

## АНАЛИЗ КИНЕМАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАНИПУЛЯТОРА-ТРИПОДА С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ



<sup>1</sup>Анна Васильевна Нелюбова,  
Волгоградский государственный технический университет  
Россия, Волгоград  
Тел.: (937)708-0948, E-mail: mqdschen@yandex.ru.



<sup>2</sup>Виктор Викторович Жога,  
Волгоградский государственный технический университет  
Россия, Волгоград  
Тел.: (8442)24-81-13, E-mail: viczhoga@gmail.com.

### Аннотация

В работе рассматривается кинематическая схема манипулятора-трипода с дополнительной связью в виде полый трубы, которая позволяет разгрузить исполнительные приводы от изгибающих моментов в процессе нагрузки рабочего органа и реализовать подачу энергии или рабочей смеси к рабочему органу манипулятора. Работа посвящена синтезу движений исполнительных механизмов манипулятора-трипода с дополнительной связью. В результате работы определены движущие силы в приводах при движении рабочего органа манипулятора из исходной точки в заданную конечную точку

*Ключевые слова:* манипулятор-трипод, пассивное звено, кинематический анализ, динамический анализ.

### Введение

Особенности управления роботом-манипулятором состоят в необходимости реализации многомерного движения за счет непрерывного

управления системой приводов его исполнительных звеньев [1]. Манипуляторы используются для выполнения разнообразных технологических операций в области автомобилестроения, судостроения, машиностроения, медицины, сельского хозяйства и пищевой промышленности. Примерами технологических операций, реализуемых манипулятором, могут быть сверление отверстий, перемещение и ориентирование деталей, фрезерование заготовок, сварка, захват и перенос объектов, покраска и распыление жидкости.

Исследование гибридных манипуляторов является актуальным научным направлением среди российских и зарубежных ученых. Широкое применение гибридных манипуляторов обусловлено их значительными преимуществами по сравнению с механизмами последовательной и параллельной структуры. Манипуляторы гибридной структуры объединяют в себе динамическую точность позиционирования рабочего органа из-за высокой жёсткости конструкции, большие скорости перемещения исполнительных звеньев и увеличенное рабочее пространство. Гибридные манипуляторы находят свое применение в сфере машиностроения для задач фрезерования, сварки, сборки. Примеры манипуляторов гибридной структуры представлены в работах [2-6], что характеризует широкое применение данных кинематических схем. Манипуляторы гибридной структуры не так широко изучены, как манипуляторы на основе открытой и замкнутой кинематической цепи [7], поэтому исследования новых подходов в управлении движением гибридных манипуляторов [8-9] являются актуальной задачей.

### **Объект исследования**

Рассматривается манипулятор-трипод с дополнительной пассивной связью [10]. Движение выходного звена манипулятора осуществляется за счет работы трех приводов, регулирующих расстояние между заданными точками крепления линейных звеньев 1, 2, 3 на треугольном основании *ABC* и выходного звена 6. Четыре степени подвижности обеспечиваются путем перемещений линейных исполнительных звеньев 1, 2, 3, 4, реализующих заданные законы движения. Кинематическая схема манипулятора приведена на рисунке 1. Параллельная часть конструкции манипулятора представлена в виде трипода. Длина каждого звена регулируется электрическим приводом. В конструкцию манипулятора (рисунок 2) включено дополнительное пассивное звено 5 в виде полой металлической трубы, которое одним концом крепится на шарнире 7, а другим концом соединено с выходным звеном 6. Дополнительное звено компенсирует изгибы в приводах, что позволяет звеньям работать только на растяжение и сжатие. За счет изменения длины четвертого линейного привода 4



Положение манипулятора в пространстве описывается обобщенными координатами [11]: длиной отрезка трубы переменной длины  $q_1 = L$ , углами  $q_2 = \psi$ ,  $q_3 = \delta$  и углом наклона поворотного основания манипулятора  $q_4 = \varphi$ .

Границы изменения угла поворота поворотного основания:

$$-32^\circ \leq \varphi \leq 80^\circ.$$

### Кинематический анализ манипулятора

Задача структурного синтеза гибридных манипуляторов заключается в выборе и обосновании их основных конструктивных параметров: структуры, расположения шарниров на основании и выходном звене, длин и рабочего хода звеньев. Совокупность указанных параметров должна обеспечить обслуживание заданной рабочей зоны с заданной ориентацией выходного звена. В основе синтеза лежат решения прямой и обратной задач о положениях выходного звена [11].

Прямая задача заключается в определении положения в пространстве выходного звена робота по заданным значениям его обобщенных координат. Устанавливается связь обобщенных координат  $L(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\delta(t)$ ,  $\varphi(t)$  с декартовыми координатами  $x_M(t)$ ,  $y_M(t)$ ,  $z_M(t)$ :

$$\begin{cases} x_M = L \sin \psi_5 \sin \delta_5, \\ y_M = -OD - L \sin \psi_5 \cos \delta_5, \\ z_M = -DK + L \cos \psi_5. \end{cases} \quad (1)$$

Декартовым координатам  $x_M$ ,  $y_M$ ,  $z_M$  точки  $M$  выходного звена соответствуют разные углы  $\varphi$ .

Обратная задача сводится к нахождению значений обобщенных координат манипулятора для заданного положения в пространстве его выходного звена:

$$\begin{cases} L = \frac{z_M + DK}{\cos \psi_5}, \\ \operatorname{tg} \delta_5 = -\frac{x_M}{y_M + OD}, \\ \operatorname{tg} \psi_5 = -\frac{\sqrt{x_M^2 + (y_M + OD)^2}}{(z_M + DK)}. \end{cases} \quad (2)$$

Для заданной технологической операции оптимальный угол поворота поворотного основания  $\varphi$  определяется решением задачи позиционирования.

Для гибридных манипуляторов решение обратной задачи кинематики часто зависит от геометрической структуры манипулятора [12].

Задача позиционирования выходного звена манипулятора сводится к решению оптимизационной задачи в связи с ненулевой маневренностью манипулятора. Число обобщенных координат равно 4, а координат точки выходного звена манипулятора 3. Для решения задачи позиционирования рассматриваемой конструкции манипулятора ставится дополнительное условие минимума энергозатрат на перемещения исполнительных звеньев манипулятора:

$$\Phi(\varphi) = C_1 [l_{1k}(\varphi) - l_{10}]^2 + C_4 [l_{4k}(\varphi) - l_{40}]^2, \quad (3)$$

с конструктивными ограничениями на угол поворота поворотного основания

$$\varphi_{\min} \leq \varphi^* \leq \varphi_{\max}$$

где  $C_1, C_4$  – весовые коэффициенты;  $\varphi_{\min}, \varphi_{\max}$  – минимальное и максимальное допустимые значения угла поворота основания манипулятора – трипода;  $\varphi^*$  – оптимальное значение угла поворота.

Позиционирования выходного звена манипулятора состоит в перемещении его из начального состояния в заданное конечное положение.

### Динамический анализ манипулятора

Механическая система манипулятора рассматривается как совокупность механизмов с жесткими звеньями. Четверное звено – электроцилиндр  $AD$  состоит из двух твердых тел, цилиндра и штока. Цилиндр вращается вокруг неподвижной оси, параллельной оси  $Ox$ , шток совершает сложное движение. Поворотное основание  $ABC$  рассматривается как твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси  $Ox$  с моментом инерции относительно оси вращения  $I_{OA}$ . Звено  $L$  рассматривается как отрезок переменной длины полой трубы, совершает пространственное движение: скользит вдоль направляющих и поворачивается в пространстве. С целью упрощения решения дифференциальных уравнений целесообразно реальный механизм заменить динамически эквивалентным. Массово-геометрические параметры манипулятора приведены в таблице 1.

**Таблица 1.** Параметры манипулятора

	Масса, кг	Момент инерции, кг·м <sup>2</sup>	Координаты центра масс, м
Поворотное основание <i>ABC</i>	$m_{BC} = 2,03$	$I_{OA} = 0,1$ относительно оси <i>Ox</i>	$x_C = 0$ $y_C = 0$ $z_C = 0,18$
Корпус (электроцилиндр <i>AD</i> )	$m_{41} = 3,68$	$I_{41} = 0,08$ относительно оси <i>Ox</i>	
Шток (электроцилиндр <i>AD</i> )	$m_{42} = 1,11$	$I_{42} = 0,02$ относительно оси <i>Ox</i>	$x_C = 0$ $y_C = 0$ $z_{C04} = 0,23$
Полая труба <i>L</i>	$m_5 = 6,28$	$I_5 = I_{x5} = I_{y5} = 2.06$ $I_{z5} = 0$	$z_{C05} = 1$

Кинетическая энергия манипулятора имеет вид [13]:

$$T = \frac{1}{2} \left( 0.17 - \frac{0.14}{\pi} \varphi \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} [I_5 + m_5(L - L_0)^2] (\dot{\delta}_5^2 \sin^2 \psi_5 + \dot{\psi}_5^2) + \frac{1}{2} m_5 \dot{L}^2. \quad (4)$$

Потенциальная энергия манипулятора [13]:

$$\Pi = [m_{41}l_{c1} + m_{42}(l_4 - l_{40})] g \cos \beta + m_5 g (L - L_0) \cos \psi + \frac{2}{3} m_{BC} g OA \cos \varphi, \quad (5)$$

где  $\beta = \arcsin \frac{OD - OA \sin \varphi}{l_4}$ .

Дифференциальные уравнения Лагранжа для обобщенных координат *L*,  $\psi$ ,  $\delta$ ,  $\varphi$  запишем с учетом (4) и (5) в матричной форме:

$$A(q)\ddot{q} + B(q,\dot{q})\dot{q} + C(q) = D(q)F(t), \quad (6)$$

где  $A(q)$ ,  $B(q,\dot{q})$ ,  $C(q)$ ,  $D(t)$  – матрицы, зависящие от параметров механизма манипулятора, обобщенных координат и обобщенных скоростей,  $F(t)$  – вектор сил, развиваемых приводами в степенях подвижности манипулятора.

Инерционная матрица  $A(q)$  является диагональной и имеет вид:

$$A(q) = \begin{pmatrix} I_{np}(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{5K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{5K} \sin^2 \psi_5 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $I_{np}(\varphi) = 0,17 - \frac{0,14}{\pi} \varphi$  – приведенный момент инерции [13],  $m_5$  – масса полой трубы,  $I_{5K} = [m_5(L - L_0)^2 + I_5]$  – момент инерции относительно точки *K*.

Матрица  $B(q,\dot{q})$  параметров механизма, зависящая от обобщенных координат и обобщенных скоростей имеет вид:

$$B(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 0,07 \dot{\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_5(L-L_0)\dot{\psi}_5 & -m_5(L-L_0)\sin^2\psi_5\dot{\delta}_5 \\ 0 & m_5(L-L_0)\dot{\psi}_5 & m_5(L-L_0)\dot{L} & -I_{5K}\sin\psi_5\cos\psi_5\dot{\delta}_5 \\ 0 & m_5(L-L_0)\sin^2\psi_5\dot{\delta}_5 & I_{5K}\dot{\delta}_5\sin\psi_5\cos\psi_5 & m_5(L-L_0)\sin^2\psi_5\dot{L} + I_{5K}\dot{\psi}_5\sin\psi_5\cos\psi_5 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Матрица  $C(q)$  учитывает потенциальные силы:

$$C(q) = \begin{pmatrix} -m_{42}g \frac{OAOD\cos\varphi\sqrt{l_4^2 - (OD - OA\sin\varphi)^2}}{l_4^2} - \frac{1}{3}m_{BC}gOA\sin\varphi + \\ + [m_{41}l_{c1} + m_{42}(l_4 - l_{40})] \cdot \frac{(OD - OA\sin\varphi)OA\cos\varphi}{l_4\sqrt{l_4^2 - (OD - OA\sin\varphi)^2}} g \\ m_5g\cos\psi \\ -m_5g(L-L_0)\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Матрица коэффициентов движущих сил  $D(q)$ :

$$D(q) = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

элементы матрицы подробно рассмотрены в работе [12].

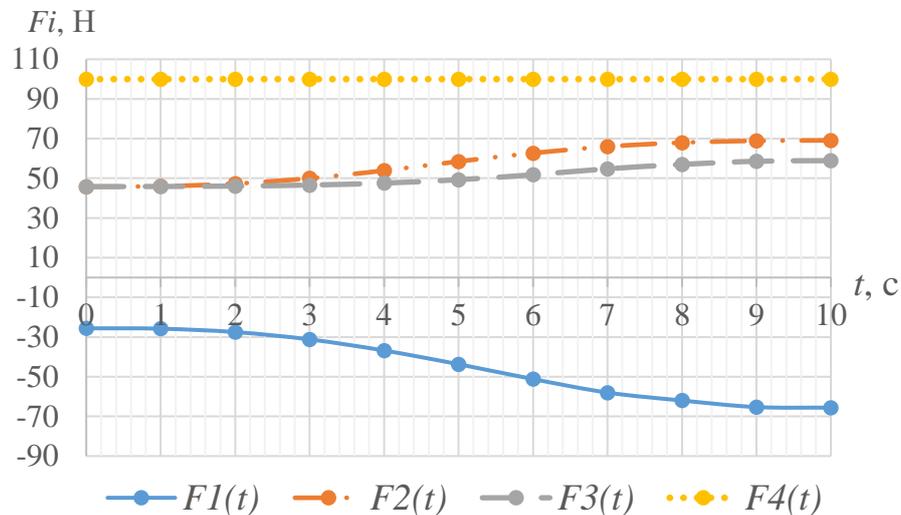
Проведем расчет движущих силы исполнительных звеньев манипулятора для обеспечения перемещения выходного звена из начальной точки  $M_H$  в конечную точку  $M_K$  ( $x_{M_K} = 100$  мм,  $y_{M_K} = 700$  мм,  $z_{M_K} = 500$  мм). Решением задачи позиционирования (2) находим обобщенные координаты  $L, \psi, \delta$  через декартовы координаты  $x_M, y_M, z_M$ . Таким образом, начальной точке  $M_H$  соответствуют значения обобщенных координат  $\varphi_H = 0,22, L_H = 1145$  мм,  $\psi_H = -1,01, \delta_H = 0$ . Конечной точке  $M_K$  соответствуют значения обобщенных координат  $\varphi_K = -0,11, L_K = 1372$  мм,  $\psi_K = -1,1, \delta_K = -0,16$ .

Полиномиальный закон выбирается в качестве закона изменения обобщенных координат ( $L, \psi, \delta, \varphi$ ):

$$q_s(t) = q_{sH} + (q_{sK} - q_{sH}) \cdot \left( 10 - 15 \frac{t}{\tau} + 6 \frac{t^2}{\tau^2} \right) \frac{t^3}{\tau^3}, \quad (11)$$

где  $s$  – номер обобщенной координаты (1, 2, 3, 4);  $\tau$  – конечное время перемещения выходного звена манипулятора. Конечное время перемещения равно 10 с.

Графики (рисунок 3) изменения движущих сил манипулятора в процессе перемещения выходного звена из начальной точки  $M_n$  в конечную  $M_k$  при решении уравнения (6) при подстановке коэффициентов (7)–(10).



**Рис. 3.** График изменения движущих сил  $F_1, F_2, F_3, F_4$  при перемещении выходного звена из начальной точки в конечную за конечное время  $t$

Исходя из рисунка 3 самым нагруженным является электроцилиндр  $AD$  (звено 4), максимальные значения движущих сил  $F_4$  не превышают 100 Н. Решением прямой задачи динамики определены усилия в приводах 1,2,3,4, необходимые для обеспечения перемещения выходного звена манипулятора из одной точки в другую. Расчетные значения движущих сил приводов являются основой при подборе двигателей и зависят от вида выполняемых манипулятором технологических операции [14], внешних нагрузок и ограничений на быстродействие [15].

### Заключение

Представленная кинематическая и динамическая модель манипулятора-трипода с дополнительной связью позволяют получить адекватное математическое описание манипулятора. В статье получены значения движущих сил для манипулятора-трипода с дополнительной связью, что позволит обоснованно использовать методы аналитического программирования входных управляющих сигналов приводных двигателей.

Исследование выполнено за счет средств программы развития ВолГТУ «Приоритет 2030», в рамках научного проекта №25/639-24.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пономаренко М. В., Андреев Ю.С. Автоматизированные системы управления производством с точки зрения гибких производственных систем. Современное машиностроение. Наука и образование. 2023. С. 314-323.
- [2] Petko, M., Gac, K., Gora, G., Karpziel, G., Ochonski, J., Kobus, K. (2016). CNC system of the 5-axis hybrid robot for milling. *Mechatronics*, No. 37, pp. 89-99.
- [3] Lai, Y., Liao, C., Chao, Z. Inverse kinematics for a novel hybrid parallel–serial five-axis machine tool. 2018. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. pp. 63-79.
- [4] Xu, Y., Yang, F., Mei, Y. Kinematic, Workspace and Force Analysis of A Five-DOF Hybrid Manipulator R(2RPR)R/SP+RR. 2022. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. pp. 122-134.
- [5] Wang, L. Fang, Y., Zhang, D. Design of 4-DOF hybrid parallel robots with an integrated three-fingered robot end effector. *Mechanism and Machine Theory*. 2023. pp. 1-21.
- [6] Zhao, Y., Mei, J., Jin, Y., Niu, W. A new hierarchical approach for the optimal design of a 5-dof hybrid serial-parallel kinematic machine. *Mechanism and Machine Theory*. 2021. No.156, pp.104-116.
- [7] Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Терехова А.Н. Синтез механизмов параллельной структуры с кинематической развязкой. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2014. С. 34-40.
- [8] Chen, Y., Zhang, Xi., Huang, Y., Wu Y., Ota J. Kinematics optimization of a novel 7-DOF redundant manipulator. *Robotics and Autonomous Systems* (2023). pp. 1-16.
- [9] Caccavale, F., Siciliano, B., Villani, L. The Tricept robot: dynamics and impedance control. *Transactions on Mechatronics*. 2013. pp. 263-268.
- [10] Жога В.В., Нелюбова А.В., Шаронов Н.Г., Чернышев В.В. П. м. 218886 Российская Федерация, МПК В66С 23/00 Манипулятор-трипод. ФГБОУ ВО ВолгГТУ. 2023.
- [11] Жога В.В., Нелюбова А.В. Кинематический синтез аналитических законов перемещений исполнительных приводов манипулятора параллельно-последовательной структуры с дополнительной связью. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2024. С. 29-36.
- [12] Воробьева Н.С., Жога В.В., Несмиянов И.А. Отслеживание приводами манипулятора параллельно-последовательной структуры программных перемещений рабочего органа. *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. 2019. № 2. С. 154–165.

- [13] Нелюбова А.В., Вершинина И.П. Динамика управляемого движения манипулятора-трипода с дополнительной связью. Известия ВолгГТУ. 2025. С. 61-66.
- [14] Воробьева Н.С., Дяшкин А.В., Дяшкин-Титов В.В. Методы кинематического синтеза алгоритмов управления манипулятором-триподом. Известия Нижневолжского агроуниверситетского комплекса: Наука и высшее профессиональное образование. 2020. № 2(58). С.384–396.
- [15] Smirnov A.S., Bulov S.A., Smolnikov B.A. Numerical Simulation of Nonlinear Oscillation Modes of a Three-Link Manipulator. 2023. Lecture Notes in Mechanical Engineering. pp. 45-57.

A.V. Nelyubova, V.V. Zhoga

## **ANALYSIS OF KINEMATIC AND DYNAMIC PARAMETERS OF A MANIPULATOR-TRIPOD WITH PASSIVE LINK**

Volgograd State Technical University, Russia

### **Abstract**

The article considers the kinematic scheme of a manipulator-tripod with an additional passive link in the form of a tube, which allows the actuators to be unloaded from bending moments during the loading of the working body and to supply energy or a working mixture to the working body of the manipulator. The work is devoted to the synthesis of movements of the executive mechanisms of a tripod manipulator with an additional passive link. As a result of the work, the driving forces of the manipulator were determined when moving the output link from point to point.

*Key words:* manipulator-tripod, passive link, kinematic analysis, dynamic analysis.

The research was carried out at the expense of the funds of the development program of VSTU "Priority 2030", within the framework of scientific project No. 25/639-24.

### **REFERENCES**

- [1] Ponomarenko M.V., Andreev Yu.S. Automated production management systems from the point of view of flexible production systems. Modern Mechanical Engineering: Science and Education. 2023. pp. 314-323. (rus.)

- [2] Petko, M., Gac, K., Gora, G., Karpiel, G., Ochonski, J., Kobus, K. (2016). CNC system of the 5-axis hybrid robot for milling. *Mechatronics*, No. 37, pp. 89-99.
- [3] Lai, Y., Liao, C., Chao, Z. Inverse kinematics for a novel hybrid parallel–serial five-axis machine tool. 2018. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. pp. 63-79.
- [4] Xu, Y., Yang, F., Mei, Y. Kinematic, Workspace and Force Analysis of A Five-DOF Hybrid Manipulator R(2RPR)R/SP+RR. 2022. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. pp.122-134.
- [5] Wang, L. Fang, Y., Zhang, D. Design of 4-DOF hybrid parallel robots with an integrated three-fingered robot end effector. *Mechanism and Machine Theory*, 2023, pp. 1-21.
- [6] Zhao, Y., Mei, J., Jin, Y., Niu, W. A new hierarchical approach for the optimal design of a 5-dof hybrid serial-parallel kinematic machine. *Mechanism and Machine Theory*. 2021.156, pp.104-116.
- [7] Nosova N.Y., Glazunov V.A., Palochkin S.V., Terekhova A.N. Synthesis of mechanisms of parallel structure with kinematic interchange. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014. Vol. 43, No. 5. pp. 378-383.
- [8] Chen, Y., Zhang, Xi., Huang, Y., Wu Y., Ota J. Kinematics optimization of a novel 7-DOF redundant manipulator. *Robotics and Autonomous Systems* (2023). pp. 1-16.
- [9] Caccavale, F., Siciliano, B., Villani, L. The Tricept robot: dynamics and impedance control .*Transactions on Mechatronics*. 2013. pp. 263-268.
- [10] Zhoga V.V., Nelyubova A.V., Sharonov N.G., Chernyshev V.V. Manipulator tripod. U. M. 218886 Russian Federation. Volgograd State Technical University. 2023.
- [11] Zhoga V.V., Nelyubova A.V. Kinematic synthesis of analytical laws of the actuator displacement of a manipulator with the parallel-sequential structure and additional coupling. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2024. No. 9. pp. 29-36.
- [12] Vorob'eva, N.S., Nesmiyanov I.A., Zhoga V.V. Program Displacement Tracing of Executive Devices by the Manipulator Drives of Parallel-Sequential Structures. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2019. Vol. 58, No. 2. pp. 305-316.
- [13] Nelyubova A.V., Vershinina I.P. Dynamics controlled movement of the manipulator-tripod with additional link. *Izvestia VSTU*. 2025. pp. 61-66.
- [14] Vorob'eva N.S., Djashkin A.V., Djashkin-Titov V.V., Ivanov A.G., Fomin S.D. Methods of kinematic synthesis of manipulator-tripod control algorithms. *Izvestia of the Lower Volga Agro-University Complex: Science and higher professional education*. 2020. No. 2(58). pp. 384–396.
- [15] Smirnov A.S., Bulov S.A., Smolnikov B.A. Numerical Simulation of Nonlinear Oscillation Modes of a Three-Link Manipulator. 2023. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. pp. 45-57.