

УДК 531.8, 621.01,

doi:10.18720/SPBPU/2/id-116

А.А. Хрестина¹, Е.М. Исполов², П.А. Ларюшкин³

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ О ПОЛОЖЕНИЯХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ n -PRR



¹Арина Артуровна Хрестина,
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской
академии наук
Россия, Москва

Тел.: +7 (495) 628-8730, E-mail: gaynetdinova.arina@gmail.com .



²Егор Михайлович Исполов,
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской
академии наук
Россия, Москва

Тел.: +7 (495) 628-8730, E-mail: ispolov1989@mail.ru.



³Павел Андреевич Ларюшкин,
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана
Россия, Москва

Тел.: +7 (499) 263-6337, E-mail: pav.and.lar@bmstu.ru .

Аннотация

В работе рассматривается обобщенная модель решения обратной задачи о положениях механизмов параллельной структуры, имеющих в составе кинематическую цепь, состоящую из каретки (ползуна) и двух вращательных шарниров с параллельными осями. В качестве результатов представлены общие алгоритмы и формулы, служащие для определения перемещения каретки при произвольном расположении направляющих цепи.

Ключевые слова: кинематическая цепь, плоский механизм, пространственный механизм, механизм параллельной структуры, обратная задача о положениях

Введение

Современный мир невозможно представить без роботизированных механизмов, реализующих сложные траектории движения рабочего органа. От роботов, предназначенных для микрохирургических операций до манипуляционных механизмов автоматической сортировки мусора [6] – все эти устройства упрощают жизнь современного человека [12]. С точки зрения кинематики, механизмы манипуляторов можно разделить на два класса – последовательные и параллельные. Каждый из классов имеет свои особенности, преимущества и недостатки. Так, последовательные механизмы лучше подходят для задач, требующих гибкости при планировании и реализации траектории сложного движения выходного звена [6], тогда как параллельные механизмы обеспечивают высокую точность и устойчивость при работе с большими нагрузками [8-9]. При этом параллельные механизмы, обладающие более сложной кинематической структурой, все чаще находят применения в машиностроении, медицине [3], робототехнике и других областях [4], в которых к манипуляторам предъявляются высокие требования к скорости, точности и грузоподъёмности.

По типу движений выходного звена параллельные механизмы можно разделить плоские и пространственные. Плоские параллельные механизмы работают в двухмерном пространстве [1], а именно обеспечивают движение рабочего органа в заданной плоскости с тремя степенями свободы: двумя поступательными и одной вращательной. Пространственные параллельные механизмы работают в трёхмерном пространстве и могут реализовывать более сложные движения выходного звена [13-14]. При этом, однако, возможно также использовать плоские кинематические цепи и даже полноценные механизмы для реализации движения рабочего органа в пространстве. Так, например, в механизме MedRUE (Рис. 1), предназначенном для проведения автоматизированных ультразвуковых исследований пациентов, два плоских пятизвенных механизма установлены на общей линейной направляющей и соединены между собой телескопическим звеном посредством шарниров Гука [15]. При этом ось направляющей перпендикулярна плоскостям плоских механизмов. Каждый пятизвенный механизм имеет по два собственных независимых вращательных привода, установленных в крайних шарнирах кинематического контура механизма. Кроме того, перемещение по линейной направляющей каждого механизма осуществляется независимо. За счет возможности изменения расстояния между плоскостями пятизвенных механизмов, а также благодаря конструкции телескопического звена, также имеющего отдельный привод для вращения вокруг

собственной оси, рабочий орган робота MedRUE обладает шестью степенями свободы.



Рис. 1. Робот для медицинских исследований MedRUE

В подобных «составных» механизмах выходное звено перемещается в пространстве, однако всегда можно выделить условное (промежуточное) выходное звено плоского механизма либо отдельной плоской кинематической цепи.

В данной статье мы предложим и рассмотрим подход к решению обратной задачи о положениях для плоских кинематических цепей со структурой $\underline{P}RR$, где P обозначает призматическую кинематическую пару, R – вращательную кинематическую пару, а подчеркивание указывает на то, что пара является активной (приводной). Подобная цепь может являться как частью пространственного механизма параллельной структуры, так и плоского [10]. В частности, для сферического механизма, представленного в работе [5], может быть проведена замена плоской диады RPR на диаду $\underline{P}RR$, что при внесении определенных конструктивных изменений может изменить конфигурацию особых положений механизма. Также цепь $\underline{P}RR$ является частью кинематически избыточного четырехподвижного плоского механизма с интегрированным схватом [11].

Основным достоинством предлагаемой математической модели обобщенного плоского механизма параллельной структуры с кинематическими цепями $\underline{P}RR$ является возможность выбора системы координат любым удобным образом. Кроме того, получаемые уравнения связи в виде квадрантных уравнений относительно приводной координаты цепи более удобны при дальнейшем исследовании скоростей и ускорений механизма, нежели альтернативный вариант, использующий функцию арккосинуса.

Алгоритм решения обратной задачи о положениях

Для решения обратной задачи о положениях рассмотрим некоторый обобщенный плоский механизм n -PRR в общем виде, который состоит из n кинематических цепей одинаковой структуры (Рис. 2) [7].

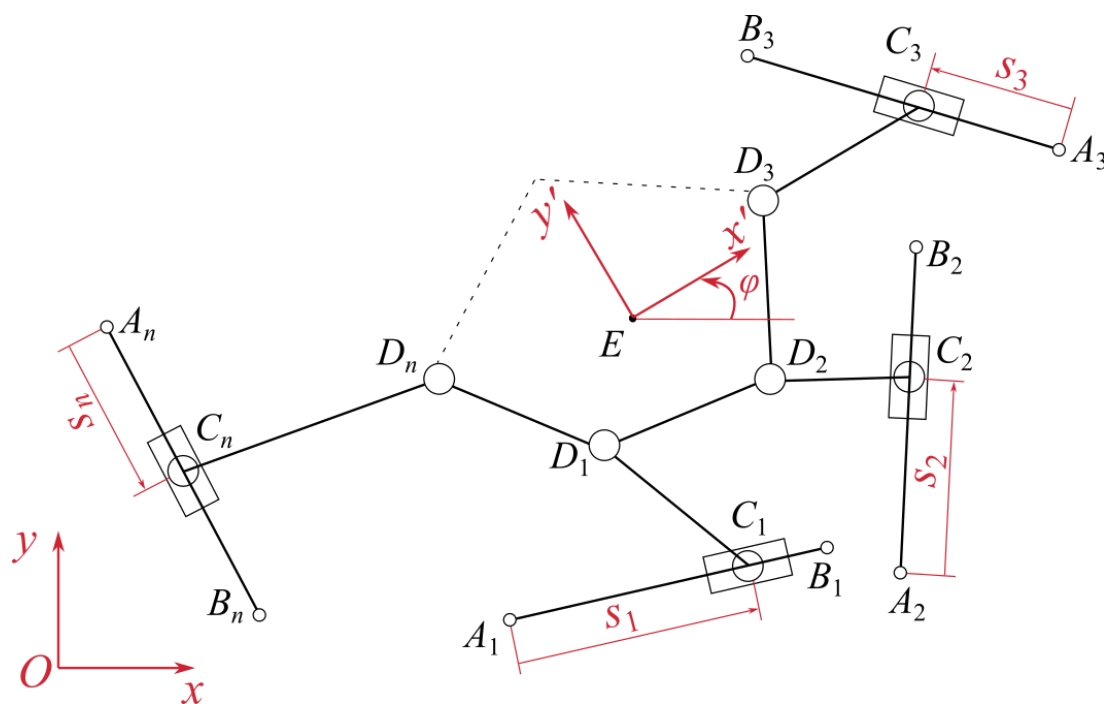


Рис. 2. Обобщенный плоский механизм n -PRR

В каждой цепи имеется направляющая AB , по которой движется каретка, на которой расположен вращательный шарнир C . Данный шарнир посредством штанги CD соединен с аналогичным вращательным шарниром D , расположенном на выходном звене. Положение выходного звена (точка E) в неподвижной плоской системе координат Oxy определяется координатами x_E , y_E и углом поворота φ [2]. Положение каретки на направляющей AB задается ее перемещением s , представляющим собой расстояние от точки A до точки C .

Для каждой кинематической цепи геометрическими параметрами, которые считаются заданными и не изменяют своих значений в процессе работы механизма, являются:

- координаты точек A и B направляющей в системе Oxy : x_A , y_A , x_B , y_B ;
- координаты точки D в системе $Ex'y'$: x'_D , y'_D ;
- длина звена CD : l_{CD} .

При решении обратной задачи о положениях необходимо для заданных значений x_E , y_E и φ для каждой кинематической цепи вычислить значение перемещения s . Легко видеть, что в общем случае количество решений обратной задачи о положениях для одной цепи равно двум.

Для дальнейших вычислений будем рассматривать одну кинематическую цепь.

Сначала определим координаты точки D в системе Oxy , учитывая положение точки E и поворот выходного звена на угол φ :

$$\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \end{bmatrix} + \mathbf{R}_\varphi \begin{bmatrix} x'_D \\ y'_D \end{bmatrix}.$$

Матрица поворота R_φ для правой системы координат имеет следующий вид:

$$\mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Тогда координаты точки D можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_D &= x_E + x'_D \cos \varphi - y'_D \sin \varphi, \\ y_D &= y_E + x'_D \sin \varphi + y'_D \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Следующим шагом рассмотрим геометрию цепи в предположении, что решение обратной задачи о положениях в действительных числах существует (Рис.3).

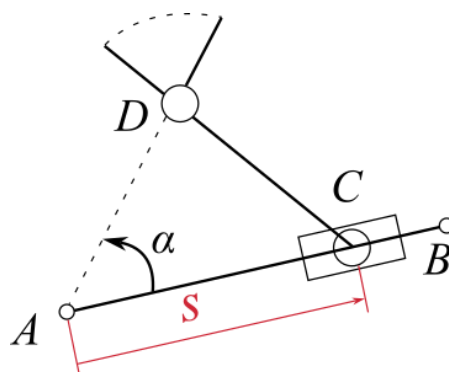


Рис. 3. Одна кинематическая цепь $\underline{PRR}$

Для треугольника ACD справедлива теорема косинусов, которая с учетом того, что длина стороны AC равна s , может быть записана следующим образом:

$$l_{CD}^2 = s^2 + l_{AD}^2 - 2sl_{AD} \cos \alpha, \quad (2)$$

где l_{AD} – расстояние между точками A и D , α – угол между отрезком AD и направляющей AB .

Поскольку координаты точек A , B и D известны, угол α может быть легко вычислен, а значит в уравнении (2) неизвестным является только

значение s . При этом использование функции арккосинуса для расчета α нежелательно, поскольку производная данной функции не определена при значениях аргумента, равных ± 1 , что может привести к проблемам при вычислении матрицы Якоби механизма в процессе анализа скоростей и ускорений.

Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle \overline{AB}, \overline{AD} \rangle = \|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{AD}\| \cdot \cos \alpha.$$

Из данного выражения следует, что

$$l_{AD} \cos \alpha = \|\overline{AD}\| \cdot \cos \alpha = \frac{\langle \overline{AB}, \overline{AD} \rangle}{\|\overline{AB}\|}. \quad (3)$$

При этом стоит отметить, что знаменатель дроби в выражении (3) никогда не может быть равен нулю. Далее, подставляя (3) в (2), и перенося все слагаемые в одну часть уравнения, получим

$$s^2 - 2s \frac{\langle \overline{AB}, \overline{AD} \rangle}{\|\overline{AB}\|} + l_{AD}^2 - l_{CD}^2 = 0.$$

С использованием известных координат точек A , B и D данное выражение может быть переписано следующим образом:

$$s^2 - 2s \frac{(x_B - x_A)(x_D - x_A) + (y_B - y_A)(y_D - y_A)}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} + (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 - l_{CD}^2 = 0. \quad (4)$$

Таким образом, уравнение (4) будет являться уравнением связи кинематической цепи $\underline{PRR}$. Также легко видеть, что данное уравнение является квадратным уравнением вида

$$as^2 + bs + c = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a &= 1, \\ b &= -2 \frac{(x_B - x_A)(x_D - x_A) + (y_B - y_A)(y_D - y_A)}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}, \\ c &= (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 - l_{CD}^2. \end{aligned}$$

Общий вид решения данного уравнения и, соответственно, обратной задачи о положениях плоской кинематической цепи $\underline{PRR}$ хорошо известен:

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

При этом если $s < 0$ или $s > l_{AB}$, то каретка должна находиться за пределами направляющей AB , что физически невозможно.

Таким образом, обратная задача о положениях имеет решение, если уравнение (4) имеет хотя бы один действительный корень, удовлетворяющий указанным ограничениям.

Результаты и обсуждение

В представленной работе в общем виде решена обратная задача о положениях параллельных механизмов типа $n\text{-}\underline{PRR}$.

Рассмотренный алгоритм позволяет определять перемещение приводной каретки при произвольном расположении направляющих цепи. Проведенный анализ показал, что использование квадратных уравнений для описания кинематических связей значительно упрощает дальнейшие исследования скоростей и ускорений механизмов, избегая проблем, связанных с функцией арккосинуса.

Заключение

При дальнейших исследованиях можно рассмотреть возможность интеграции полученных результатов в сложные механизмы, а также их применение в реальных задачах.

Таким образом, результаты данной работы могут стать основой для разработки конструкций последовательных и параллельных механизмов, в состав которых входят кинематические цепи $\underline{PRR}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dasgupta B., Mruthyunjaya T.S. Force redundancy in parallel manipulators: theoretical and practical issues // Mechanism and Machine Theory. 1998. Pp. 727–742.
- [2] Glazunov V. A., Orlov A. V., Skvortsov P. A. Rational Design of a Micro-positioner with Elastic Hinges. Proceedings of IFToMM Asian Mechanism and Machine Science. 2022. Pp. 22–30.

- [3] Haouas W., Dahmouche R., Le Fort-Piat N., Laurent G. J. 4-DoF spherical parallel wrist with embedded grasping capability for minimally invasive surgery. 2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2016. Pp. 2363-2368.
- [4] Krut, S., Nabat, V., Company, O., Pierrot, F. A high-speed parallel robot for SCARA motions. In IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2004. Pp. 4109–4115.
- [5] Laryushkin P. A., Khrestina A. A., Sinitsyna Yu. V., Semenov A. V.. The Issue of Type Synthesis of Kinematic Chains of Spherical Parallel Mechanisms with Linear Drives. ISSN 1052-6188, Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2025, Vol. 54, No. 2, pp. 125–132.
- [6] Leveziel M., Laurent G. J., Haouas W., Gauthier M., Dahmouche R. A 4-DoF Parallel Robot With a Built-in Gripper for Waste Sorting. IEEE Robotics and Automation Letters. 2022. Pp. 9834-9841
- [7] Luces, M., Mills, J. K., Benhabib, B. A review of redundant parallel kinematic mechanisms. Journal of Intelligent & Robotic Systems. 2017. Pp. 175–198
- [8] Majou, F., Wenger, P., Chablat, D. The design of parallel kinematic machine tools using kinetostatic performance criteria. 2007.
- [9] Merlet J.-P. Parallel robots. Springer, 2006. 402 p.
- [10] Murray, A., Hanchak, M. Kinematic synthesis of planar platforms with RPR, PRR, and RRR chains. In Lenarčič, J., Stanišić, M. M. (Eds.), Advances in Robot Kinematics. Dordrecht: Springer, 2000.
- [11] Ларюшкин П. А., Глазунов В. А., Хейло С. В. Решение задачи о положениях параллельного манипулятора с тремя степенями свободы. Справочник. Инженерный журнал. 2012. № 2. С. 16–20.
- [12] Ларюшкин П. А., Исполлов Е. М., Долгих А. И. Решение задачи о положениях и исследование рабочей зоны плоского кинематически избыточного механизма параллельной структуры // Известия вузов. Машиностроение. 2023. №11 (764). С. 20–28.
- [13] Ларюшкин П. А., Эрастова К. Г., Филиппов Г. С., Хейло С. В. К расчету механизмов типа Delta с линейными приводами и различным числом степеней свободы. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 3. С. 19–26.
- [14] Тимофеев, Г. А. Теория механизмов и машин: учебник и практикум для вузов // Г. А. Тимофеев. 4-е изд., перераб. и доп. Москва : Издательство Юрайт, 2025. С. 432.
- [15] Филиппов Г. С., Шалюхин К. А., Рашоян Г. В., Глазунов В. А., Скворцов С. А., Алешин А. К. Механизм манипулятора с параллельной структурой для использования в роботизированном хирургическом комплексе. Технологии и качество. 2021. № 1 (51). С. 46–51.

GENERAL SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF POSITION OF PARALLEL MECHANISMS n -PRR

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia;

² Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (IMASH RAN), Moscow, Russia.

Abstract

The article considers the solution of the inverse problem of the positions of planar and spatial mechanisms of a parallel structure, consisting of a kinematic chain consisting of a carriage (slider) and two rotary hinges with parallel axes. The results are general algorithms and formulas used to determine the carriage movement with an arbitrary arrangement of chain guides.

Key words: kinematic chain, planar mechanism, spatial mechanism, parallel structure mechanism, inverse position problem

REFERENCES

- [1] Dasgupta B., Mruthyunjaya T.S. Force redundancy in parallel manipulators: theoretical and practical issues // Mechanism and Machine Theory. 1998. Pp. 727–742.
- [2] Glazunov V. A., Orlov A. V., Skvortsov P. A. Rational Design of a Micro-positioner with Elastic Hinges. Proceedings of IFToMM Asian Mechanism and Machine Science. 2022. Pp. 22–30.
- [3] Haouas W., Dahmouche R., Le Fort-Piat N., Laurent G. J. 4-DoF spherical parallel wrist with embedded grasping capability for minimally invasive surgery. 2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2016. Pp. 2363-2368.
- [4] Krut, S., Nabat, V., Company, O., Pierrot, F. A high-speed parallel robot for SCARA motions. In IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2004. Pp. 4109–4115.
- [5] Laryushkin P. A., Khrestina A. A., Sinitsyna Yu. V., Semenov A. V.. The Issue of Type Synthesis of Kinematic Chains of Spherical Parallel Mechanisms with Linear Drives. ISSN 1052-6188, Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2025, Vol. 54, No. 2, pp. 125–132.
- [6] Leveziel M., Laurent G. J., Haouas W., Gauthier M., Dahmouche R. A 4-DoF Parallel Robot With a Built-in Gripper for Waste Sorting. IEEE Robotics and Automation Letters. 2022. Pp. 9834-9841

- [7] Luces, M., Mills, J. K., Benhabib, B. A review of redundant parallel kinematic mechanisms. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*. 2017. Pp. 175–198
- [8] Majou, F., Wenger, P., Chablat, D. The design of parallel kinematic machine tools using kinetostatic performance criteria. 2007.
- [9] Merlet J.-P. *Parallel robots*. Springer, 2006. 402 p.
- [10] Murray, A., Hanchak, M. Kinematic synthesis of planar platforms with RPR, PRR, and RRR chains. In Lenarčič, J., Stanišić, M. M. (Eds.), *Advances in Robot Kinematics*. Dordrecht: Springer, 2000.
- [11] Laryushkin P. A., Glazunov V. A., Kheylo S. V. Solution of the problem on positions of a parallel manipulator with three degrees of freedom. *Handbook. Engineering journal*. 2012. No. 2. P. 16–20.
- [12] Laryushkin P. A., Ispolov E. M., Dolgikh A. I. "Solving the problem on positions and studying the working area of a flat kinematically redundant mechanism of parallel structure // *News of universities. Mechanical engineering*. 2023. No. 11 (764). P. 20–28.
- [13] Laryushkin P. A., Erastova K. G., Filippov G. S., Heilo S. V. On the calculation of Delta-type mechanisms with linear drives and a different number of degrees of freedom. *Problems of mechanical engineering and machine reliability*. 2019. No. 3. pp. 19-26.
- [14] Timofeev, G. A. *Theory of principles and machines: textbook and practices for universities* // G. A. Timofeev. - 4th ed., revised. and additional. - Moscow: Publishing house Yurait, 2025. P. 432.
- [15] Fillipov G. S., Shalyukhin K. A., Rashoyan G. V., Glazunov V. A., Skvortsov S. A., Alyoshin A. K. A manipulator mechanism with a parallel structure for use in a robotic surgical complex. *Technology and quality*. 2021. № 1 (51). C. 46–51.