

В.А. Чеканин<sup>1</sup>, А.В. Чеканин<sup>2</sup>

## РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РАССТАНОВКИ, УЧИТЫВАЮЩЕГО ОГРАНИЧЕНИЯ ПО МИНИМАЛЬНОМУ РАССТОЯНИЮ МЕЖДУ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ



<sup>1</sup>Владислав Александрович Чеканин, д.т.н., доцент  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Московский  
государственный технологический университет  
«СТАНКИН»,  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова  
Российской академии наук  
Россия, Москва  
Тел.: (499)972-9480, E-mail: vladchekanin@rambler.ru



<sup>2</sup>Александр Васильевич Чеканин, д.т.н., профессор  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Московский  
государственный технологический университет  
«СТАНКИН»  
Россия, Москва  
Тел.: (499)972-9480, E-mail: av.chekanin@stankin.ru

### Аннотация

В работе рассматривается задача оптимизированного размещения плоских прямоугольных объектов, для которых помимо базовых геометрических и технологических ограничений, накладываемых на формируемую расстановку, дополнительно задаётся ограничение на минимальное расстояние между предварительно выделенными особыми точками объектов. На основе модели потенциальных контейнеров разработан алгоритм расстановки прямоугольников с учётом индивидуальных ограничений по минимальному расстоянию между особыми точками объектов. Предложен эвристический алгоритм выбора

наилучшего варианта ортогональной ориентации прямоугольных объектов, минимизирующий плотность формируемой компоновки. Представлены примеры решения некоторых частных задач расстановки с различными ограничениями по минимальному расстоянию, задаваемому между особыми точками объектов.

*Ключевые слова:* задача расстановки, компоновка, модель потенциальных контейнеров, особые точки.

## **Введение**

В работе рассматривается задача расстановки прямоугольных объектов, относящаяся к числу классических задач раскроя-упаковки [1]. Она заключается в поиске наиболее компактного способа размещения в ограниченном пространстве некоторого набора объектов, заданных в форме прямоугольников. Эта задача является NP-трудной оптимизационной задачей компоновки, для которой не всегда может быть получено точное решение [2, 3]. В связи с этим, задача разработки новых эффективных алгоритмов, обеспечивающих быстрое формирование плотной компоновки объектов, является актуальной.

При решении задач раскроя-упаковки необходимо учитывать различные виды ограничений на формируемую расстановку. Геометрические ограничения не позволяют объектам перекрывать друг друга, выходить за границы области размещения (контейнера), а также задают допустимые варианты ориентации для каждого размещаемого объекта [4]. При решении реальных задач, возникающих на производстве, помимо геометрических ограничений учитываются также и технологические ограничения, включающие задание минимальных отступов (допусков) между соседними объектами, минимальных отступов от границ пространства размещения, задание запретных для размещения областей (запретных зон), а также другие ограничения [5–7].

В некоторых задачах расстановки возникает необходимость задания дополнительных ограничений, связанных не с объектом целиком, а с его некоторой точкой, которую будем называть особой точкой [8]. Для каждой особой точки объекта задаётся минимальное расстояние, на котором она должна находиться по отношению к особым точкам остальных объектов. В частности, ограничение в виде минимального расстояния между особыми точками объектов необходимо учитывать для обеспечения пожарной безопасности на промышленных складах, содержащих контейнеры с опасными веществами (горючими жидкостями, газом, химикатами), при этом пожарная безопасность рассчитывается исходя из радиуса зоны поражения при возгорании и расположения опасной точки объекта [9–12]. В качестве другого примера можно привести задачу оптимизированной

расстановки электронных компонентов с тепловыми или электромагнитными ограничениями (центры чипов могут рассматриваться в качестве источников тепла или электромагнитного излучения) [13, 14].

В настоящей работе представлен разработанный алгоритм, обеспечивающий расстановку прямоугольных объектов с учётом дополнительного технологического ограничения на минимальное расстояние между особыми точками размещаемых объектов.

## Методы

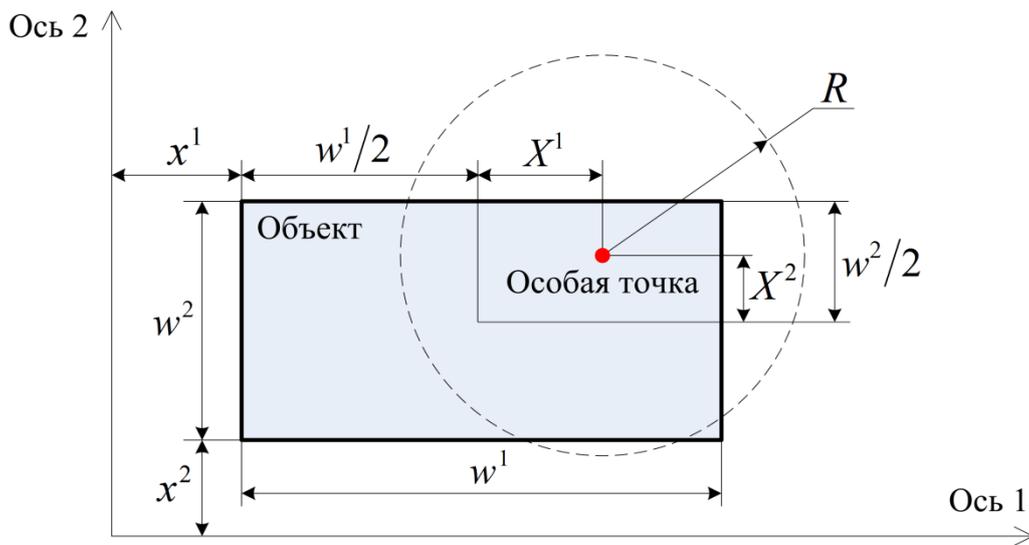
### *Постановка задачи*

Приведём постановку плоской задачи расстановки прямоугольных объектов в один контейнер. Дан набор из  $n$  объектов в форме прямоугольника с габаритными размерами  $\{w_i^1, w_i^2\}, i \in \{1, \dots, n\}$  (верхний индекс в формулах будет обозначать порядковый номер координатной оси), а также единственный контейнер с габаритными размерами описанного прямоугольника  $\{W^1, W^2\}$ . Контейнер может быть как прямоугольным, так и иметь любую другую форму, полученную в результате размещения в нём набора запретных зон, задающих геометрические ограничения [15]. Обозначим положение объекта  $i$  в контейнере через  $(x_i^1; x_i^2)$ . При решении задачи упаковки необходимо наиболее плотно разместить все объекты в контейнере (т.е. получить компоновку минимальной длины), при этом объекты не должны перекрывать друг друга и не должны выходить за границы контейнера. Все объекты должны быть ориентированы параллельно осям контейнера, при этом допускается их поворот на углы, кратные  $90^\circ$ .

При моделировании расстановки будем использовать разработанную модель потенциальных контейнеров, которая описывает свободное пространство каждого контейнера полным набором потенциальных контейнеров – ортогональных объектов с наибольшими габаритными размерами, которые могут быть в нём размещены [16, 17]. Потенциальный контейнер  $k$  описывается вектором  $\{v_k^1; v_k^2\}$ , содержащим его габаритные размеры, а также вектором  $\{p_k^1; p_k^2\}$ , содержащим координаты положения его начала координат относительно начала координат контейнера.

Для каждого объекта  $i$  в системе координат его центра задаётся особая точка  $(X_i^1; X_i^2)$ , а также минимальное расстояние  $R_i$ , на котором эта точка должна быть удалена от остальных объектов.

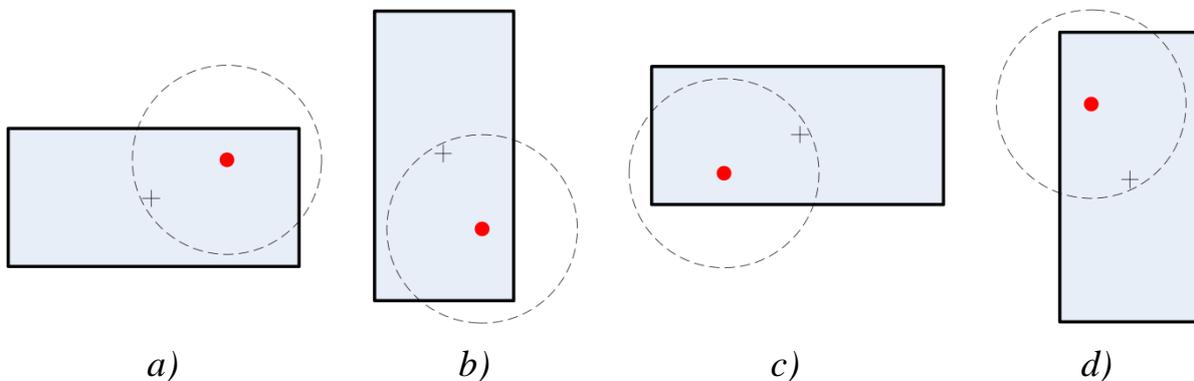
При описании алгоритма расстановки одного объекта будем опускать нижний индекс, обозначающий порядковый номер этого объекта (см. рис. 1).



**Рис. 1.** Параметры особой точки объекта

Прямоугольный объект при расстановке имеет два уникальных варианта ортогональных ориентации, однако при задании особой точки число вариантов ортогональной ориентации объекта становится равным четырём (рис. 2).

Координаты особой точки при повороте объекта будут принимать значения  $Z^1$  и  $Z^2$  в соответствии с таблицей 1.



**Рис. 2.** Варианты ортогональной ориентации прямоугольного объекта:

a) угол поворота  $0^\circ$ ; b) угол поворота  $90^\circ$ ; c) угол поворота  $270^\circ$ ; d) угол поворота  $360^\circ$

**Таблица 1.** Координаты особых точек для различных вариантов ориентации объекта

Вариант ориентации	Координата особой точки вдоль оси 1 ( $Z^1$ )	Координата особой точки вдоль оси 2 ( $Z^2$ )
$0^\circ$	$x^1 + w^1/2 + X^1$	$x^2 + w^2/2 + X^2$
$90^\circ$	$x^1 + w^2/2 + X^2$	$x^2 + w^1/2 - X^1$
$180^\circ$	$x^1 + w^1/2 - X^1$	$x^2 + w^2/2 - X^2$
$270^\circ$	$x^1 + w^2/2 - X^2$	$x^2 + w^1/2 + X^1$

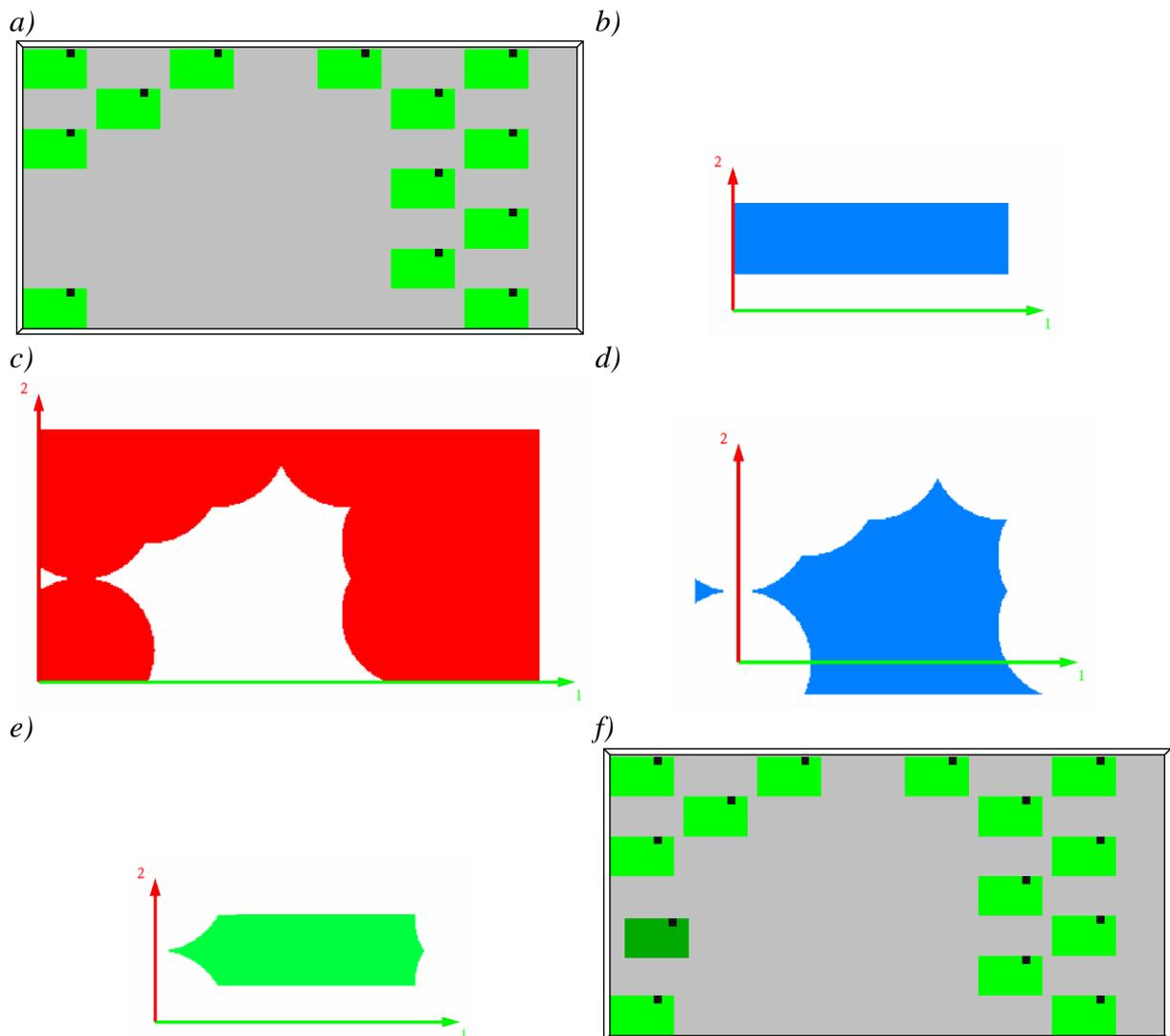
### *Алгоритм расстановки объектов с учётом особых точек*

При решении задачи расстановки необходимо для каждого объекта найти такой потенциальный контейнер, в котором объект будет целиком размещён с учётом выполнения требований по отступам между объектами, отступам от границ контейнера, а также при этом он будет находиться наиболее близко к точке старта расстановки [15]. Поиск первого подходящего потенциального контейнера осуществляется алгоритмом, который подробно описан в статье [17].

Для размещения объекта с учётом особых точек ранее размещённых объектов разработан следующий алгоритм (пример применения данного алгоритма представлен на рис. 3).

Шаг 1. Определение области  $\Omega_1$  возможного сдвига объекта внутри выбранного потенциального контейнера.

Внутри найденного потенциального контейнера  $k$  задаётся прямоугольная область  $\Omega_1$ , каждая точка которой может быть использована в качестве начала координат размещаемого объекта (начало координат объекта связано с его левым нижним углом). Эта прямоугольная область определяет возможный сдвиг размещаемого объекта внутри выбранного потенциального контейнера (рис. 3, *b*). Расположение области возможного сдвига объекта задаётся вектором  $\{q_k^1; q_k^2\}$ , значения которого вычисляются по формуле  $q_k^d = \min(p_k^d, p_k^d + \min(\xi^d, v_k^d - Z^d + x^d))$   $\forall d = \{1, 2\}$ , при этом она имеет габаритные размеры, задаваемые вектором  $\{s_k^1; s_k^2\}$ , элементы которого вычисляются по формуле  $s_k^d = \max(p_k^d, p_k^d + \min(\xi^d, v_k^d - Z^d + x^d)) - q_k^d \forall d = \{1, 2\}$ . Здесь  $\xi^d$  – величина возможного сдвига объекта в направлении координатной оси  $d$  внутри всего пространства размещения в окрестности выбранного потенциального контейнера с учётом заданных отступов, которые должны быть выдержаны для каждой стороны размещаемого объекта [15]. Значение  $\xi^1$  определяется как разность между максимально возможным сдвигом правой стороны объекта и минимально необходимым отступом с левой стороны объекта при условии, что максимально возможный сдвиг правой стороны объекта положителен. В случае если максимально возможный сдвиг левой стороны объекта положителен, то значение  $\xi^1$  определяется как разность между минимально необходимым отступом с правой стороны объекта и максимально возможным отступом левой стороны объекта. Значение  $\xi^2$  определяется аналогичным образом, только при этом рассматриваются верхняя и нижняя стороны объекта.



**Рис. 3.** Определение области допустимого размещения объекта с учётом ограничений по минимальному расстоянию между особыми точками объектов:

- a)* исходная расстановка объектов с заданными особыми точками;
- b)* область возможного сдвига начала координат размещаемого объекта внутри выбранного потенциального контейнера; *c)* результат размещения кругов ограничений в окрестности зон действия особых точек размещённых объектов; *d)* инвертированный набор кругов ограничений после сдвига; *e)* область возможного размещения начала координат размещаемого объекта после применения операции пересечения;
- f)* результат расстановки

Шаг 2. Получение области, свободной от зон действия особых точек.

Для учёта зон влияния особых точек создаётся пустой контейнер  $C$  с габаритными размерами  $\{W^1, W^2\}$ , в котором размещаются геометрические ограничения в форме кругов в окрестности особых точек всех ранее размещённых объектов (рис. 3, *c*). При размещении очередного объекта  $i$  для каждого ранее размещённого объекта  $j$  формируется геометрическое ограничение в форме круга, которое задаётся

ортогональным многогранником [18] с центром в точке  $(Z_j^1; Z_j^2)$  и радиусом, равным  $\max(R_j, R_i)$ . Далее для контейнера  $C$  применяется операция инвертирования его содержимого, которая даст область контейнера  $\Omega_2$ , свободную от зон действия особых точек. Последующий сдвиг области  $\Omega_2$  на величину  $D_i = \{D_i^1, D_i^2\}$  (см. таблицу 2) даст область  $\Omega_3$  (рис. 3, *d*), которая будет далее использована совместно с областью  $\Omega_1$  для анализа возможности размещения в контейнере объекта  $i$ .

Шаг 3. Получение области  $\Omega_4$ , доступной для размещения объекта с учётом зон действия особых точек.

В результате применения теоретико-множественной операции пересечения областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  получаем область  $\Omega_4$ , каждая точка которой может быть использована в качестве начала координат размещаемого объекта при расстановке с учётом ограничений, задаваемыми особыми точками:  $\Omega_4 = \Omega_1 \cap \Omega_3$  (рис. 3, *e*). Последующий выбор конкретной точки области  $\Omega_4$  для размещения объекта осуществляется с учётом анализа заданных точек старта расстановки [15].

**Таблица 2.** Параметры сдвига области, свободной от зон действия особых точек, применяемого при размещении объекта  $i$

Вариант ориентации	Сдвиг вдоль оси 1 ( $D_i^1$ )	Сдвиг вдоль оси 2 ( $D_i^2$ )
0°	$-w_i^1/2 - X_i^1$	$-w_i^2/2 - X_i^2$
90°	$-w_i^2/2 - X_i^2$	$-w_i^1/2 + X_i^1$
180°	$-w_i^1/2 + X_i^1$	$-w_i^2/2 + X_i^2$
270°	$-w_i^2/2 + X_i^2$	$-w_i^1/2 - X_i^1$

#### *Алгоритм выбора наилучшего варианта ориентации объекта*

При решении задачи расстановки объектов необходимо получить по возможности наиболее плотную компоновку. При размещении объекта, особая точка которого не совпадает с его геометрическим центром, за счёт анализа различных вариантов поворота можно найти такой вариант ориентации объекта, при котором получаемая расстановка будет характеризоваться меньшей длиной (высотой). На рис. 4 представлен пример получения компоновки меньшей длины при повороте размещаемого объекта с номером 2 на угол 180°.

Реализованный эвристический алгоритм выбора наилучшего варианта размещения для каждого объекта  $i$  выполняет следующие шаги.

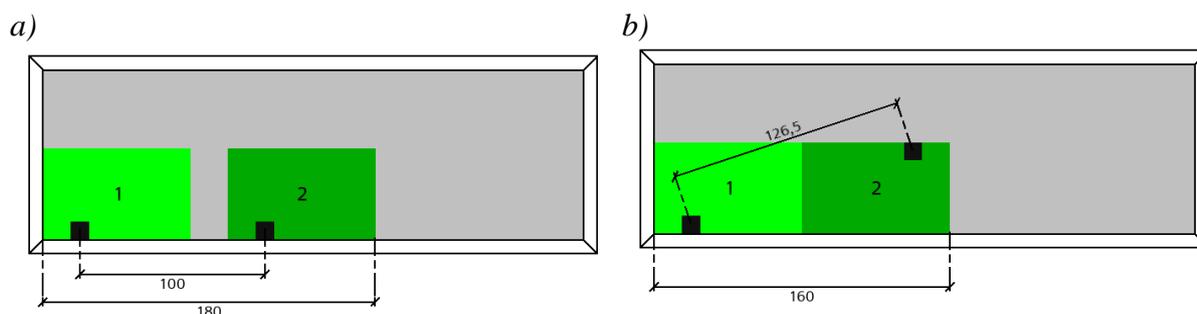
Шаг 1. Установить порядковый номер  $k := 1$  варианта ориентации объекта (каждому порядковому номеру  $k$  соответствует единственный

вариант ориентации объекта из следующего набора:  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ). Установить номер наилучшего варианта ориентации  $k^* := 1$ .

Шаг 2. Применить к объекту вариант ориентации  $k$ , после чего разместить объект в контейнере. Определить габаритные размеры  $\{H_{i,k}^1, H_{i,k}^2\}$  прямоугольника, описанного вокруг полученной расстановки.

Если  $k > 1$ , то задать  $k^* := k$  при выполнении условия  $H_{i,k}^{L^1} < H_{i,k^*}^{L^1}$  или  $(H_{i,k}^{L^1} = H_{i,k^*}^{L^1}) \wedge (H_{i,k}^{L^2} < H_{i,k^*}^{L^2})$  (здесь  $L = \{L^1, L^2\}$  – приоритетный список выбора координатных осей контейнера, определяющий направление формирования расстановки [17]).

Шаг 3. Увеличить порядковый номер варианта ориентации  $k := k + 1$ . Если значение  $k$  не превышает максимальное число вариантов ориентации для размещаемого объекта  $i$ , то повторить шаг 2, иначе применить к этому объекту вариант ориентации  $k^*$  и завершить работу алгоритма.



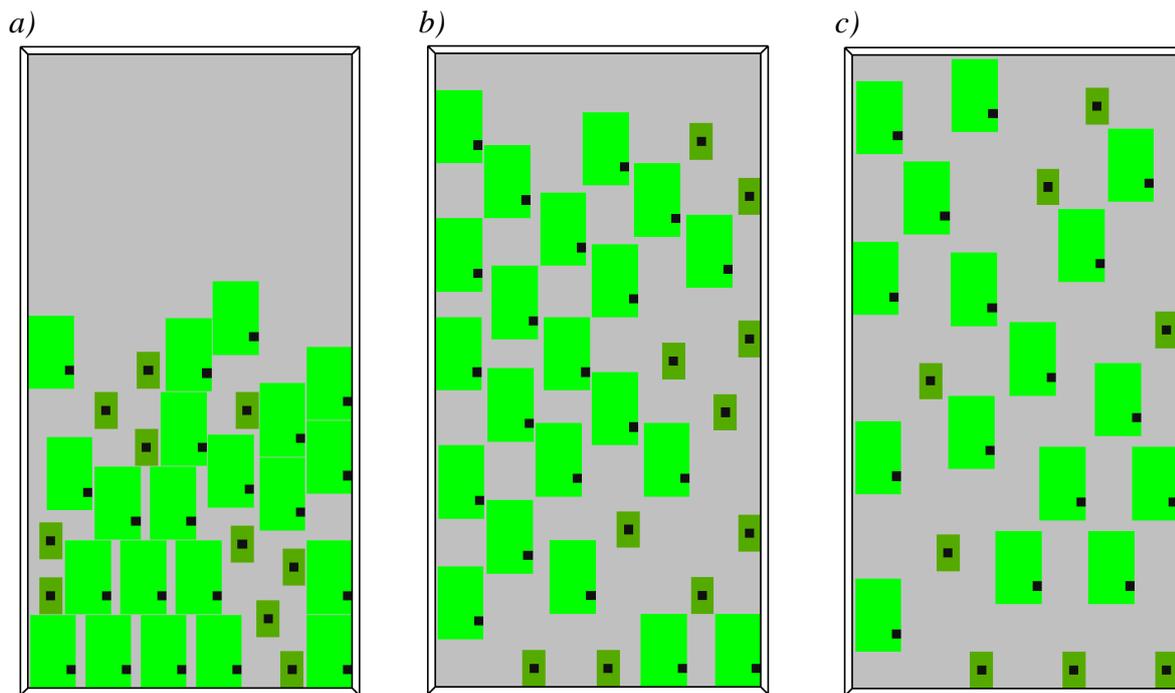
**Рис. 4.** Пример получения более плотной компоновки объектов:

*a)* исходное размещение объектов; *b)* более компактный вариант размещения объектов при соблюдении минимального расстояния (100) между особыми точками

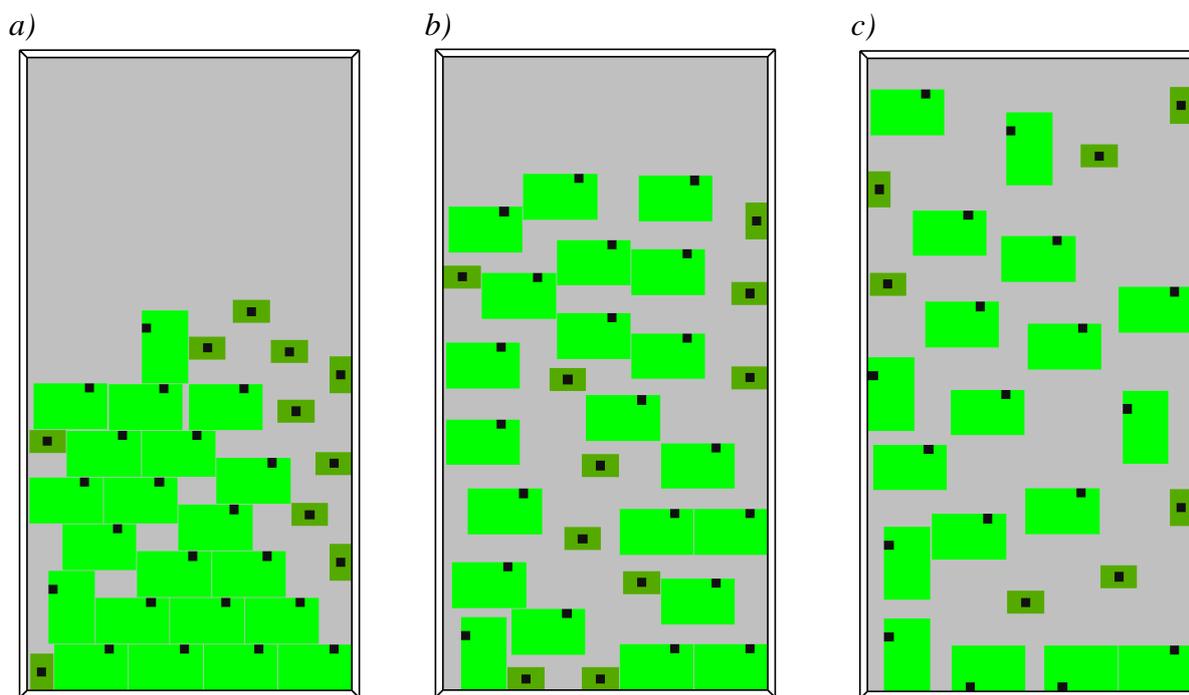
## Результаты

На рис. 5 представлены примеры компоновки объектов, полученные при различных значениях минимального расстояния между особыми точками объектов.

Примеры применения предложенного алгоритма выбора наилучшего варианта ориентации объекта при расстановке с учётом особых точек представлены на рис. 6. Из рисунка видно, что данный алгоритм обеспечивает получение более плотной компоновки (в сравнении с результатами, показанными на рис. 5).



**Рис. 5.** Примеры компоновки объектов с различными значениями минимального расстояния, заданного между особыми точками:  
*a)* минимальное расстояние между особыми точками равно 60; *b)* минимальное расстояние между особыми точками равно 80; *c)* минимальное расстояние между особыми точками равно 100



**Рис. 6.** Примеры компоновки объектов при выборе наилучшего варианта ориентации размещаемого объекта:  
*a)* минимальное расстояние между особыми точками равно 60; *b)* минимальное расстояние между особыми точками равно 80; *c)* минимальное расстояние между особыми точками равно 100

## **Обсуждение**

Разработанный алгоритм расстановки обеспечивает размещение объектов, для каждого из которых возможно задание индивидуального расположения особой точки, а также индивидуального значения минимальной дистанции до особых точек других объектов.

Предложенный алгоритм расстановки позволяет решать задачи оптимизированного размещения наборов прямоугольных объектов, для которых задано дополнительное технологическое ограничение по минимальному расстоянию между указанными особыми точками объектов, что актуально при обеспечении пожаробезопасности хранимой на складах контейнеров, проектировании электронных компонентов с тепловыми и электромагнитными ограничениями, а также при решении ряда других полезных на практике задач компоновки.

## **Заключение**

Разработан алгоритм расстановки, учитывающий технологические ограничения по минимальному расстоянию между особыми точками размещаемых объектов.

С целью минимизации плотности компоновки, получаемой с учётом ограничений, накладываемых особыми точками размещаемых объектов, предложен алгоритм выбора наиболее подходящего варианта ортогональной ориентации прямоугольного объекта, обеспечивающий быстрое формирование плотной компоновки без применения многопроходных метаэвристических алгоритмов оптимизации.

Реализованный алгоритм расстановки объектов с учётом ограничений, задаваемых особыми точками, обеспечивает размещение только прямоугольных объектов, рёбра которых параллельны координатным осям пространства размещения. При этом актуальным направлением развития исследований является разработка усовершенствованного алгоритма расстановки, учитывающего ограничения, накладываемые особыми точками объектов сложной геометрии [19–21], задаваемых ортогональными многогранниками, а также применимого для оптимизированной расстановки объектов, ориентированных под произвольными углами.

Исследование выполнено в рамках научной программы национального центра физики и математики, направление №9 «Искусственный интеллект и большие данные в технических, промышленных, природных и социальных системах».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Валиахметова Ю.И., Филиппова А.С. Теория оптимального использования ресурсов Л.В. Канторовича в задачах раскроя-упаковки: обзор и история развития методов решения // Вестник УГАТУ. 2014. Т. 18. № 1 (62). С. 186-197.
- [2] Alvarez-Valdes R., Carravilla M.A., Oliveira J.F. Cutting and packing. Handbook of Heuristics. Springer, Cham. 2018. pp. 931-977.
- [3] Johnson D.S. A brief history of NP-completeness, 1954–2012. Documenta Mathematica. 2012. Extra Volume ISMP. pp. 359-376.
- [4] Кротова Н.А., Пушков Р.Л. Определение геометрических параметров и ориентации заготовки на станке с применением алгоритмов технического зрения // Вестник МГТУ «Станкин». 2021. № 2 (57). С. 8-12.
- [5] Pinto M., Silva C., Thüerer M., Moniz S. Nesting and scheduling optimization of additive manufacturing systems: Mapping the territory. Computers & Operations Research. 2024. pp. 106592.
- [6] Júnior A.N., Silva E., Francescato M., Rosa C. B., Siluk J. The rectangular two-dimensional strip packing problem real-life practical constraints: A bibliometric overview. Computers & Operations Research. 2022. Vol. 137. pp. 105521.
- [7] Gajda M., Trivella A., Mansini R., Pisinger D. An optimization approach for a complex real-life container loading problem. Omega. 2022. Vol. 107. pp. 102559.
- [8] Ермолов И.Л., Собольников С.А. Решение задачи распределения группы мобильных роботов для обеспечения работы подвижной коммуникационной сети // Вестник МГТУ «Станкин». 2012. № 4. С. 126-129.
- [9] Fang H., Xu M., Chen X., Lo S.M., Wan M.P. Development of a Performance-Based Approach for Optimizing Sensor Placement in Building Fire Detection. Fire Technology. 2025. pp. 1-28. <https://doi.org/10.1007/s10694-025-01721-1>.
- [10] Onal S., Zhu W., Das S. Order picking heuristics for online order fulfillment warehouses with explosive storage. International Journal of Production Economics. 2023. Vol. 256. pp. 108747.
- [11] Guo B., Zhang Y., Hu J., Li J., Wu F., Peng Q., Zhang Q. Two-dimensional irregular packing problems: A review. Frontiers in Mechanical Engineering. 2022. Vol. 8. pp. 966691.
- [12] Chugaia A., Alyokhina S., Zhuravka A. Mathematical aspects of optimal layout problem of spent nuclear fuel containers on the storage site. Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics. 2022. Vol. 15. No. 3-4. pp. 85-99.

- [13] Lau J.H. Recent advances and trends in advanced packaging. IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology. 2022. Vol. 12. No. 2. pp. 228-252.
- [14] Kumar Y., Deep K. Positioning of new mobile tower using Circle Packing Problem. Evolutionary Intelligence. 2024. Vol. 17. No. 5. pp. 3241-3268.
- [15] Чеканин В.А., Чеканин А.В. Развитие алгоритмов расстановки плоских объектов с учётом специфики реальных задач компоновки // Современное машиностроение. Наука и образование. 2024. № 13. С. 458-472.
- [16] Chekanin V.A., Chekanin A.V. Deleting objects algorithm for the optimization of orthogonal packing problems. Advances in Mechanical Engineering. Springer International Publishing. 2017. pp. 27-35.
- [17] Chekanin V.A., Chekanin A.V. Algorithms for management objects in orthogonal packing problems. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2016. Vol. 11. No. 13. pp. 8436-8446.
- [18] Чеканин В.А. Алгоритмы размещения и удаления ортогональных многогранников произвольной размерности в задачах раскроя и упаковки // Вестник МГТУ «Станкин». 2019. № 3 (50). С. 77-81.
- [19] Е Вин Тун, Маркин Л.В. Построение рецепторных геометрических моделей объектов сложных технических форм // Геометрия и графика. 2019. № 7 (4). С. 44-56.
- [20] Leao A.A., Toledo F.M., Oliveira J.F., Carravilla M.A., Alvarez-Valdés R. Irregular packing problems: a review of mathematical models. European Journal of Operational Research. 2020. Vol. 282. No. 3. pp. 803-822.
- [21] Lamas Fernandez C., Bennell J., Martinez Sykora A. Voxel-Based Solution Approaches to the Three-Dimensional Irregular Packing Problem. Operations Research. 2021. pp. 1-20.

## **DEVELOPMENT OF A PLACEMENT ALGORITHM THAT TAKES INTO ACCOUNT THE CONSTRAINTS ON THE MINIMUM DISTANCE BETWEEN SPECIAL POINTS OF RECTANGULAR OBJECTS**

<sup>1</sup>Moscow State University of Technology «STANKIN», Russia;

<sup>2</sup>V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Russia.

### **Abstract**

The paper considers the problem of optimized placement of flat rectangular objects, for which, in addition to the basic geometric and technological constraints applied to the generated arrangement, a constraint on the minimum distance between pre-selected special points of objects is additionally set. Based on the model of potential containers, an algorithm intended for placing rectangles is developed, taking into account individual constraints on the minimum distance between special points of objects. A heuristic algorithm for choosing the best orthogonal orientation of rectangular objects to minimize the density of the generated placement scheme is proposed. Examples of solving some particular problems of arrangement with various constraints on the minimum distance specified between special points of objects are presented.

*Key words:* packing problem, layout, model of potential containers, special points.

### **REFERENCES**

- [1] Valiakhmetova Y.I., Filippova A.S. Theory of optimum resource utilization by L.V. Kantorovich in cutting-packing problems: overview and history of development of solving methods. Vestnik UGATU. 2014. Vol. 18. No. 1(62). pp. 186-197. (rus.)
- [2] Alvarez-Valdes R., Carravilla M.A., Oliveira J.F. Cutting and packing. Handbook of Heuristics. Springer, Cham. 2018. pp. 931-977.
- [3] Johnson D.S. A brief history of NP-completeness, 1954–2012. Documenta Mathematica. 2012. Extra Volume ISMP. pp. 359-376.
- [4] Krotova N.A., Puskov R.L. Determination of geometric parameters and orientation of the workpiece inside the machine-tool using computer-vision algorithms. Vestnik MSTU «STANKIN». 2021. No. 2 (57). pp. 8-12. (rus.)

- [5] Pinto M., Silva C., Thürer M., Moniz S. Nesting and scheduling optimization of additive manufacturing systems: Mapping the territory. *Computers & Operations Research*. 2024. pp. 106592.
- [6] Júnior A.N., Silva E., Francescato M., Rosa C. B., Siluk J. The rectangular two-dimensional strip packing problem real-life practical constraints: A bibliometric overview. *Computers & Operations Research*. 2022. Vol. 137. pp. 105521.
- [7] Gajda M., Trivella A., Mansini R., Pisinger D. An optimization approach for a complex real-life container loading problem. *Omega*. 2022. Vol. 107. pp. 102559.
- [8] Ermolov I.L., Sobolnikov S.A. Planning of mobile robots' deployment for functioning of mobile communication network. *Vestnik MSTU «STANKIN»*. 2012. Vol. 4. pp. 126-129. (rus.)
- [9] Fang H., Xu M., Chen X., Lo S.M., Wan M.P. Development of a Performance-Based Approach for Optimizing Sensor Placement in Building Fire Detection. *Fire Technology*. 2025. pp. 1-28. <https://doi.org/10.1007/s10694-025-01721-1>.
- [10] Onal S., Zhu W., Das S. Order picking heuristics for online order fulfillment warehouses with explosive storage. *International Journal of Production Economics*. 2023. Vol. 256. pp. 108747.
- [11] Guo B., Zhang Y., Hu J., Li J., Wu F., Peng Q., Zhang Q. Two-dimensional irregular packing problems: A review. *Frontiers in Mechanical Engineering*. 2022. Vol. 8. pp. 966691.
- [12] Chugaia A., Alyokhina S., Zhuravka A. Mathematical aspects of optimal layout problem of spent nuclear fuel containers on the storage site. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics*. 2022. Vol. 15. No. 3-4. pp. 85-99.
- [13] Lau J.H. Recent advances and trends in advanced packaging. *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*. 2022. Vol. 12. No. 2. pp. 228-252.
- [14] Kumar Y., Deep K. Positioning of new mobile tower using Circle Packing Problem. *Evolutionary Intelligence*. 2024. Vol. 17. No. 5. pp. 3241-3268.
- [15] Chekanin V.A., Chekanin A.V. Development of algorithms for placement of flat objects taken into account the specifics of real layout problems // *Modern mechanical engineering: Science and education*. 2024. Vol. 13. P. 458-472. (rus.)
- [16] Chekanin V.A., Chekanin A.V. Deleting objects algorithm for the optimization of orthogonal packing problems // *Advances in Mechanical Engineering*. Springer International Publishing. 2017. pp. 27-35.
- [17] Chekanin V.A., Chekanin A.V. Algorithms for management objects in orthogonal packing problems. *ARNP Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2016. Vol. 11. No. 13. pp. 8436-8446.

- [18] Chekanin V.A. Algorithms for the placing and deleting of orthogonal polyhedrons of arbitrary dimension in the cutting and packing problems. Vestnik MSTU «STANKIN». 2019. Vol. 3. pp. 77-81. (rus.)
- [19] E Vin Tun, Markin L.V. Construction of receptor geometric models for objects of complex technical forms. Geometry & Graphics. 2019. Vol 7. No. 4. pp. 44-56. (rus.)
- [20] Leao A.A., Toledo F.M., Oliveira J.F., Carravilla M.A., Alvarez-Valdés R. Irregular packing problems: a review of mathematical models. European Journal of Operational Research. 2020. Vol. 282. No. 3. pp. 803-822.
- [21] Lamas Fernandez C., Bennell J., Martinez Sykora A. Voxel-Based Solution Approaches to the Three-Dimensional Irregular Packing Problem. Operations Research. 2021. pp. 1-20.