

УДК 531.538

doi:10.18720/SPBPU/2/id-112

А.С. Смирнов¹, Д.А. Снетков²

КОЛЕБАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОГО ДВОЙНОГО МАЯТНИКА СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ



¹Алексей Сергеевич Смирнов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра
Великого
Институт проблем машиноведения Российской академии наук
Россия, Санкт-Петербург
Тел.: (812)552-7778, E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com



²Даниил Алексеевич Снетков
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра
Великого
Россия, Санкт-Петербург
Тел.: (812)552-7778, E-mail: snetkov-d.a@mail.ru

Аннотация

В работе изучаются колебания двойного математического маятника с идентичными параметрами звеньев и концевых грузов, шарнирные оси которого образуют прямой угол. Даются точные нелинейные уравнения движения, и из них получаются как линейная модель малых колебаний, в которой уравнения не связаны друг с другом, так и модель со слабой нелинейностью, в которой удерживаются нелинейные слагаемые третьего порядка малости. Для последней из этих моделей производится построение приближенного аналитического решения при помощи асимптотических методов, в процессе которого устанавливаются его основные особенности. Полученные результаты приводятся в графической форме и сравниваются с аналитическим решением для линейной модели и численным решением для исходной нелинейной модели. Эти результаты представляют интерес для динамики маятниковых конструкций и могут оказаться полезными при решении конкретных прикладных задач в области робототехники.

Ключевые слова: ортогональный двойной маятник, модель со слабой нелинейностью, асимптотические методы, численное интегрирование.

Введение

Двойной маятник и его многочисленные модификации представляют большой интерес как в теоретическом, так и в практическом отношении, и изучению их динамического поведения посвящено немало научных работ [1–11]. На этом пути особое внимание привлекают пространственные варианты двухзвенных конструкций, которые исследованы значительно меньше, чем их плоские варианты [12, 13]. Среди этих конструкций можно выделить двойные маятники, имеющие неколлинеарные цилиндрические шарниры, вследствие чего их звенья будут перемещаться в различных плоскостях [14, 15]. Такие системы могут найти применение в области робототехники при разработке, конструировании и анализе динамического поведения двухзвенных манипуляторов, что обуславливает актуальность их детального изучения. В качестве простейшей системы подобного рода можно указать ортогональный двойной маятник, шарнирные оси которого составляют между собой прямой угол [16]. Нелинейная динамика этого пространственного двойного маятника исследована еще не достаточным образом, а она представляет большое значение для одного из важнейших разделов аналитической механики – динамики маятниковых систем.

В силу сказанного выше, в настоящей работе рассматривается модель колебаний ортогонального двойного маятника со слабой нелинейностью и осуществляется построение решения уравнений движения в рамках этой модели с выявлением его основных особенностей и его сопоставлением с результатами анализа линейной модели и исходной нелинейной модели.

Уравнения движения ортогонального двойного маятника

Рассмотрим ортогональный двойной маятник, полагая, что он состоит из двух математических маятников с идентичными звеньями длиной l и одинаковыми концевыми грузами массой m , причем оси цилиндрических шарниров этих маятников полагаются перпендикулярными друг другу (рис. 1). В качестве обобщенных координат будем принимать углы поворота θ_1 и θ_2 в шарнирах ортогонального двойного маятника.

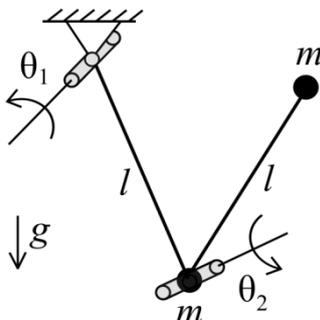


Рис. 1. Расчетная схема ортогонального двойного маятника

Точные выражения для кинетической и потенциальной энергий данной системы в рамках нелинейной модели могут быть заимствованы из работы [15], где рассматривался пространственный двойной маятник, шарниры которого не коллинеарны друг другу и образуют между собой угол α . Полагая $\alpha = \pi/2$, приходим к частному случаю ортогонального двойного маятника, и в этой ситуации кинетическая и потенциальная энергии приобретают вид:

$$T = \frac{1}{2} ml^2 [(2 + 2\cos\theta_2 + \cos^2\theta_2)\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2], \quad \Pi = mgl[3 - (2 + \cos\theta_2)\cos\theta_1]. \quad (1)$$

Точные уравнения движения ортогонального двойного маятника можно получить при помощи уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2}, \quad (2)$$

откуда после подстановки выражений (1) и элементарных преобразований будем иметь следующую систему:

$$\begin{cases} (2 + 2\cos\theta_2 + \cos^2\theta_2)\ddot{\theta}_1 - 2(1 + \cos\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 + k^2(2 + \cos\theta_2)\sin\theta_1 = 0, \\ \ddot{\theta}_2 + (1 + \cos\theta_2)\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 + k^2 \sin\theta_2 \cos\theta_1 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

причем здесь введено обозначение: $k = \sqrt{g/l}$ – частота малых колебаний обычного математического маятника длиной l .

Из системы уравнений (3) легко найти уравнения для наиболее простого случая малых колебаний ортогонального двойного маятника вблизи нижнего положения равновесия $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = 0$. Полагая углы θ_1 и θ_2 достаточно малыми, линеаризуем (3) и получим:

$$\begin{cases} 5\ddot{\theta}_1 + 3k^2\theta_1 = 0, \\ \ddot{\theta}_2 + k^2\theta_2 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

откуда вытекает, что углы θ_1 и θ_2 в рамках линейной модели изменяются независимо друг от друга, совершая гармонические колебания с частотами $k_{10} = \sqrt{3/5}k$ и $k_{20} = k$ соответственно:

$$\theta_1 = a_0 \cos(k_{10}t + \alpha_0), \quad \theta_2 = b_0 \cos(k_{20}t + \beta_0), \quad (5)$$

причем константы интегрирования a_0 и b_0 (амплитуды колебаний), а также α_0 и β_0 (начальные фазы колебаний) можно найти по начальным условиям движения $\theta_1 = \theta_{10}$, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_{10}$, $\theta_2 = \theta_{20}$ и $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_{20}$ при $t = 0$.

Модель колебаний ортогонального двойного маятника со слабой нелинейностью

Обратимся теперь к получению уравнений движения ортогонального двойного маятника в рамках модели со слабой нелинейностью, которая

подразумевает учет кубической нелинейности. С этой целью вернемся к исходной нелинейной системе уравнений (3) и перепишем ее в виде:

$$\begin{cases} 5\ddot{\theta}_1 + 3k^2\theta_1 = u_1, \\ \ddot{\theta}_2 + k^2\theta_2 = u_2, \end{cases} \quad (6)$$

где в левой части располагаются те же самые слагаемые, что и в линейной системе (4), а в правой части стоят величины u_1 и u_2 , равные

$$\begin{aligned} u_1 &= (3 - 2\cos\theta_2 - \cos^2\theta_2)\ddot{\theta}_1 + 2(1 + \cos\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 + k^2[3\theta_1 - (2 + \cos\theta_2)\sin\theta_1], \\ u_2 &= -(1 + \cos\theta_2)\dot{\theta}_1^2\sin\theta_2 + k^2(\theta_2 - \sin\theta_2\cos\theta_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Разложим далее входящие в (7) тригонометрические функции в ряды Маклорена (т. е. вблизи $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$) и удержим при этом только те слагаемые, которые будут содержать величины третьего порядка малости по обобщенным координатам θ_1 и θ_2 , обобщенным скоростям $\dot{\theta}_1$ и $\dot{\theta}_2$, а также обобщенным ускорениям $\ddot{\theta}_1$ и $\ddot{\theta}_2$:

$$u_1 = 2\theta_2^2\ddot{\theta}_1 + 4\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}k^2\theta_1(\theta_1^2 + \theta_2^2), \quad u_2 = -2\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6}k^2\theta_2(3\theta_1^2 + \theta_2^2). \quad (8)$$

В результате модель колебаний ортогонального двойного маятника со слабой нелинейностью будет описываться системой уравнений (6) с учетом соотношений (8). Также выпишем и выражения для кинетической и потенциальной энергий в рамках данной модели, которые понадобятся нам в дальнейшем. Для этого в формулах (1) необходимо удержать лишь слагаемые четвертого порядка малости по обобщенным координатам и скоростям:

$$T = \frac{1}{2}ml^2[(5 - 2\theta_2^2)\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2], \quad \Pi = mgl\left(\frac{3\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2} - \frac{\theta_1^4}{8} - \frac{\theta_1^2\theta_2^2}{4} - \frac{\theta_2^4}{24}\right). \quad (9)$$

Переходя к исследованию модели со слабой нелинейностью, будем использовать для этого асимптотические методы нелинейной механики. Подобное исследование ранее было проведено для случая плоского двойного маятника в работе [17]. Будем искать решение уравнений (6) в исходном приближении в виде, аналогичном (5), а именно:

$$\theta_1 = a \cos \varphi, \quad \varphi = k_1 t + \alpha, \quad \theta_2 = b \cos \psi, \quad \psi = k_2 t + \beta, \quad (10)$$

где по сравнению с (5) изменены обозначения для амплитуд a и b и начальных фаз колебаний α и β , и, кроме того, в выражениях для полных фаз фигурируют уже другие частоты колебаний k_1 и k_2 , которые будут некоторым образом зависеть от амплитуд a и b . Нетрудно понять, что ввиду кубической нелинейности зависимости $k_1(a, b)$ и $k_2(a, b)$ будут квадратичными функциями величин a и b , четными как относительно a , так и относительно b . Поэтому будем искать их в следующем виде:

$$k_1 = k_{10}(1 + \mu_1 a^2 + \rho_1 b^2), \quad k_2 = k_{20}(1 + \mu_2 b^2 + \rho_2 a^2). \quad (11)$$

Коэффициенты μ_1 , ρ_1 , μ_2 и ρ_2 в этих выражениях определяются из следующих уравнений гармонического баланса:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (5\ddot{\theta}_1 + 3k^2\theta_1 - u_1) \cos \varphi d\varphi d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\ddot{\theta}_2 + k^2\theta_2 - u_2) \cos \psi d\varphi d\psi = 0. \quad (12)$$

Из формул (10) и (11) можно получить выражения для $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\ddot{\theta}_1$ и $\ddot{\theta}_2$ с необходимой для дальнейших вычислений точностью, т. е. с точностью до слагаемых третьего порядка малости по a и b :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -ak_{10}(1 + \mu_1 a^2 + \rho_1 b^2) \sin \varphi, & \dot{\theta}_2 &= -bk_{20}(1 + \mu_2 b^2 + \rho_2 a^2) \sin \psi, \\ \ddot{\theta}_1 &= -ak_{10}^2(1 + 2\mu_1 a^2 + 2\rho_1 b^2) \cos \varphi, & \ddot{\theta}_2 &= -bk_{20}^2(1 + 2\mu_2 b^2 + 2\rho_2 a^2) \cos \psi. \end{aligned} \quad (13)$$

Чтобы получить выражения для u_1 и u_2 с той же самой точностью, достаточно подставить в формулы (7) выражения для обобщенных координат, скоростей и ускорений с точностью до первого порядка малости по a и b , а именно:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= a \cos \varphi, & \dot{\theta}_1 &= -ak_{10} \sin \varphi, & \ddot{\theta}_1 &= -ak_{10}^2 \cos \varphi, \\ \theta_2 &= b \cos \psi, & \dot{\theta}_2 &= -bk_{20} \sin \psi, & \ddot{\theta}_2 &= -bk_{20}^2 \cos \psi. \end{aligned} \quad (14)$$

В результате этих действий после серии преобразований получим:

$$\begin{aligned} u_1 &= k^2 \left[\left(\frac{3}{8} a^3 - \frac{7}{20} ab^2 \right) \cos \varphi + \left(\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{7}{40} \right) ab^2 \cos(2\psi - \varphi) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{7}{40} \right) ab^2 \cos(2\psi + \varphi) + \frac{1}{8} a^3 \cos 3\varphi \right], \\ u_2 &= k^2 \left[\left(\frac{1}{8} b^3 - \frac{7}{20} a^2 b \right) \cos \psi + \frac{17}{40} a^2 b \cos(2\varphi - \psi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{17}{40} a^2 b \cos(2\varphi + \psi) + \frac{1}{24} b^3 \cos 3\psi \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставим теперь выражения (10), (13) и (15) в уравнения гармонического баланса (12) и приравняем в их левых и правых частях поочередно коэффициенты при одинаковых комбинациях величин a и b , вследствие чего получим:

$$\mu_1 = -\frac{1}{16}, \quad \rho_1 = \frac{7}{120}, \quad \mu_2 = -\frac{1}{16}, \quad \rho_2 = \frac{7}{40}, \quad (16)$$

так что для частот колебаний (11) будем иметь следующие выражения в рамках модели со слабой нелинейностью:

$$k_1 = k_{10} \left(1 - \frac{1}{16} a^2 + \frac{7}{120} b^2 \right), \quad k_2 = k_{20} \left(1 - \frac{1}{16} b^2 + \frac{7}{40} a^2 \right). \quad (17)$$

Отсюда легко видеть, что частоты колебаний k_1 и k_2 могут быть как меньшими, так и большими линейных значений k_{10} и k_{20} , в зависимости от амплитуд колебаний a и b .

Далее следует уточнить выражения (10) с учетом (17), а именно, определить поправки третьего порядка малости по величинам a и b , что и приведет нас к искомому решению для модели со слабой нелинейностью. Возвращаясь к уравнениям (6) и трактуя в них u_1 и u_2 как вынуждающие эффекты, действующие в линейных системах с одной степенью свободы (для θ_1 и θ_2 соответственно), установим, какое вынужденное колебание возбуждает каждое из гармонических слагаемых в u_1 и u_2 из (15). При этом будем иметь в виду, что гармоники $\cos\varphi$ и $\cos\psi$ уже сбалансированы исходя из уравнений гармонического баланса (12), так что отвечающие им слагаемые уже учтены. Суммируя для обоих уравнений (6) все решения, отвечающие каждой гармонической составляющей в формулах (15), получим с необходимой точностью следующие выражения:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_1 &= \frac{(\sqrt{3/5} - 7/40)k^2 ab^2}{3k^2 - 5(k_{10} - 2k_{20})^2} \cos(2\psi - \varphi) - \frac{(\sqrt{3/5} + 7/40)k^2 ab^2}{3k^2 - 5(k_{10} + 2k_{20})^2} \cos(2\psi + \varphi) + \\ &\quad + \frac{k^2 a^3}{8[3k^2 - 5(3k_{10})^2]} \cos 3\varphi, \\ \tilde{\theta}_2 &= \frac{17/40k^2 a^2 b}{k^2 - (2k_{10} - k_{20})^2} \cos(2\varphi - \psi) + \frac{17/40k^2 a^2 b}{k^2 - (2k_{10} + k_{20})^2} \cos(2\varphi + \psi) + \\ &\quad + \frac{k^2 b^3}{24[k^2 - (3k_{20})^2]} \cos 3\psi.\end{aligned}\tag{18}$$

В результате искомое решение, уточняющее формулы (10), определится как $\theta_1 = a \cos \varphi + \tilde{\theta}_1$ и $\theta_2 = b \cos \psi + \tilde{\theta}_2$, или в развернутой форме:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= a \cos \varphi - \frac{a^3}{192} \cos 3\varphi - \\ &\quad - \frac{ab^2}{320} \left[\left(17 + 33\sqrt{\frac{3}{5}} \right) \cos(2\psi - \varphi) + \left(17 - 33\sqrt{\frac{3}{5}} \right) \cos(2\psi + \varphi) \right], \\ \theta_2 &= b \cos \psi - \frac{b^3}{192} \cos 3\psi + \\ &\quad + \frac{17a^2 b}{192} \left[\left(3 + \sqrt{15} \right) \cos(2\varphi - \psi) + \left(3 - \sqrt{15} \right) \cos(2\varphi + \psi) \right].\end{aligned}\tag{19}$$

Таким образом, решение в рамках модели со слабой нелинейностью имеет вид (19), где $\varphi = k_1 t + \alpha$ и $\psi = k_2 t + \beta$, а выражения для k_1 и k_2 даются формулами (17). Отметим, что корректность построенного решения можно проверить, если подставить его в систему уравнений (6) с учетом (8) и убедиться в том, что оно в самом деле удовлетворяет этой системе с точностью до величин третьего порядка малости по a и b . Кроме того, проверку данного решения можно осуществить, если вычислить полную механическую энергию $E = T + \Pi$ согласно (9) и убедиться, что она не зависит от полных фаз φ и ψ , а, стало быть, и от времени, как и должно быть ввиду консервативности задачи. Это выражение имеет вид:

$$E = mgl \left(\frac{3}{2} a^2 - \frac{9}{64} a^4 + \frac{1}{2} b^2 - \frac{3}{64} b^4 - \frac{3}{80} a^2 b^2 \right), \quad (20)$$

и оно зависит только от a и b , что подтверждает сказанное выше.

Обращаясь к детальному анализу формул (19), замечаем, что угол θ_1 представляет собой сумму четырех гармонических колебаний с частотами k_1 , $3k_1$, $2k_2 - k_1$ и $2k_2 + k_1$, тогда как угол θ_2 есть сложение четырех гармонических колебаний с частотами k_2 , $3k_2$, $2k_1 - k_2$ и $2k_1 + k_2$. Кроме того, из формул (19) как частные случаи можно получить выражения для периодических режимов движения ортогонального двойного маятника. Полагая в этих формулах поочередно $b = 0$ и $a = 0$, получим с учетом (17):

$$\begin{aligned} \theta_1 &= a \cos \varphi - \frac{a^3}{192} \cos 3\varphi, \quad \theta_2 = 0, \quad k_1 = k_{10} \left(1 - \frac{1}{16} a^2 \right); \\ \theta_1 &= 0, \quad \theta_2 = b \cos \psi - \frac{b^3}{192} \cos 3\psi, \quad k_2 = k_{20} \left(1 - \frac{1}{16} b^2 \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Видно, что в первом случае угол θ_1 является периодической, но уже не гармонической функцией, которая имеет частоту k_1 , тогда как колебания по углу θ_2 отсутствуют, а во втором случае угол θ_2 представляет собой периодическую, но не гармоническую функцию, имеющую частоту k_2 , а колебаний по углу θ_1 не происходит. При этом оба представленных режима являются идентичными по формульной записи с точностью до обозначений. Подчеркнем, что их существование можно было обнаружить изначально, поскольку уравнения (3) допускают частные решения, которые определяются из следующих соображений:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + k_{10}^2 \sin \theta_1 &= 0, \quad \theta_2 = 0; \\ \theta_1 = 0, \quad \ddot{\theta}_2 + k_{20}^2 \sin \theta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Ясно, что оба представленных уравнения для θ_1 и θ_2 есть не что иное, как уравнение движения обычного математического маятника, для которого решение в различных приближениях приведено в [18], и с необходимой

точностью оно совпадает с выражениями (21). Остается отметить, что в общем случае решение, имеющее вид (19), имеет намного более сложный характер, чем вытекающие из него периодические режимы движения (21), и в силу нелинейности задачи их суперпозиция не дает полного решения.

Обсуждение результатов

Перейдем теперь к графической иллюстрации результатов, которые получаются при использовании различных моделей, и их сопоставлению между собой. Будем отталкиваться от выражений для модели со слабой нелинейностью, которые имеют вид (19), и зададим в них некоторые не слишком малые, но и не слишком большие значения величин a и b , положив при этом начальные фазы равными нулю, т. е. примем $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Тогда $\varphi = k_1 t$ и $\psi = k_2 t$, где k_1 и k_2 определяются по формулам (17). Из (19) нетрудно понять, что такое движение будет реализовываться, если движение начинается из состояния покоя, т. е. при нулевых начальных угловых скоростях: $\theta_1 = \theta_{10}$, $\dot{\theta}_1 = 0$, $\theta_2 = \theta_{20}$ и $\dot{\theta}_2 = 0$ при $t = 0$, причем

$$\theta_{10} = a - \frac{a^3}{192} - \frac{17ab^2}{160}, \quad \theta_{20} = b - \frac{b^3}{192} + \frac{17a^2b}{32}. \quad (23)$$

Если же задать в линейной модели те же самые начальные условия движения, то они согласно (5) будут удовлетворены при $a_0 = \theta_{10}$, $b_0 = \theta_{20}$, $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = 0$. Наконец, следует проинтегрировать численно систему точных уравнений движения ортогонального двойного маятника (3) в рамках исходной нелинейной модели при тех же самых начальных условиях движения, вследствие чего будем иметь для данной модели численное решение. Выясним, насколько адекватными приближениями к нему будут являться решения, найденные в рамках линейной модели и модели со слабой нелинейностью.

Положим, например, $a = 0.3$ рад и $b = 0.7$ рад. Тогда по формуле (23) будем иметь следующие начальные значения углов поворота в шарнирах маятника: $\theta_{10} = 0.2842$ рад и $\theta_{20} = 0.7317$ рад. Зададим также конкретное значение величины k , например, для простоты примем $k = 1$ рад/с. Тогда согласно (17) получим: $k_1 = 0.7924$ рад/с и $k_2 = 0.9851$ рад/с. Что касается линейной модели, то для нее исходя из сказанного ранее имеем $a_0 = 0.2842$ рад и $b_0 = 0.7317$ рад, а $k_{10} = 0.7746$ рад/с и $k_{20} = 1$ рад/с.

На рис. 2 приведены графики зависимости углов поворота θ_1 и θ_2 в шарнирах маятника от времени t , которые отвечают линейной модели (красные линии), модели со слабой нелинейностью (синие точечные линии), а также исходной нелинейной модели (зеленые линии).

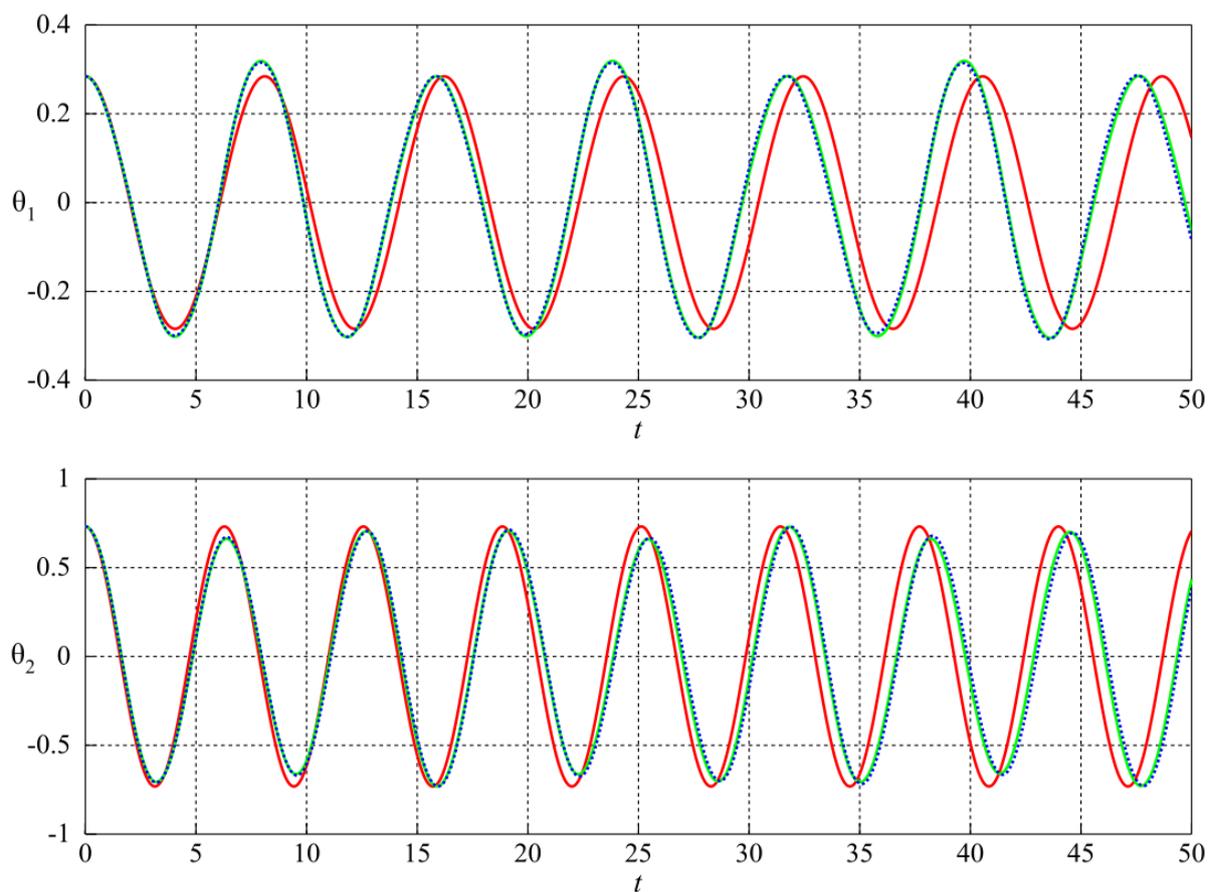


Рис. 2. Графики зависимости углов поворота θ_1 и θ_2 в шарнирах маятника от времени t в рамках линейной модели (красные линии), модели со слабой нелинейностью (синие точечные линии) и нелинейной модели (зеленые линии)

Анализируя представленные на рис. 2 графики, можно сделать вывод, что при принятых начальных условиях, которые уже не являются малыми, линейная модель дает результаты, плохо согласующиеся с численным решением для исходной нелинейной модели. Это означает, что она не позволяет получить корректную картину поведения ортогонального двойного маятника, в то время, как модель со слабой нелинейностью дает адекватные результаты, близкие к численному решению для нелинейной модели в качественном отношении, а количественные расхождения между ними весьма незначительны. Эти заключения лишней раз подтверждают целесообразность изучения модели со слабой нелинейностью.

Заключение

В настоящей работе были рассмотрены колебания ортогонального двойного маятника с идентичными параметрами его звеньев и концевых грузов с учетом слабой нелинейности третьего порядка малости. Анализ этой модели при помощи асимптотических методов позволил получить довольно компактное решение и выявить его ключевые особенности,

связанные с его нетривиальной структурой. В частности, из этого решения можно найти выражения для периодических режимов движения системы, когда колебания имеют место лишь по одной обобщенной координате, и они оказываются аналогичными колебаниям математического маятника. Полученное решение также было приведено в графической форме вместе с решениями для линейной модели и исходной нелинейной модели, причем для обсчета последней из них применялось численное интегрирование. Представленная графическая иллюстрация позволяет заключить, что модель со слабой нелинейностью адекватно описывает колебательные процессы в системе при принятых начальных условиях, которые нельзя считать малыми, а линейная модель не отражает правильным образом поведение этой системы, как того можно было ожидать. Полученные результаты имеют фундаментальное значение, а также они могут оказаться полезными при решении прикладных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Акбиров Р.Р., Маликов А.И. Управление двойным перевернутым маятником на тележке. Вестник Казанского технического университета им. А.Н. Туполева. 2018. Т. 74. № 2. С. 168–177.
- [2] Смирнов А.С., Смольников Б.А. Колебания двойного математического маятника с внутренним трением. Современное машиностроение: Наука и образование 2022. Материалы 11-й Международной научной конференции, 23 июня 2022 года. 2022. С. 113–125.
- [3] Беляев А.К., Полякова О.Р., Товстик Т.П. Динамика и устойчивость двухзвенного маятника Капицы. Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2023. № 2. С. 78–87.
- [4] Cross, R. A double pendulum swing experiment: In search of a better bat. *American Journal of Physics*, 2005, 73 (4), pp. 330–339.
- [5] Stachowiak, T., Okada, T. A numerical analysis of chaos in the double pendulum. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 29 (2), pp. 417–422.
- [6] Rafat, M., Wheatland, M., Bedding, T. Dynamics of a double pendulum with distributed mass. *American Journal of Physics*, 2009, 77 (3), pp. 216–223.
- [7] Maiti, S., Roy, J., Mallik, A.K., Bhattacharjee, J. Nonlinear dynamics of a rotating double pendulum. *Physics Letters*, 2015, 380 (3), pp. 408–412.
- [8] Elbori, A., Abdalsmd, L. Simulation of Double Pendulum. *Journal of Software Engineering and Simulation*, 2017, 3 (7), pp. 1–13.

- [9] Luo, A.C.J., Guo, C. A Period-1 Motion to Chaos in a Periodically Forced, Damped, Double-Pendulum. *Journal of Vibration Testing and System Dynamics*, 2019, 3 (3), pp. 259–280.
- [10] Sawant, K.R., Shrikanth, V. Energy dissipation and behavioral regimes in an autonomous double pendulum subjected to viscous and dry friction damping. *European Journal of Physics*, 2021, 42 (5), 055008.
- [11] Awrejcewicz, J., Wasilewski, G., Kudra, G., Reshmin, S.A. An experiment with swinging up a double pendulum using feedback control. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, 51 (2), pp. 176–182.
- [12] Агарева О.Ю. Относительные равновесия двойного сферического маятника и их устойчивость. Деп. в ВИНТИ 4.12.1996. № 34930-B96.
- [13] Ludwicki, M., Awrejcewicz, J., Kudra, G. Spatial double physical pendulum with axial excitation: computer simulation and experimental set-up. *International Journal of Dynamics and Control*, 2015, 3, pp. 1–8.
- [14] Bendersky, S., Sandler, B. Investigation of a spatial double pendulum: an engineering approach. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2006, pp. 1–22.
- [15] Смирнов А.С., Смольников Б.А. Колебания двойного математического маятника с неколлинеарными шарнирами. Современное машиностроение: Наука и образование 2020. Материалы 9-й Международной научно-практической конференции, 25 июня 2020 года. 2020. С. 153–165.
- [16] Меркин Д.Р., Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Смольников Б.А. Теория устойчивости в примерах и задачах. М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 208 с.
- [17] Смирнов А.С., Кравчинский С.А. Колебания двойного маятника с учетом слабой нелинейности. Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2023–2024. 2024. С. 19–33.
- [18] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958. 408 с.

OSCILLATIONS OF ORTHOGONAL DOUBLE PENDULUM WITH WEAK NONLINEARITY

¹Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia;

²Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Russia

Abstract

The paper studies oscillations of a double mathematical pendulum with identical parameters of links and end loads, the joint axes of which form a right angle. Exact nonlinear equations of motion are given, and both a linear model of small oscillations, in which the equations are not related to each other, and a model with weak nonlinearity, in which nonlinear terms of the third order of smallness are retained, are obtained from them. For the latter of these models, an approximate analytical solution is constructed using asymptotic methods, in the process of which its main features are established. The obtained results are presented in graphical form and compared with the analytical solution for the linear model and the numerical solution for the original nonlinear model. These results are of interest for the dynamics of pendulum structures and may also be useful in solving specific applied problems in the field of robotics.

Key words: orthogonal double pendulum, weak nonlinearity model, asymptotic methods, numerical integration.

REFERENCES

- [1] Akbirov, R.R., Malikov, A.I. Control of a double inverted pendulum on a cart. Vestnik KGTU im. A.N. Tupoleva, 2018. 74 (2), pp. 168-177. (rus.)
- [2] Smirnov, A.S., Smolnikov, B.A. Oscillations of double mathematical pendulum with internal friction. Modern mechanical engineering: Science and education 2022. Proceedings of the 11th International scientific conference, June 23, 2022. 2022, pp. 113–125. (rus.)
- [3] Belyaev, A.K., Polyakova, O.R., Tovstik, T.P. Dynamics and stability of Kapitsa's two-link pendulum. PNRPU Mechanics Bulletin, 2023, 2, pp. 78–87. (rus.)
- [4] Cross, R. A double pendulum swing experiment: In search of a better bat. American Journal of Physics, 2005, 73 (4), pp. 330–339.
- [5] Stachowiak, T., Okada, T. A numerical analysis of chaos in the double pendulum. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 29 (2), pp. 417–422.

- [6] Rafat, M., Wheatland, M., Bedding, T. Dynamics of a double pendulum with distributed mass. *American Journal of Physics*, 2009, 77 (3), pp. 216–223.
- [7] Maiti, S., Roy, J., Mallik, A.K., Bhattacharjee, J. Nonlinear dynamics of a rotating double pendulum. *Physics Letters*, 2015, 380 (3), pp. 408–412.
- [8] Elbori, A., Abdalsmd, L. Simulation of Double Pendulum. *Journal of Software Engineering and Simulation*, 2017, 3 (7), pp. 1–13.
- [9] Luo, A.C.J., Guo, C. A Period-1 Motion to Chaos in a Periodically Forced, Damped, Double-Pendulum. *Journal of Vibration Testing and System Dynamics*, 2019, 3 (3), pp. 259–280.
- [10] Sawant, K.R., Shrikanth, V. Energy dissipation and behavioral regimes in an autonomous double pendulum subjected to viscous and dry friction damping. *European Journal of Physics*, 2021, 42 (5), 055008.
- [11] Awrejcewicz, J., Wasilewski, G., Kudra, G., Reshmin, S.A. An experiment with swinging up a double pendulum using feedback control. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, 51 (2), pp. 176–182.
- [12] Agareva, O.Yu. Relative equilibria of a double spherical pendulum and their stability. Dep. v VINITI 4.12.1996. N3493-B96. (rus.)
- [13] Ludwicki, M., Awrejcewicz, J., Kudra, G. Spatial double physical pendulum with axial excitation: computer simulation and experimental set-up. *International Journal of Dynamics and Control*, 2015, 3, pp. 1–8.
- [14] Bendersky, S., Sandler, B. Investigation of a spatial double pendulum: an engineering approach. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2006, pp. 1–22.
- [15] Smirnov, A.S., Smolnikov, B.A. Oscillations of double mathematical pendulum with noncollinear joints. *Modern mechanical engineering: Science and education 2020. Proceedings of the 9th International scientific and practical conference, June 25, 2020. 2020*, pp. 153–165. (rus.)
- [16] Merkin, D.R., Bauer, S.M., Smirnov, A.L., Smolnikov, B.A. *The theory of stability in examples and problems. Moscow, Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2007. 208 p. (rus.)*
- [17] Smirnov, A.S., Kravchinskiy, S.A. Oscillations of a double pendulum with a weak nonlinearity. *Transactions of seminar “Computer methods in continuum mechanics” 2023–2024. 2024*, pp. 19–33. (rus.)
- [18] Bogoliubov, N.N., Mitropolsky, Y.A. *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. Moscow: GIFML, 1958. 408 p. (rus.)*