ISSN 2223-0807
Современное машиностроение: Наука и образование 2025:
материалы 14-й Международной научной конференции, 18 июня 2025 года
/ Под ред. А.Н. Евграфова и А.А. Поповича. - СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2025.

УДК 531.53
doi:10.18720/SPBPU/2/id-111

А.С. Смирнов[1], Б.А. Смольников[2]

ДИССИПАТИВНЫЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧЕ О ГЛОБАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

[1]Алексей Сергеевич Смирнов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт проблем машиноведения Российской академии наук
Россия, Санкт-Петербург
Тел.: (812)552-7778, E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com

[2]Борис Александрович Смольников
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт проблем машиноведения Российской академии наук
Россия, Санкт-Петербург
Тел.: (812)552-7778, E-mail: smolnikovba@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматриваются глобальные модели движения сферического маятника при наличии внешнего или внутреннего трения. Выводятся уравнения движения системы для углов нутации и прецессии, при этом в обоих случаях далее удается исключить из рассмотрения угол прецессии и получить единственное уравнение для угла нутации, которое приводится к удобному безразмерному виду. При помощи численного интегрирования для каждого варианта диссипации определяется зависимость угла нутации от безразмерного времени, которая отображается в графической форме. Для большей наглядности на графиках также строятся огибающие линии, которые находятся из известного ранее приближенного аналитического решения, и они очень хорошо согласуются с результатами численного исследования. Сделанные выводы представляют интерес для динамики диссипативных маятниковых систем и могут быть полезными на практике.

Ключевые слова: сферический маятник, угол нутации, угол прецессии, внешнее трение, внутреннее трение, глобальная модель.

Введение

Вопросам динамического поведения сферического маятника (далее – СМ) в различных условиях его движения посвящено достаточно большое количество публикаций, растущее с каждым годом, поскольку СМ является наиболее известной нелинейной маятниковой системой с двумя степенями свободы. История задачи о СМ насчитывает более трех столетий, и с ней связаны имена известных ученых прошлого – Р. Гука [1], А. Клеро [2], В. Пюизе [3], Ф. Тиссерана [4], А. Резаля [5], М. де Спарра [6], Н. Тиссо [7], Ж. Альфена [8], А. де Сен-Жермена [9], А. Гринхилла [10], А. Н. Крылова [11] и многих других. Среди современных научных работ по механике СМ, относящихся к последним десятилетиям, можно отметить работы [12-23] на русском языке, часть из которых имеет переводные версии; работы [24-30] на английском языке; а также книгу авторов настоящей статьи [31]. Следует подчеркнуть, что изучение динамики СМ имеет не только фундаментальное теоретическое значение, но также позволяет описать поведение более сложных систем, встречающихся в различных приложениях. В самом деле, СМ является структурным элементом многих технических устройств, например, грузоподъемных устройств типа мостовых и башенных кранов, разнообразных тренажеров и спортивно-развлекательных комплексов, тросовых систем и прочих конструкций [22].

Немалый теоретический и практический интерес представляет учет диссипативных сил при движении СМ и изучение влияния этих сил на его траекторию [32]. При этом обычно учитывается вязкое или квадратичное сопротивление со стороны окружающей среды [33-36], а также вязкое или сухое трение в кардановом подвесе при соответствующей реализации СМ [31]. Однако серьезное внимание привлекает и задача о движении СМ под действием внутреннего трения в стержневом элементе, обусловленного его переменными деформациями [36]. При этом следует иметь в виду, что в рамках традиционной расчетной схемы СМ стержень является абсолютно твердым, т. е. он не обладает упругими свойствами, а потому он лишен возможности рассеивать энергию. Тем не менее, в отсутствие прочих сил трения внутреннее трение оказывается единственным диссипативным фактором, который необходимо принимать во внимание. В этой связи построение и изучение достаточно простой и в то же время адекватной модели внутреннего трения при движении СМ также представляется весьма актуальной задачей, заслуживающей отдельного рассмотрения.

Учитывая вышесказанное, естественно принять в качестве основной цели настоящей работы подробное обсуждение моделей внешнего и внутреннего трения при движении СМ в глобальной постановке, т. е. при произвольных начальных условиях движения.

Глобальные уравнения движения сферического маятника с учетом диссипативных сил

Обратимся к традиционной расчетной схеме СМ с абсолютно жестким стержнем, который подвешен в поле силы тяжести. Будем полагать, что масса концевого груза СМ есть m, а длина СМ равна l_0 (рис. 1).

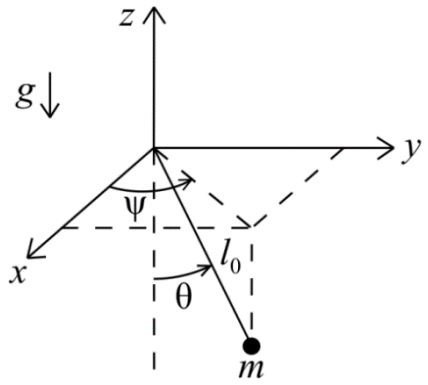


Рис. 1. Расчетная схема сферического маятника

Принимая в качестве обобщенных координат угол нутации θ и угол прецессии ψ, запишем кинетическую и потенциальную энергии системы:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml_0^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta\right), \quad \Pi = mgz = -mgl_0\cos\theta, \tag{1}$$

где v – скорость концевого груза СМ, а z – его аппликата.

Сначала рассмотрим модель движения СМ при наличии внешнего вязкого трения со стороны окружающей среды. Тогда диссипативная функция может быть представлена в традиционном виде:

$$R = \frac{1}{2}Bv^2 = \frac{1}{2}Bl_0^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta\right) = \frac{B}{m}T, \tag{2}$$

где B – диссипативный коэффициент. Подставляя (1) и (2) в уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = -\frac{\partial\Pi}{\partial\theta} - \frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial\psi} = -\frac{\partial\Pi}{\partial\psi} - \frac{\partial R}{\partial\dot{\psi}}, \tag{3}$$

получим из первого уравнения

$$ml_0^2\ddot{\theta} + Bl_0^2\dot{\theta} - ml_0^2\sin\theta\cos\theta\dot{\psi}^2 + mgl_0\sin\theta = 0, \tag{4}$$

тогда как второе уравнение может быть приведено к виду:

$$\dot{p} = -\frac{B}{m}p, \tag{5}$$

где сделано обозначение: $p = \partial T / \partial\dot{\psi}$. Интегрируя уравнение (5), находим:

$$p = p_0 e^{-\frac{B}{m}t}, \tag{6}$$

где p_0 – начальное значение величины p. Принимая во внимание, что $p = ml_0^2\sin^2\theta\dot{\psi}$, находим из (6) следующее выражение для $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{p_0 e^{-\frac{B}{m}t}}{m l_0^2 \sin^2\theta}. \tag{7}$$

Если подставить это выражение в (4), то получим единственное уравнение, которое будет определять поведение угла нутации с течением времени:

$$m l_0^2 \ddot{\theta} + B l_0^2 \dot{\theta} - \frac{p_0^2 \cos\theta}{m l_0^2 \sin^3\theta} e^{-\frac{2B}{m}t} + m g l_0 \sin\theta = 0. \tag{8}$$

Для того чтобы привести это уравнение к виду, удобному для численного интегрирования, введем в рассмотрение следующие величины:

$$k = \sqrt{\frac{g}{l_0}}, \quad \tau = kt, \quad \delta = \frac{p_0}{m l_0^2 k}, \quad \nu = \frac{B}{mk}. \tag{9}$$

Поясним их физический смысл: k – частота малых колебаний обычного маятника длиной l_0, τ – безразмерное время, δ – обезразмеренная величина p_0, а ν – безразмерный диссипативный параметр. Обозначая далее штрихом производную по безразмерному времени τ, т. е. полагая $(\ )' = d/d\tau$, приведем уравнение (8) к окончательному виду:

$$\theta'' + \nu\theta' + \sin\theta - \frac{\delta^2 \cos\theta}{\sin^3\theta} e^{-2\nu\tau} = 0. \tag{10}$$

Остается отметить, что при наличии внешнего трения будет происходить полное затухание движений СМ с течением времени.

Перейдем теперь к учету внутреннего трения в стержне СМ. Ясно, что наиболее идейно простой способ описания движения СМ под действием внутреннего трения в стержне заключается в том, чтобы снабдить его дополнительной степенью свободы, отвечающей за растяжимость стержня, и наделить его упругими свойствами, в результате чего мы придем к классической модели внутренней диссипации. Однако такой путь заметно усложняет математическую модель и ее последующий анализ. Помимо этой модели существует также и другая модель внутреннего трения, которую можно назвать эволюционной, поскольку она не требует введения новой степени свободы, но в то же время позволяет описать эволюционное поведение СМ при наличии диссипативных эффектов в стержне [31, 36]. Естественно, что изучение такой модели внутренней диссипации при движении СМ имеет большое значение для механики маятниковых конструкций и динамики диссипативных систем.

Приступая к ее построению, сформируем диссипативную функцию внутреннего трения в стержне, считая, что оно имеет вязкий характер. Ясно, что если бы длина стержня l выступала бы в качестве обобщенной координаты, то эту диссипативную функцию можно было бы представить в виде квадратичной функции микроскорости перемещения груза вдоль стержня, а именно:

$$S = \frac{1}{2} b \dot{l}^2, \tag{11}$$

где b – исходный диссипативный коэффициент. Однако в рамках эволюционной модели длина стержня l не является третьей обобщенной координатой, поэтому она исключается из рассмотрения при помощи следующего подхода [31]. Нетрудно понять, что усилие в стержне N, вызываемое центробежными и гравитационными силами, вызывает малые переменные удлинения и укорочения стержня СМ, а, стало быть, и микродвижения груза СМ вдоль стержня. При этом можно предположить, что эти микродвижения фактически не будут вносить никакого ощутимого вклада в выражения для кинетической и потенциальной энергий, вследствие чего они и принимаются такими же, как и для СМ постоянной длины. Однако эти микродвижения будут непрерывно рассеивать энергию макроскопических движений СМ. Это обстоятельство позволяет перейти от длины стержня l к усилию N, имея в виду, что согласно закону Гука $N = c(l - l_0)$, где c – жесткость стержня, а величина l_0 трактуется как длина стержня СМ в недеформированном состоянии. Тогда $\dot{N} = c\dot{l}$, а потому диссипативная функция (11) может быть переписана в виде:

$$S = \frac{1}{2} \beta \dot{N}^2, \quad \beta = \frac{b}{c^2}, \tag{12}$$

где β – приведенный диссипативный коэффициент. Таким образом, с этого момента степень свободы, отвечающая длине стержня l, становится скрытой и исключается из анализа, и в рассмотрении остаются только две исходные степени свободы. Далее все сводится к вычислению усилия N в стержне СМ, причем длина стержня считается величиной постоянной и равной l_0. Как известно, выражение для усилия имеет вид [31]:

$$N = m\left[l_0 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \right) + g \cos \theta \right]. \tag{13}$$

После этого необходимо вычислить величину $\dot{N}$, причем для упрощения дальнейших выкладок мы будем заменять значения возникающих при этом обобщенных ускорений $\ddot{\theta}$ и $\ddot{\psi}$ их значениями на невозмущенном, т. е. на консервативном движении СМ. В рамках глобальной консервативной модели уравнения движения СМ имеют известный вид [31]:

$$\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta + \frac{g}{l_0} \sin\theta = 0, \quad \ddot{\psi} + 2\mathrm{ctg}\theta \dot{\psi} \dot{\theta} = 0. \tag{14}$$

Тогда искомое выражение для $\dot{N}$ примет достаточно простую структуру:

$$\dot{N} = -3mg \sin\theta \dot{\theta}, \tag{15}$$

а диссипативная функция (12) приведется к следующей форме:

$$S = \frac{1}{2} b_0 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2, \quad b_0 = 9\beta m^2 g^2, \tag{16}$$

где b_0 – новый диссипативный коэффициент. Заменяя в уравнениях (3) диссипативную функцию R на S и подставляя в них выражения (1) и (16), получим из первого уравнения

$$ml_0^2\ddot{\theta} + b_0 \sin^2\theta\dot{\theta} - ml_0^2 \sin\theta\cos\theta\dot{\psi}^2 + mgl_0 \sin\theta = 0, \tag{17}$$

а из второго уравнения будем иметь $\dot{p} = 0$, где, напомним, $p = \partial T / \partial\dot{\psi}$. В самом деле, координата ψ здесь является циклической, т. к. кинетическая и потенциальная энергии и отвечающая ей обобщенная диссипативная сила равны нулю. Поэтому имеет место циклический интеграл

$$p = \frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = ml_0^2 \sin^2\theta\dot{\psi} = p_0 = \text{const}. \tag{18}$$

Выражая отсюда циклическую скорость $\dot{\psi}$

$$\dot{\psi} = \frac{p_0}{ml_0^2 \sin^2\theta} \tag{19}$$

и подставляя ее в (17), получим единственное уравнение для угла нутации:

$$ml_0^2\ddot{\theta} + b_0 \sin^2\theta\dot{\theta} - \frac{p_0^2 \cos\theta}{ml_0^2 \sin^3\theta} + mgl_0 \sin\theta = 0. \tag{20}$$

Для приведения его к безразмерному виду будем использовать первые три величины из (9), а также введем безразмерный диссипативный параметр для случая внутреннего трения по формуле $\mu = b_0 / (ml_0^2 k)$. Тогда уравнение (20) приведется к окончательной форме:

$$\theta'' + \mu \sin^2\theta\theta' + \sin\theta - \frac{\delta^2 \cos\theta}{\sin^3\theta} = 0. \tag{21}$$

Нетрудно понять, что конечным режимом движения СМ с внутренним трением будет коническое движение. В самом деле, диссипация согласно (16) прекращается именно при $\theta = \theta_* = \text{const}$, а из (19) в этой ситуации вытекает, что $\dot{\psi} = \dot{\psi}_* = \text{const}$. При этом величина θ_* при заданном значении величины δ определяется из уравнения, которое вытекает из (21):

$$\sin^4\theta_* = \delta^2 \cos\theta_*, \tag{22}$$

и, конечно, угол θ_* в коническом режиме движения является острым. Остается подчеркнуть, что этот режим движения является устойчивым относительно θ, $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$ [31].

Приближенное аналитическое решение

Прежде чем осуществлять численное интегрирование уравнений (10) и (21), представим найденное в работе [36] приближенное аналитическое решение для моделей внешнего и внутреннего трения, приспособив его для нужд настоящего исследования. При получении указанного решения в

качестве обобщенных координат задачи в [36] принимались декартовы координаты x и y груза СМ, которые трактовались как малые величины при не очень больших отклонениях от нижнего положения равновесия вместе с соответствующими скоростями. Кроме того, в данной работе также вводилась комплексная переменная $w = x + iy$, для которой была найдена приближенная зависимость от времени при помощи метода усреднения. Из рис. 1 нетрудно понять, что

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{l_0} = \frac{\sqrt{w\bar{w}}}{l_0}, \tag{23}$$

где $\bar{w}$ – комплексно-сопряженная величина по отношению к $\bar{w}$. Поскольку приближенное решение из [36] имеет вид $w = Ae^{ikt} + Be^{-ikt}$, где $A = A(t)$ и $B = B(t)$ – медленно меняющиеся комплекснозначные функции времени, то огибающими колебательной зависимости

$$w\bar{w} = |A|^2 + |B|^2 + 2|A||B|\cos(2kt + \arg A - \arg B) \tag{24}$$

будут, очевидно, функции $\left(|A| + |B|\right)^2$ и $\left(|A| - |B|\right)^2$, касающиеся (24) при $\cos(2kt + \arg A - \arg B) = \pm 1$. Поскольку выражений для этих огибающих будет вполне достаточно, чтобы установить из (23) поведение угла нутации с течением времени и тем самым оценить результаты численного исследования для моделей внешнего и внутреннего трения, то остается обратиться к выражениям для $|A|$ и $|B|$ из работы [36] и записать их в терминах настоящей статьи с учетом использованных обозначений, представив их также в безразмерной форме путем деления на l_0.

Так, для случая внешнего трения имеем:

$$f_1(\tau) = \frac{|A|}{l_0} = \frac{|A_0|}{l_0} e^{-\frac{\nu\tau}{2}}, \quad f_2(\tau) = \frac{|B|}{l_0} = \frac{|B_0|}{l_0} e^{-\frac{\nu\tau}{2}}, \tag{25}$$

тогда как для случая внутреннего трения эти зависимости будут:

$$f_1(\tau) = \frac{|A|}{l_0} = \sqrt{\frac{\delta e^{\mu\delta\tau}}{e^{\mu\delta\tau} - 1 + \dfrac{\delta}{|A_0|^2 / l_0^2}}}, \quad f_2(\tau) = \frac{|B|}{l_0} = \sqrt{\frac{\delta e^{-\mu\delta\tau}}{1 - e^{-\mu\delta\tau} + \dfrac{\delta}{|B_0|^2 / l_0^2}}}, \tag{26}$$

где A_0 и B_0 – начальные значения величин A и B, τ – безразмерное время, δ – обезразмеренная величина p_0, а ν и μ – безразмерные диссипативные параметры для внешнего и внутреннего трения соответственно.

Чтобы записать выражения для $|A_0| / l_0$ и $|B_0| / l_0$, фигурирующие в (25) и (26), используем следующие начальные условия движения при $t = 0$: $\theta = \theta_0 > 0$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = 0$, $\psi = \psi_0 = 0$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 > 0$. Учитывая, что в уравнениях

(10) и (21) для угла нутации используются безразмерные величины, то следует записать начальные условия, необходимые для их решения, в виде: $\theta = \theta_0 > 0$, $\theta' = \theta'_0 = 0$, а для p_0 будем иметь выражение: $p_0 = ml_0^2 \sin^2\theta_0 \dot{\psi}_0$, через которое можно определить и величину δ согласно третьей формуле (9). При этом для декартовых координат x и y заданные выше начальные условия движения могут быть представлены в виде: $x_0 = l_0 \sin\theta_0$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ и $\dot{y}_0 = l_0 \sin\theta_0 \dot{\psi}_0$, т. е. они достигаются путем отклонения СМ в направлении оси x и задания начальной скорости в направлении оси y. Учитывая, что $\dot{\psi}_0 = k\delta / \sin^2\theta_0$, то последнее из этих начальных условий приводится к виду $\dot{y}_0 = k\delta l_0 / \sin\theta_0$. Вновь используя формулы из работы [36], будем иметь:

$$\frac{|A_0|}{l_0} = \frac{1}{2}\left|\frac{x_0}{l_0} + \frac{\dot{y}_0}{kl_0}\right| = \frac{1}{2}\left|\sin\theta_0 + \frac{\delta}{\sin\theta_0}\right|, \quad \frac{|B_0|}{l_0} = \frac{1}{2}\left|\frac{x_0}{l_0} - \frac{\dot{y}_0}{kl_0}\right| = \frac{1}{2}\left|\sin\theta_0 - \frac{\delta}{\sin\theta_0}\right|. \quad (27)$$

Таким образом, для применения формул (27) следует знать только значения θ_0 и δ, которые и целесообразно задавать. Тогда огибающие $\theta_1(\tau)$ и $\theta_2(\tau)$ зависимости $\theta(\tau)$ отвечают выражениям:

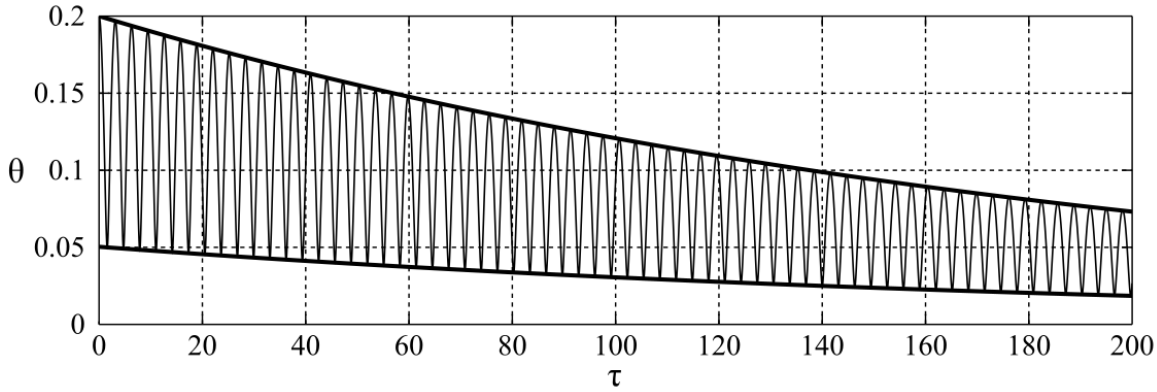
$$\sin\theta_1(\tau) = f_1(\tau) + f_2(\tau), \quad \sin\theta_2(\tau) = |f_1(\tau) - f_2(\tau)|, \quad (28)$$

и они смогут оценить результаты численного интегрирования при не очень больших отклонениях СМ от нижнего положения равновесия.

Графическая иллюстрация

Перейдем теперь к численному интегрированию уравнений (10) и (21). Для этого положим $\theta_0 = 0.2$, $\delta = 0.01$, $\nu = 0.01$, $\mu = 0.2$. Зависимости угла нутации θ от безразмерного времени τ для случаев внешнего и внутреннего трения, найденные посредством численного анализа, даны на рис. 2 и рис. 3 соответственно, где полужирными линиями приведены огибающие указанных зависимостей из приближенного аналитического решения согласно (28). Нетрудно видеть, что это приближенное решение в обоих случаях корректно отражает характер изменения угла нутации с течением безразмерного времени при принятых достаточно небольших начальных условиях движения, как того и следовало ожидать. При этом, как уже говорилось выше, в случае внешнего трения происходит полное затухание движений СМ, а в случае внутреннего трения движение СМ выходит на конический режим. Отметим, что затухание под действием внутреннего трения в реальности происходит весьма медленно, и для того чтобы по графику зависимости $\theta(\tau)$ можно было наблюдать постепенное уменьшение диапазона, в котором изменяется угол нутации, на интервале

времени, сопоставимом с несколькими десятками периодов колебаний,



значение диссипативного параметра μ было выбрано не столь малым.

Рис. 2. Зависимость $\theta(\tau)$ для случая внешнего трения

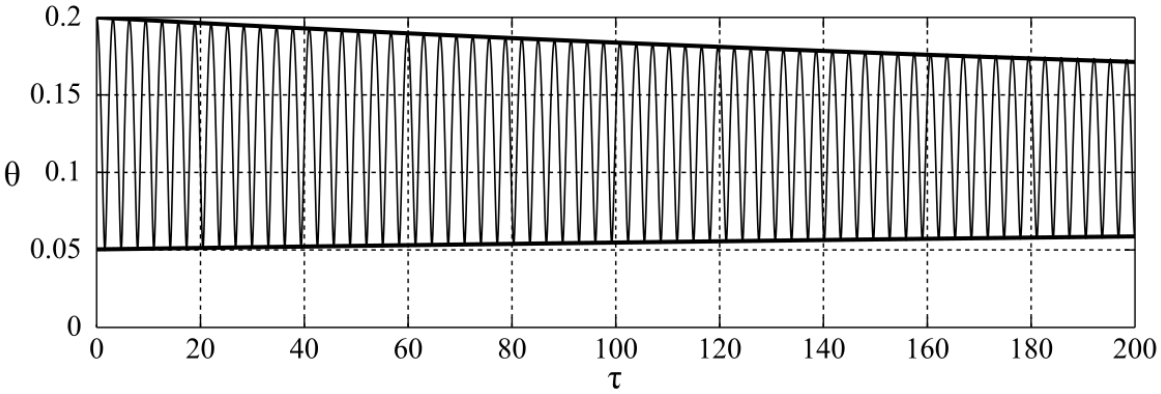


Рис. 3. Зависимость $\theta(\tau)$ для случая внутреннего трения

Заключение

В настоящей работе был рассмотрен вопрос о построении и анализе глобальной модели движения СМ при наличии сначала внешнего, а затем и внутреннего трения. В процессе анализа данных моделей были получены уравнения для угла нутации, приведенные к удобному безразмерному виду, к которым было применено численное интегрирование. В результате для каждого из этих вариантов были определены зависимости угла нутации от безразмерного времени, представленные в графической форме. Кроме того, было дано сопоставление этих колебательных зависимостей с их огибающими, которые отвечают найденному ранее приближенному аналитическому решению, вследствие чего было обнаружено весьма хорошее соответствие численных и аналитических результатов друг другу. Приведенные в работе результаты представляют теоретический интерес, а изученная в ней эволюционная модель внутреннего трения при движении

СМ, которая не учитывает дополнительную степень свободы и трактует ее как скрытую, может быть рекомендована в силу простоты и адекватности для использования и в других задачах прикладной теории колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Боголюбов А.Н. Роберт Гук (1635–1703). М.: Наука, 1984. 240 с.

[2] Clairaut, A.C. Examen des différentes oscillations qu'un corps suspendu par un fil peut faire lorsqu'on lui donne une impulsion quelconque. Mémoires de l'Académie royale des sciences Paris, 1735 (1738), pp. 281–298.

[3] Puiseux, V.A. Sur le mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1842, s. 1, vol. 7, pp. 517–520.

[4] Tisserand, F.F. Sur le mouvement du pendule conique. Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, 1881, s. 2, vol. 5, no 1, pp. 448–454.

[5] Resal, H.A. Traité de mécanique générale: comprenant les leçons professées a l'École Polytechnique. V. 1. Cinématique. Théorèmes généraux de la Mécanique. De l'équilibre et du mouvement des corps solides. Paris: Gauthier-Villars, 1873. 449 p.

[6] Sparre de, M.L.M. Sur le mouvement du pendule conique dans le cas des petites oscillations. Annales des Société scientifique de Bruxelles, 1902, vol. XXVI, p. 2.

[7] Tissot, N.A. Thesis de Mécanique. Journal de Mathématiques, 1852, vol. 17, pp. 88–116.

[8] Halphen, G.H. Traité des fonctions elliptiques. Vol. 2. Paris: 1888. 659 p.

[9] Saint-Germain de, A.L. Théorie du pendule sphérique. Mémoires de l'Académie nationale des sciences, arts et belleslettres de Caen, 1901, pp. 3–11.

[10] Greenhill, A.G. The applications of elliptic functions. London: MacMillan and co, 1892. 380 p.

[11] Крылов А.Н. Собрание трудов. В 12 т. Т. 8. М., Л.: изд-во АН СССР, 1950. 498 с.

[12] Глухих Ю.Д. Колебания сферического маятника с вибрирующей точкой подвеса. Механика твердого тела: межведомственный сборник научных трудов. 2005. Вып. 35. С. 109–114.

[13] Петров А.Г. Об уравнениях движения сферического маятника с колеблющейся точкой подвеса. Доклады Академии наук. 2005. Т. 405. № 1. С. 51–55.

[14] Буланчук П.О., Петров А.Г. Об управлении движением сферического маятника с помощью вибрации точки подвеса. Доклады Академии наук. 2010. Т. 430. № 5. С. 627–630.
[15] Маркеев А.П. О невырожденности функции Гамильтона сферического маятника. Доклады Академии наук. 2010. Т. 430. № 2. С. 189–194.
[16] Неспирный В.Н., Королев В.А. Стационарные режимы сферического маятника с подвижной точкой подвеса. Механика твердого тела. 2011. Вып. 41. С. 225–232.
[17] Стадник А.Н., Периг А.В., Дериглазов А.И. Применение относительных декартовых координат для сложного движения сферического маятника. Вестник Севастопольского национального технического университета. Механика, энергетика, экология. 2013. № 137. С. 24–31.
[18] Довбыш С.А. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и неинтегрируемость многомерных систем. Приложения к задаче о движении сферического маятника с колеблющейся точкой подвеса. Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 19. Вып. 3. С. 23–90.
[19] Мамонов Д.В. Задача о сферическом маятнике. Международная молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики». 17–19 ноября 2014 г., Томск. 2015. С. 72–75.
[20] Заика В.В., Масленников А.Л. Математическое моделирование однозвенного сферического маятника в сферической системе координат. Политехнический молодежный журнал. 2019. № 9 (38). С. 1–12.
[21] Кочетков А.В., Федотов П.В. Новые методические подходы решения сферического маятника в элементарных функциях. Введение в топологическую механику. Вестник Евразийской науки. 2019. Т. 11. № 2. С. 1–26.
[22] Смольников Б.А., Смирнов А.С. О соответствии слабо-нелинейной и глобальной моделей сферического маятника. XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Сборник тезисов докладов в 4 томах. Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 г. Т. 1. Общая и прикладная механика. 2023. С. 343–346.
[23] Полехин И.Ю. О доказательстве существования вынужденных колебаний с помощью добавления диссипативных сил на примере сферического маятника. Теоретическая и математическая физика. 2022. Т. 211. № 2. С. 295–305.
[24] Worland, R.S., Moelter, M.J. Two-dimensional pendulum experiments using a spark generator. The Physics Teacher, 2000, 38 (8), pp. 489–492.

[25] Leung, A.Y.T., Kuang, J.L. On the chaotic dynamics of a spherical pendulum with a harmonically vibrating suspension. Nonlinear Dynamics, 2006, 43 (3), pp. 213–238.
[26] Liu, G., Nesic, D., Mareels, I. Non-local stabilization of a spherical inverted pendulum. International Journal of Control, 2008, 81 (7), pp. 1035–1053.
[27] Myung-Gon, Y. Dynamics and stabilization of a spherical inverted pendulum on a wheeled cart. International Journal of Control. Automation and Systems, 2010, 8 (6), pp. 1271–1279.
[28] Dullin, H.R. Semi-global symplectic invariants of the spherical pendulum. Differential Equations, 2013, 254 (7), pp. 2942–2963.
[29] Litak, G., Margielewicz, J., Gąska, D., Yurchenko, D., Dąbek, K. Dynamic response of the spherical pendulum subjected to horizontal Lissajous excitation. Nonlinear Dynamics, 2020, 102, pp. 2125–2142.
[30] Trentin, J.F.S., Santos, D.A., da Silva, S., Schaub, H. Dynamic modeling and control of a spherical pendulum with a VSCMG. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2022, 44, 335.
[31] Смирнов А.С., Смольников Б.А. Механика сферического маятника. СПб.: Политех-пресс, 2019. 266 с.
[32] Стрелков С.П. Механика. М.: Наука, 1975. 560 с.
[33] Ламб Г. Теоретическая механика. Т. 2. Динамика. М., Л.: ОНТИ ГТТИ, 1935. 312 с.
[34] Шаин Ю.Ф. Исследование системы уравнений, описывающих движения сферического маятника в случае наличия сопротивления // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. 3. № 9. С. 1477–1483.
[35] Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1950. 440 с.
[36] Смирнов А.С., Смольников Б.А. Движение сферического маятника со слабой нелинейностью при наличии внешнего или внутреннего трения. Современное машиностроение: Наука и образование 2024. Материалы 13-й Международной научной конференции, 20 июня 2024 года. 2024. С. 129–148.

A.S. Smirnov[1,2], B.A. Smolnikov[1,2]

DISSIPATIVE MODELS IN THE PROBLEM OF GLOBAL MOTIONS OF A SPHERICAL PENDULUM

[1]Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia;
[2]Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Russia

Abstract

The article considers global models of motion of a spherical pendulum in the presence of external or internal friction. Equations of the system motion for the angles of nutation and precession are derived, and in both cases it is possible to exclude the precession angle from consideration and obtain a single equation for the nutation angle, which is reduced to a convenient dimensionless form. Using numerical integration for each dissipation variant, the dependence of the nutation angle on dimensionless time is determined, which is displayed in graphical form. For greater clarity, envelope lines are also plotted on the graphs, which are found from a previously known approximate analytical solution, and they are in very good agreement with the results of the numerical study. The conclusions made are of interest for the dynamics of dissipative pendulum systems, and they can be useful in practice.

Key words: spherical pendulum, nutation angle, precession angle, external friction, internal friction, global model.

REFERENCES

[1] Bogolyubov, A.N. Robert Hooke (1635–1703). Moscow: Nauka, 1984. 240 p. (rus.)

[2] Clairaut, A.C. Examen des différentes oscillations qu'un corps suspendu par un fil peut faire lorsqu'on lui donne une impulsion quelconque. Mémoires de l'Académie royale des sciences Paris, 1735 (1738), pp. 281–298.

[3] Puiseux, V.A. Sur le mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1842, s. 1, vol. 7, pp. 517–520.

[4] Tisserand, F.F. Sur le mouvement du pendule conique. Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, 1881, s. 2, vol. 5, no 1, pp. 448–454.

[5] Resal, H.A. Traité de mécanique générale: comprenant les leçons professées a l'École Polytechnique. V. 1. Cinématique. Théorèmes généraux de la Mécanique. De l'équilibre et du mouvement des corps solides. Paris: Gauthier-Villars, 1873. 449 p.

[6] Sparre de, M.L.M. Sur le mouvement du pendule conique dans le cas des petites oscillations. Annales des Société scientifique de Bruxelles, 1902, vol. XXVI, p. 2.

[7] Tissot, N.A. Thesis de Mécanique. Journal de Mathématiques, 1852, vol. 17, pp. 88–116.

[8] Halphen, G.H. Traité des fonctions elliptiques. Vol. 2. Paris: 1888. 659 p.

[9] Saint-Germain de, A.L. Théorie du pendule sphérique. Mémoires de l'Académie nationale des sciences, arts et belleslettres de Caen, 1901, pp. 3–11.
[10] Greenhill, A.G. The applications of elliptic functions. London: MacMillan and co, 1892. 380 p.
[11] Krylov, A.N. Collection of works. In 12 volumes. Vol. 8. Moscow, Leningrad: Academy of Sciences of the USSR, 1950. 498 p. (rus.)
[12] Glukhikh, Yu.D. Oscillations of a spherical pendulum with a vibrating suspension point. Mechanics of Solids: interdepartmental collection of scientific papers, 2005, iss. 35, pp. 109–114. (rus.)
[13] Petrov, A.G. On the equations of motion of a spherical pendulum with a fluctuating support. Doklady Physics, 2005, 50 (11), pp. 588–592.
[14] Bulanchuk, P.O., Petrov, A.G. Controlling spherical-pendulum motion with the help of suspension-point vibration. Doklady Physics, 2010, 55 (2), pp. 85–88.
[15] Markeev, A.P. In nondegeneracy of the Hamiltonian function for a spherical pendulum. Doklady Physics, 2010, 55 (1), pp. 33–38.
[16] Nespirnyy, V.N., Korolyov, V.A. Stationary modes of spherical pendulum with movable suspension point. Mechanics of Solids, 2011, 41, pp. 225–232. (rus.)
[17] Stadnik, A.N., Perig, A.V., Deriglazov, A.I. Introduction of Relative Cartesian Coordinates for the Compound Motion of Spherical Pendulum. Bulletin of Sevastopol National Technical University. Mechanics, Energy, Ecology, 2013, 137, pp. 24–31. (rus.)
[18] Dovbysh, S.A. The Splitting of Separatrices, the Branching of Solutions, and Nonintegrability of Many-Dimensional Systems. Application to the Problem of the Motion of a Spherical Pendulum with an Oscillating Suspension Point. Journal of Mathematical Sciences, 2016, 214 (6), pp. 755–801.
[19] Mamonov, D.V. Problem about a spherical pendulum. International youth scientific conference "Topical problems of modern continuum mechanics and celestial mechanics". November 17–19, 2014, Tomsk. 2015, pp. 72–75. (rus.)
[20] Zaika, V.V., Maslennikov, A.L. Single-joint spherical pendulum mathematical modeling in spherical coordinate system. Politechnical Student Journal, 2019, 9 (38), pp. 1–12. (rus.)
[21] Kochetkov, A.V., Fedotov, P.V. New methodical approaches of the solution of the spherical pendulum in elementary functions. Introduction to topological mechanics. The Eurasian Scientific Journal, 2019, 2 (11), pp. 1–26. (rus.)
[22] Smolnikov, B.A., Smirnov, A.S. On the correspondence between weakly nonlinear and global models of a spherical pendulum. XIII All-Russian

Congress on Theoretical and Applied Mechanics. Collection of report abstracts in 4 volumes. St. Petersburg, August 21–25, 2023. Vol. 1. General and applied mechanics. 2023, pp. 343–346. (rus.)
[23] Polekhin, I.Y. The existence proof for forced oscillations by adding dissipative forces in the example of a spherical pendulum. Theoretical and Mathematical Physics, 2022, 211 (2), pp. 692–700.
[24] Worland, R.S., Moelter, M.J. Two-dimensional pendulum experiments using a spark generator. The Physics Teacher, 2000, 38 (8), pp. 489–492.
[25] Leung, A.Y.T., Kuang, J.L. On the chaotic dynamics of a spherical pendulum with a harmonically vibrating suspension. Nonlinear Dynamics, 2006, 43 (3), pp. 213–238.
[26] Liu, G., Nesic, D., Mareels, I. Non-local stabilization of a spherical inverted pendulum. International Journal of Control, 2008, 81 (7), pp. 1035–1053.
[27] Myung-Gon, Y. Dynamics and stabilization of a spherical inverted pendulum on a wheeled cart. International Journal of Control. Automation and Systems, 2010, 8 (6), pp. 1271–1279.
[28] Dullin, H.R. Semi-global symplectic invariants of the spherical pendulum. Differential Equations, 2013, 254 (7), pp. 2942–2963.
[29] Litak, G., Margielewicz, J., Gąska, D., Yurchenko, D., Dąbek, K. Dynamic response of the spherical pendulum subjected to horizontal Lissajous excitation. Nonlinear Dynamics, 2020, 102, pp. 2125–2142.
[30] Trentin, J.F.S., Santos, D.A., da Silva, S., Schaub, H. Dynamic modeling and control of a spherical pendulum with a VSCMG. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2022, 44, 335.
[31] Smirnov, A.S., Smolnikov, B.A. Spherical pendulum mechanics. St. Petersburg: Polytech-press, 2019. 266 p. (rus.)
[32] Strelkov, S.P. Mechanics. Moscow: Nauka, 1975. 560 p. (rus.)
[33] Lamb H. Dynamics. Cambridge: The University press, 1914. 344 p.
[34] Shain, Yu.F. Study of the system of equations describing the motion of a spherical pendulum in the presence of resistance. Differential Equations, 1967, vol. 3, no. 9, pp. 1477–1483. (rus.)
[35] Lagrange J.-L. Mécanique Analytique. T. 2. Paris: Ve Courcier, 1815. 378 p.
[36] Smirnov A.S., Smolnikov B.A. Motion of a spherical pendulum with weak nonlinearity in the presence of external or internal friction. Modern mechanical engineering: Science and education 2024. Proceedings of the 13th International scientific conference, June 20, 2024. 2024, pp. 129–148. (rus.)