассмотрение, описанного метода для решения комбинированных задач расчета расщепления собственных частот колебаний, вызванного ансамблем гармоник отклонений геометрических и физических параметров, а также решения этой задачи методом конечных элементов для проверки предложенного метода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kaczmarek, M. & Pelczynski, Pawel. (2015). Mechatronic setup for measurement of dynamical properties of electronic gyroscopes. 2015. 281-286.
- [2] Martins, Oluwaseun & Oosthuizen, Christiaan & Desai, Dawood. (2025). Exploring the import of mechatronics engineering in medicine: a review. Beni-Suef University Journal of Basic and Applied Sciences.
- [3] Матвеев В.А. Гироскоп – это просто. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012, 149 с.3.
- [4] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. Москва, М.: Наука, 1985, с. 125.
- [5] Тимошенко С.П., Михеев А.В., Тимошенко А.С., Полушкин В.М. Перспективы разработки и производства микроакселерометров, микрогироскопов и инерциальных навигационных систем на основе МЭМС. *Наноиндустрия*. 2020, № S4(99), с. 468-469.
- [6] Senkal D., Ng E.J., Hong V.A., Yang Y., Ahn C.H., Kenny T.W., Shkel A.M. Parametric drive of a toroidal MEMS rate integrating gyroscope demonstrating < 20 PPM scale factor stability. *IEEE*, 2015, pp. 29-32.
- [7] Shishakov K. Algorithmic Signal Accuracy Improvement of Solid-State Wave Gyroscopes. *ISP*, 2020, vol. 20, pp. 34-47.
- [8] Sorokin F., Kiselev R., Golovleva A. Analysis of post-processing methods of IMU MEMS cluster of autonomous navigation of ground transport systems. *E3S Web of Conferences*, 2024, vol. 471.
- [9] Schiwietz D., Weig E., Degenfeld-Schonburg P. Thermoelastic damping in MEMS gyroscopes at high frequencies. *Microsystems & Nanoengineering*, 2023, vol. 9, no. 11.
- [10] Sorokin F., Vakhlyarsky D., Gousskov A. High rise of ring resonator frequency split due to combination of two harmonics of density defect. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, vol. 103, pp. 376-387.
- [11] Киселев Р.М., Сорокин Ф.Д. Разработка и верификация энергетического метода расчета расщепления частот собственных

- колебаний кольцевых резонаторов гироскопических приборов. Инженерный журнал: наука и инновации, 2025, № 4 (160).
- [12] Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. Москва, URSS: Ленанд, 2017, с. 211
- [13] Бидерман В.Л. *Теория механических колебаний*. Москва, URSS: Ленанд, 2017, с. 185.
- [14] Серов М.В., Аверьянова Г.М., Карначева Е.В. Опыт применения вариационного принципа Гамильтона-Остроградского к практическим вопросам составления дифференциальных уравнений свободных малых колебаний. *Известия МГТУ МАМИ*, 2014, № 4(22), с. 84-89
- [15] Елисеева Ю.В., Бондаренко А.А. Один метод вычисления собственных значений дискретных задач Штурма-Лиувилля высших порядков. *Вестник МГТУ "Станкин"*, 2011, № 1(13), с. 95-101
- [16] Нарайкин, О. С. Расщепление собственных частот кольцевого резонатора твердотельного волнового гироскопа, вызванное возмущением формы / О. С. Нарайкин, Ф. Д. Сорокин, С. А. Козубняк // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. – 2012. – № 6(6). – С. 48.
- [17] Модель твердотельного волнового гироскопа в среде Simulink / Л. Е. Кочегизова, С. В. Фетисов, А. С. Малюгин [и др.] // Навигация и управление движением : Материалы XXV Юбилейной конференции молодых ученых, Санкт-Петербург, 21–24 марта 2023 года. – Санкт-Петербург: "Концерн "Центральный научно-исследовательский институт "Электроприбор", 2023. – С. 88-90.
- [18] Brazhnikov, A. & Ganigin, S.. (2024). Development of a finite element resonator model for a tuning fork-type vibration level detector. *Journal of Dynamics and Vibroacoustics*. 10. 54-62. 10.18287/2409-4579-2024-10-4-54-62.
- [19] Бабаев Е.В., Косторной А.Н., Большаков Д.С. [и др.] Способ настройки вибрационного кольцевого датчика угловых скоростей. Пат. № 2792945 С1 Российская Федерация, МПК G01C 19/5684, 2023, бюл. № 10.

R.M. Kiselev

**CALCULATION OF THE NATURAL OSCILLATION FREQUENCIES  
SPLITTING OF MMG RING RESONATOR CAUSED BY A  
DEVIATION IN ITS GEOMETRY**

Bauman Moscow State Technical University, Russia

## Abstract

Sensors are one of the important elements of modern mechatronic and robotic systems [1]. Of great interest is the issue of designing small-sized angular velocity sensors, which are widely used in various fields of industry [2, 3]. Among the huge variety of angular velocity sensors, in recent years, more and more attention has been paid to the design of micromechanical gyroscopes (MMGs). The main problem of MMG is the high dependence of qualitative indicators on deviations of the geometric and physical parameters of the resonator [4]. The paper considers the issues of determining the splitting of the natural oscillation frequencies of MMG annular resonators caused by a small deviation of the radius of the median surface of the resonator. As a result of the work, an energy method is proposed for calculating the natural oscillation frequencies of an annular resonator, adapted to geometric deviations. Based on the calculation results, it is shown that the largest splitting of the natural frequency is caused by the 2 and 4 harmonics of the radius deviation.

*Key words:* ring gyroscope, micromechanical gyroscope, ring resonator, natural frequency splitting

## REFERENCES

- [1] Kaczmarek, M. & Pelczynski, Pawel. (2015). Mechatronic setup for measurement of dynamical properties of electronic gyroscopes. 2015. 281-286.
- [2] Martins, Oluwaseun & Oosthuizen, Christiaan & Desai, Dawood. (2025). Exploring the import of mechatronics engineering in medicine: a review. Beni-Suef University Journal of Basic and Applied Science
- [3] Matveev V.A. Gyroscope is simple. Moscow, Izd-vo BMSTU, 2012, 149 p.
- [4] Zhuravlev V.F., Klimov D.M. Wave solid-state gyroscope. Moscow, M.: Nauka Publ., 1985, 125 p.
- [5] Timoshenkov S.P., Mikheev A.V., Timoshenkov A. S., Polushkin V. M. Prospects of development and production of microaccelerometers, microgyroscopes and inertial navigation systems based on MEMS. *Nanoindustria*, 2020., № S4(99), pp. 468-469.
- [6] Senkal D., Ng E.J., Hong V.A., Yang Y., Ahn C.H., Kenny T.W., Shkel A.M. Parametric drive of a toroidal MEMS rate integrating gyroscope demonstrating < 20 PPM scale factor stability. IEEE, 2015, pp. 29-32.
- [7] Shishakov K. Algorithmic Signal Accuracy Improvement of Solid-State Wave Gyroscopes. ISP, 2020, vol. 20, pp. 34-47.
- [8] Sorokin F., Kiselev R., Golovleva A. Analysis of post-processing methods of IMU MEMS cluster of autonomous navigation of ground transport systems. E3S Web of Conferences, 2024, vol. 471.

- [9] Schiwietz D., Weig E., Degenfeld-Schonburg P. Thermoelastic damping in MEMS gyroscopes at high frequencies. *Microsystems & Nanoengineering*, 2023, vol. 9, no. 11.
- [10] Sorokin F., Vakhlyarsky D., Gousskov A. High rise of ring resonator frequency split due to combination of two harmonics of density defect. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, vol. 103, pp. 376-387
- [11] Kiselev R.M., Sorokin F.D. Development and verification of the energy method for calculating natural oscillations frequency splitting of gyroscopic devices ring resonators. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2025, No. 4 (160).
- [12] Biderman V.L. *Mechanics of thin-walled structures: statics*. Moscow, URSS Publ., 2017, p. 211.
- [13] Biderman V.L. *Theory of mechanical vibrations*. Moscow, URSS Publ., 2017, p. 185.
- [14] Serov M.V., Averyanova G.M., Karnacheva E.V. The experience of applying the Hamilton-Ostrogradsky variational principle to practical issues of composing differential equations of free small oscillations. *Izvestiya MGTU MAMI*, 2014, № 4(22), pp. 84-89
- [15] Eliseeva Yu.V., Bondarenko A.A. One method for calculating eigenvalues of discrete Sturm-Liouville problems of higher orders. *Bulletin of MSTU "Stankin"*, 2011, № 1(13), pp. 95-101.
- [16] Naraykin O.S., Sorokin F.D., Gousskov A.M. [et al.] Calculation of eigen frequency splitting of a cylindrical resonator of a solid-state wave gyroscope based on numerical integration of high accuracy. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2019, № 5(89), p. 4
- [17] A model of a solid-state wave gyroscope in the Simulink environment / L. E. Kochegizova, S. V. Fetisov, A. S. Malyugin [et al.] // *Navigation and motion control : Proceedings of the XV Anniversary Conference of Young Scientists*, St. Petersburg, March 21-24, 2023. Saint Petersburg: Concern Central Research Institute Electropribor, 2023, pp. 88-90.
- [18] Brazhnikov, A. & Ganigin, S.. (2024). Development of a finite element resonator model for a tuning fork-type vibration level detector. *Journal of Dynamics and Vibroacoustics*. 10. 54-62. 10.18287/2409-4579-2024-10-4-54-62.
- [19] Babaev E.V., Kostorny A.N., Bolshakov D.S. [et al.] A method for setting a vibrating annular angular velocity sensor. Patent No. 2792945 C1 Russian Federation, IPC G01C 19/5684, 2023, byul. № 10.