ISSN 2223-0807
Современное машиностроение: Наука и образование 2025:
материалы 14-й Международной научной конференции, 18 июня 2025 года
/ Под ред. А.Н. Евграфова и А.А. Поповича. - СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2025.

УДК 517.977, 681.511.2
doi:10.18720/SPBPU/2/id-108

В.Г. Мельников[1], Н.А. Дударенко[2], А.М. Григоров[3]

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАТЕЛЬНОСТЬ

[1]Виталий Геннадьевич Мельников,
Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II
Россия, Санкт-Петербург
Тел.: +7 (812) 328-82-22, E-mail: v.g.melnikov@yandex.ru.

[2] Наталия Александровна Дударенко,
Университет ИТМО
Россия, Санкт-Петербург
Тел.: +7 (812) 232-05-80, E-mail: dudarenko@itmo.ru

[3]Андрей Михайлович Григоров,
Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II
Россия, Санкт-Петербург
Тел.: +7 (921)857-9741, E-mail: Grigorov.andrey1@yandex.ru.

Аннотация

В работе рассмотрен новый подход к аналитическим условиям размещения корней замкнутой системы управления в желаемой области комплексной плоскости для достижения заданных характеристик качества её переходных процессов. В качестве желаемых показателей качества часто используются два параметра: колебательность системы и степень её устойчивости [1]. При таком подходе корни характеристического уравнения должны располагаться в открытой усеченной угловой области левой полуплоскости комплексной плоскости. В данной работе получены аналитические формулы для размещения корней замкнутой системы произвольного порядка внутри такой области. При этом рассмотрено два варианта постановки задачи. В первом варианте получены условия локализации корней для фиксированного набора значений угла наклона верхней и нижней сторон области. Во втором варианте для области с произвольным углом наклона боковых сторон предлагается применить ограничение предельного значения отрицательных вещественных частей корней системы с дальнейшей аппроксимацией полученной замкнутой области. В результате формируется характеристический полином системы и производится расчёт ограничений, налагаемых на его коэффициенты. Важным преимуществом метода является его относительная простота, что существенно упрощает его практическое применение.

Ключевые слова: корни и полюса характеристического полинома, модальное управление, робастное управление.

Введение

Проектирование линейных динамических систем управления с заданными показателями качества замкнутой системы требует решения задачи распределения корней характеристического полинома на комплексной плоскости [1-3]. Как известно, при отсутствии нулей в передаточной функции вид переходного процесса определяется полюсами передаточной функции замкнутой системы [4-5]. Если же в передаточной функции есть и нули, то необходимо предварительно отделить соответствующие корни для их компенсации [6-7] и далее рассматривать оставшийся полином пониженного порядка с учётом желаемого расположения оставшихся корней. Стандартными формами для обеспечения желаемого переходного процесса являются полином Баттерворта, в котором корни распределяются по полуокружности в левой части комплексной плоскости, и бином Ньютона, в котором корни расположены в точке пересечения полуокружности с действительной осью. При робастном управлении необходимо получать условия нахождения корней в областях, а не в фиксированных точках комплексной плоскости, так как корни могут изменять своё положение при изменении параметров системы [8-9]. Известны условия локализации корней в открытых областях с границами в виде прямых и кривых второго порядка, имеются предложения о применении кривых четвертого и выше порядков [10-11]. В [12] дано фундаментальное обобщение матричного уравнения Ляпунова о локализации спектра матрицы во многих областях комплексной плоскости. Развитие этого подхода на многосвязные области произвольной формы приведено в [13], в котором применяются кривые четвертого порядка - овалы Кассини [14]. Проблема локализации корней актуальна для систем робастного управления [15–16] и управления мультиагентными системами. Для получения относительно простых выражений в данной статье применен подход из теории функций комплексных переменных – метод конформных отображений [17-19]. Рассматривается метод размещения корней характеристического полинома в усечённой угловой области, определяемой желаемыми показателями качества замкнутой системы. Аналитические формулы позволяют определить положение корней замкнутой системы произвольного порядка для заданного набора значений угла наклона верхней и нижней сторон области. В результате формируется характеристический полином системы и рассчитываются ограничения на его коэффициенты.

Методы

Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему с n-мерным вектором состояния, с постоянной матрицей, зависящей от нескольких подлежащих выбору параметров:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \;\; x = (x_1, \dots, x_n)^T, \;\; A = \left|\left|a_{ik}\right|\right|_1^n. \tag{1}$$

Расположение на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ спектра собственных значений матрицы A определяет свойства управляемой системы. Будем рассматривать задачу обеспечения расположения спектра матрицы A в пределах специальной области D на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Данная область формируется путем пересечения двух геометрических фигур:

– бесконечной вертикальной полосы D_1, шириной $(\xi - \eta)$:

$$D_1 = \{s\colon \mathrm{Re}(s) \in (\xi - \eta)\}, \tag{2}$$

– бесконечной угловой области D_2 в виде сектора с заданным углом при вершине, равным 2φ:

$$D_2 = \{s\colon \mathrm{Arg}(s) \in (\pi - \varphi, \pi + \varphi)\}, \tag{3}$$

где η – желаемая степень устойчивости динамической системы, ξ – задаваемое ограничение на величину предельного удаления корней от мнимой оси в левую сторону комплексной плоскости $\xi \in (\infty, \eta)$, φ – определяет желаемую колебательность μ системы: $tg\varphi = \mu$.

Таким образом, будем искать условия нахождения спектра матрицы в области:

$$D = D_1 \cap D_2. \tag{4}$$

Примечания:

1. Угол φ области D_2 обычно назначается близким к значению $\pi/4$, либо меньшим, если требуется обеспечить более существенное затухание переходного процесса за период.
2. Высоту трапеции $(\xi - \eta)$ обычно назначают небольшой.

Следует отметить, что задача в такой постановке считается сложной и не имеющей аналитического решения.

Для получения аналитического решения несколько модифицируем задачу. Приблизим угловую область D_2 угловой областью D_2', у которой угол при вершине может принимать одно из возможных значений, заданных формулой $\varphi = \frac{\pi}{2\gamma}, \gamma = 2,3,4 \ldots$, при этом вершину угла мы также можем переместить из начала координат O на расстояние ζ в новую точку O_1, заданную из условия, что боковые стороны области $D_2{}'$ мало отклонялись от боковых сторон исходной области D_2. Будем рассматривать задачу о локализации спектра матрицы A во внутренней области трапеции:

$$D' = D_1 \cap D_2{}'. \tag{5}$$

Такая модификация исходной задачи допустима в рамках принятой точности приближения области D областью D'.

Решение задачи

Выполним в характеристической матрице системы $M = (Es - A)$ три замены переменных: $s = z_1 - \eta$, $s = -z_2 - \xi$, $s = z_4 + \zeta$. Получим:

$$M = Ez_1 - A_1 = -(Ez_2 - A_2) = Ez_4 - A_4, \tag{6}$$

при:

$$A_1 = A + E\eta, A_2 = -A - E\eta, A_4 = A - E\zeta. \tag{7}$$

Тогда необходимое и достаточное условие локализации спектра матрицы A в полосе D_1 эквивалентно выполнению $2n$ условий гурвицевости матриц A_1 и A_2.

Рассмотрим матрицу $A_3 = (-1)^{\gamma+1}A_4^{\gamma}$ и степенное преобразование $z_3 = (-1)^{\gamma+1}z_4^{\gamma}$. По свойству функций от матрицы [20] собственные значения матриц A_3 и A_4 связаны соотношениями:

$$z_{3i} = (-1)^{\gamma+1}z_{4i}^{\gamma},\ i = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Преобразование отображает угол величиной $2\varphi = \pi/\gamma$ на плоскости z_4 в левую полуплоскость плоскости z_3. При этом стороны и отрицательная полуось $z_4 = r\exp(\pi \pm \varphi)j$, $z_4 = -r$ отображаются соответственно в мнимые полуоси и отрицательную полуось.

Тогда необходимым и достаточным условием локализации спектра матрицы A в области D' является выполнение условий Гурвица для матриц $A_i, i = 1,2,3$.

Примечание:

Для систем высокого порядка коэффициенты a_k^i трех характеристических многочленов $\det(E\lambda - A_i)$ можно получить методом Лаверье по рекуррентным формулам Фаддеева:

$$A_1^i = A_i, \qquad a_1^i = -tr\, A_1^i,$$
$$A_2^i = A_i\left(A_1^i + a_1^i E\right), \; a_2^i = -\frac{1}{2} tr\, A_2^i,$$
$$A_3^i = A_i\left(A_2^i + a_2^i E\right), \; a_3^i = -\frac{1}{3} tr\, A_3^i\,, \tag{10}$$
$$\ldots$$
$$A_n^i = A_i\left(A_{n-1}^i + a_{n-1}^i E\right), \; a_n^i = -\frac{1}{n} tr\, A_n^i.$$

Пример

Дана система управления с характеристическим многочленом:

$$P_4(s) = s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4. \tag{11}$$

Коэффициенты уравнения подлежат выбору из условия, чтобы одна пара корней имела заданные значения:

$$s_{3,4} = -1 \pm 2j. \tag{12}$$

Прочие же два корня располагались в области D' с параметрами:

$$\eta = 1, \; \varphi = \frac{\pi}{4}\,, \; \xi = +\infty, \; \zeta = 0. \tag{13}$$

Разделим $P_4(s)$ на квадратичный полином:

$$(s - s_3)(s - s_4) = s^2 + 2s + 5. \tag{14}$$

Получим многочлен второй степени:

$$P_2(s) = s^2 + a_1 s + a_2, \tag{15}$$

где коэффициенты $a_{1,2}$ будем считать подлежащими определению, при этом параметры b_i исходного полинома находятся из соотношений:

$$b_1 = a_1 + 2, \; b_2 = a_2 + 2a_1 + 5, \; b_3 = 2a_2 + 5a_1, \; b_4 = 5a_2. \tag{16}$$

Многочлену $P_2(s)$ сопоставим сопровождающую матрицу A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

По матрице A получим матрицы $A_{1,3}$:

$$A_1 = A_1 = A + E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -a_2 & 1 - a_1 \end{bmatrix}; \tag{18}$$

$$A_3 = -A^2 = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ -a_1 a_2 & a_2 - a_1^2 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Характеристические полиномы матриц $A_{1,3}$ имеют вид:

$$det(E\lambda - A_1) = \lambda^2 + (a_1 - 2)\lambda + (a_2 - a_1 + 1)\,; \tag{20}$$
$$\det(E\lambda - A_3) = \lambda^2 + (a_1^2 - 2a_2)\lambda + a_2^2. \tag{21}$$

Коэффициенты характеристических полиномов:

$$p_1^{(1)} = a_1 - 2,\ p_2^{(1)} = a_2 - a_1 + 1; \quad (22)$$
$$p_1^{(3)} = a_1^2 - 2a_2,\ p_2^{(2)} = a_2^2. \quad (23)$$

Условия Гурвица для многочленов второй степени сводятся к положительности всех коэффициентов многочленов $p_k > 0$. Получаем ограничения на значения параметров:

$$a_1 > 2,\ a_1 - 1 < a_2 < \frac{1}{2}a_1^2. \quad (24)$$

Заключение

Рассмотрена задача робастного расположения корней динамических систем в желаемой угловой области комплексной плоскости. Задаваемая область обеспечивает системе требуемые показатели качества переходных процессов. Для решения задачи было предложено изменение её постановки: ограничение предельного значения отрицательных вещественных частей корней системы и аппроксимация полученной замкнутой области. Это позволяет добиться требуемой точности расположения корней. В результате формируется характеристический полином системы и рассчитываются ограничения для его коэффициентов. Важным преимуществом метода является его относительная простота, что расширяет область его практического применения в сложных задачах [21-23].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. — 4-е изд., перераб. и доп. — СПб.: Изд-во «Профессия», 2003. — 752 с.
[2] Aleksandrov, A. Y. Asymptotic stability of a satellite with electrodynamic attitude control in the orbital frame / A. Y. Aleksandrov, A. A. Tikhonov // Acta Astronautica. – 2017. – Vol. 139. – P. 122-129. – DOI 10.1016/j.actaastro.2017.06.033. – EDN XNGMZT.
[3] Evgrafov, A.N., Petrov, G.N., Khlebosolov, I.O., Andrienko, P.A. (2024). On the Issue of Dynamics of Program-Controlled Machines. In: Evgrafov, A.N. (eds) Advances in Mechanical Engineering. MMESE 2023. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-48851-1_2
[4] Nikitin, D. Y. Attitude stabilization of a spacecraft equipped with large electrostatic protection screens / D. Y. Nikitin, A. A. Tikhonov // AIP Conference Proc. : 8th Polyakhov's Reading: Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics, Saint Petersburg– P. 040011. – DOI 10.1063/1.5034614.

[5] Evgrafov, A. N. Influence of the Control Object Mass on the Stability Region / A. N. Evgrafov, V. A. Tereshin // Adv. in Mechanical Engineering, Saint Petersburg, Russia– Cham: Springer, 2022. – P. 9-17. – DOI 10.1007/978-3-030-91553-7_2.
[6] Abramovich, B. N. Modified proportional integral controller for single ended primary inductance converter / B. N. Abramovich, D. A. Ustinov, W. J. Abdallah // International Journal of Power Electronics and Drive Systems. – 2022. – Vol. 13, No. 2. – P. 1007-1025. – DOI 10.11591/ijpeds.v13.i2.pp1007-1025.
[7] Asadulagi, M.-A.M., Fedorov, M.S., Trushnikov, V.E. (2023). Control Methods of Mineral Water Wells. Proceedings of 2023 5th International Conference on Control in Technical Systems, CTS 2023, 152-155. https://doi.org/10.1109/CTS59431.2023.10288866
[8] Гайворонский, С. А. Определение области заданного качества управления подводным аппаратом в пространстве его конструктивных параметров / С. А. Гайворонский, Т. А. Езангина, И. В. Хожаев // Технические проблемы освоения Мирового океана. – 2019. – Т. 8. – С. 322-328. – EDN BFGPUW.
[9] Kotov, D.D., Pervukhin, D.A., Davardoost, H., Afanasyeva, O.V. (2024). Prospects for the Use of Autonomous Underwater Vehicles (AUV) to Solve the Problems of the Mineral Resources Complex (MRC) of the Russian Federation. Journal of Maritime Research, 21(1), 309-317.
[10] He, K., Peng, C. Iterative algorithm for the conformal mapping from the unit disk to domains with regular boundaries. Arch Appl Mech 95, 36 (2025). https://doi.org/10.1007/s00419-024-02749-5
[11] Перепелкин, Е. А. Управление спектром матричной системы второго порядка с обратной связью по вектору ускорения / Е. А. Перепелкин // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2023. – № 63. – С. 23-28. – DOI 10.17223/19988605/63/3. – EDN SEQXXU.
[12] Gutman S., Jury E.I. A general theory for root-clustering in subregions of the complex plane // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. 26. P. 853-863.
[13] Melnikov, V. G. Method of forbidden regions in the dynamic system matrices root clustering problem / V. G. Melnikov, N. A. Dudarenko // Automation and Remote Control. – 2014. – Vol. 75, No. 8. – P. 1393-1401. – DOI 10.1134/S0005117914080049.
[14] Grabusts, P. Applications of the Symmetrical Structures of Cassini Ovals / P. Grabusts, O. Uzhga-Rebrov // Symmetry. – 2024. – Vol. 16, No. 3. – P. 334. – DOI 10.3390/sym16030334.
[15] Rovenski, V., Stepanov S., and Tsyganok I. 2021. "A Generalized Bochner Technique and Its Application to the Study of Conformal Mappings" *Axioms* 10, 4: 333. https://doi.org/10.3390/axioms10040333

[16] Trubaev, N. A. Solution of the parameter problem of the Schwarz-Christoffel conformal mapping of the interior (exterior) of a circle onto the interior (exterior) of a polygon / N. A. Trubaev // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. – 2023. – No. 82. – P. 28-38. – DOI 10.17223/19988621/82/3. – EDN JUKDRV.
[17] Turner, M.R., Bridges, T.J. Time-dependent conformal mapping of doubly-connected regions. *Adv Comput Math* **42**, 947–972 (2016). https://doi.org/10.1007/s10444-015-9448-6
[18] Andrei-Florin Albişoru, Dorin Ghişa, "Conformal Self-Mappings of the Complex Plane with Arbitrary Number of Fixed Points," WSEAS Transactions on Mathematics, vol. 22, pp. 971-979, 2023, DOI:10.37394/23206.2023.22.106
[19] Baiguera, S., Harmark, T., Lei, Y. *et al.* Conformal mapping of non-Lorentzian geometries in SU(1, 2) Conformal Field Theory. *J. High Energ. Phys.* **2025**, 100 (2025). https://doi.org/10.1007/JHEP03(2025)100
[20] Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2010. — 559 с
[21] Automatic Control System for Thermal State of Reverberatory Furnaces in Production of Nickel Alloys / V. E. Q. Cabascango, V. Y. Bazhin, S. A. Martynov, F. R. O. Pardo // Metallurgist. – 2022. – Vol. 66, No. 1-2. – P. 104-116. – DOI 10.1007/s11015-022-01304-3.
[22] Ануфриев, А. С. Новые подходы для повышения эффективности автоматизированных систем управления переделами рудоподготовки / А. С. Ануфриев, Е. А. Лебедик, В. Ю. Бажин // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2024. – № 2. – С. 76-92. – DOI 10.25018/0236_1493_2024_2_0_76.
[23] Mathematical Logic Model for Analysing the Controllability of Mining Equipment / P. V. Shishkin, B. V. Malozyomov, N. V. Martyushev [et al.] // Mathematics. – 2024. – Vol. 12, No. 11. – P. 1660. – DOI 10.3390/math12111660.

V. G. Melnikov[1], N. A. Dudarenko[2], A. M. Grigorov[1]

DESIGN OF LINEAR CONTROL SYSTEMS UNDER STABILITY AND OSCILLATION CONSTRAINTS

[1]St. Petersburg Mining University of Empress Catherine II, Russia;
[2] ITMO university, St. Petersburg, Russia

Abstract

The paper considers a new approach to analytical conditions for placing the roots of a closed-loop control system in a desired region of a complex plane to achieve specified characteristics of the quality of its transient processes. Two parameters are often used as desired quality indicators: the oscillation of the system and the degree of its stability [1]. With this approach, the roots of the characteristic equation should be located in the open truncated angular region of the left half-plane of the complex plane. In this paper, analytical formulas are obtained for placing the roots of a closed system of arbitrary order inside such a domain. At the same time, two variants of the problem formulation are considered. In the first variant, the conditions for root localization are obtained for a fixed set of values of the angle of inclination of the upper and lower sides of the region. In the second variant, for an area with an arbitrary angle of inclination of the sides, it is proposed to apply a limitation of the limit value of the negative real parts of the roots of the system with a further approximation of the resulting closed area. As a result, the characteristic polynomial of the system is formed and the constraints imposed on its coefficients are calculated. An important advantage of the method is its relative simplicity, which greatly simplifies its practical application.

Key words: roots and poles of a characteristic polynomial, modal control, robust control

REFERENCES

[1] Besekerskij V.A., Popov E.P. Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya / V.A. Besekerskij, E.P. Popov. — 4-e izd., pererab. i dop. — SPb.: Izd-vo «Professiya», 2003. — 752p. (in Russian)

[2] Aleksandrov, A. Y. Asymptotic stability of a satellite with electrodynamic attitude control in the orbital frame / A. Y. Aleksandrov, A. A. Tikhonov // Acta Astronautica. – 2017. – Vol. 139. – P. 122-129. – DOI 10.1016/j.actaastro.2017.06.033. – EDN XNGMZT.

[3] Evgrafov, A.N., Petrov, G.N., Khlebosolov, I.O., Andrienko, P.A. (2024). On the Issue of Dynamics of Program-Controlled Machines. In: Evgrafov, A.N. (eds) Advances in Mechanical Engineering. MMESE 2023. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-48851-1_2
[4] Nikitin, D. Y. Attitude stabilization of a spacecraft equipped with large electrostatic protection screens / D. Y. Nikitin, A. A. Tikhonov // AIP Conference Proc. : 8th Polyakhov's Reading: Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics, Saint Petersburg– P. 040011. – DOI 10.1063/1.5034614.
[5] Evgrafov, A. N. Influence of the Control Object Mass on the Stability Region / A. N. Evgrafov, V. A. Tereshin // Adv. in Mechanical Engineering, Saint Petersburg, Russia– Cham: Springer, 2022. – P. 9-17. – DOI 10.1007/978-3-030-91553-7_2.
[6] Abramovich, B. N. Modified proportional integral controller for single ended primary inductance converter / B. N. Abramovich, D. A. Ustinov, W. J. Abdallah // International Journal of Power Electronics and Drive Systems. – 2022. – Vol. 13, No. 2. – P. 1007-1025. – DOI 10.11591/ijpeds.v13.i2.pp1007-1025.
[7] Asadulagi, M.-A.M., Fedorov, M.S., Trushnikov, V.E. (2023). Control Methods of Mineral Water Wells. Proceedings of 2023 5th International Conference on Control in Technical Systems, CTS 2023, 152-155. https://doi.org/10.1109/CTS59431.2023.10288866
[8] Gajvoronskij, S. A. Opredelenie oblasti zadannogo kachestva upravleniya podvodny`m apparatom v prostranstve ego konstruktivny`x parametrov / S. A. Gajvoronskij, T. A. Ezangina, I. V. Xozhaev // Texnicheskie problemy` osvoeniya Mirovogo okeana. – 2019. – T. 8. – p. 322-328. (in Russian)
[9] Kotov, D.D., Pervukhin, D.A., Davardoost, H., Afanasyeva, O.V. (2024). Prospects for the Use of Autonomous Underwater Vehicles (AUV) to Solve the Problems of the Mineral Resources Complex (MRC) of the Russian Federation. Journal of Maritime Research, 21(1), 309-317.
[10] He, K., Peng, C. Iterative algorithm for the conformal mapping from the unit disk to domains with regular boundaries. Arch Appl Mech 95, 36 (2025). https://doi.org/10.1007/s00419-024-02749-5
[11] Perepelkin, E. A. Upravlenie spektrom matrichnoj sistemy` vtorogo poryadka s obratnoj svyaz`yu po vektoru uskoreniya / E. A. Perepelkin // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vy`chislitel`naya texnika i informatika. – 2023. – № 63. – S. 23-28. – DOI 10.17223/19988605/63/3. (in Russian).
[12] Gutman S., Jury E.I. A general theory for root-clustering in subregions of the complex plane // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. 26. P. 853-863.

[13] Melnikov, V. G. Method of forbidden regions in the dynamic system matrices root clustering problem / V. G. Melnikov, N. A. Dudarenko // Automation and Remote Control. – 2014. – Vol. 75, No. 8. – P. 1393-1401. – DOI 10.1134/S0005117914080049.
[14] Grabusts, P. Applications of the Symmetrical Structures of Cassini Ovals / P. Grabusts, O. Uzhga-Rebrov // Symmetry. – 2024. – Vol. 16, No. 3. – P. 334. – DOI 10.3390/sym16030334.
[15] Rovenski, V., Stepanov S., and Tsyganok I. 2021. "A Generalized Bochner Technique and Its Application to the Study of Conformal Mappings" *Axioms* 10, 4: 333. https://doi.org/10.3390/axioms10040333
[16] Trubaev, N. A. Solution of the parameter problem of the Schwarz-Christoffel conformal mapping of the interior (exterior) of a circle onto the interior (exterior) of a polygon / N. A. Trubaev // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. – 2023. – No. 82. – P. 28-38. – DOI 10.17223/19988621/82/3. – EDN JUKDRV.
[17] Turner, M.R., Bridges, T.J. Time-dependent conformal mapping of doubly-connected regions. *Adv Comput Math* **42**, 947–972 (2016). https://doi.org/10.1007/s10444-015-9448-6
[18] Andrei-Florin Albişoru, Dorin Ghişa, "Conformal Self-Mappings of the Complex Plane with Arbitrary Number of Fixed Points," WSEAS Transactions on Mathematics, vol. 22, pp. 971-979, 2023, DOI:10.37394/23206.2023.22.106
[19] Baiguera, S., Harmark, T., Lei, Y. *et al.* Conformal mapping of non-Lorentzian geometries in SU(1, 2) Conformal Field Theory. *J. High Energ. Phys.* **2025**, 100 (2025). https://doi.org/10.1007/JHEP03(2025)100
[20] Gantmaxer, F.R. Teoriya matricz / F. R. Gantmaxer. — 5-e izd. — Moskva : Fizmatlit, 2010. — 559p (in Russian)
[21] Automatic Control System for Thermal State of Reverberatory Furnaces in Production of Nickel Alloys / V. E. Q. Cabascango, V. Y. Bazhin, S. A. Martynov, F. R. O. Pardo // Metallurgist. – 2022. – Vol. 66, No. 1-2. – P. 104-116. – DOI 10.1007/s11015-022-01304-3.
[22] Anufriev, A. S. Novy`e podxody` dlya povy`sheniya e`ffektivnosti avtomatizirovanny`x sistem upravleniya peredelami rudopodgotovki / A. S. Anufriev, E. A. Lebedik, V. Yu. Bazhin // Gorny`j informacionno-analiticheskij byulleten` (nauchno-texnicheskij zhurnal). – 2024. – № 2. – S. 76-92. – DOI 10.25018/0236_1493_2024_2_0_76. (in Russian)
[23] Mathematical Logic Model for Analysing the Controllability of Mining Equipment / P. V. Shishkin, B. V. Malozyomov, N. V. Martyushev [et al.] // Mathematics. – 2024. – Vol. 12, No. 11. – P. 1660. – DOI 10.3390/math12111660