DOI: 10.5862/JPM.237.7
УДК: 519.21(075)

И.Д. Лобанов, А.В. Денисов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПОМЕХ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Предложена новая модель белого шума на основе вейвлетного преобразования. Данная модель является более адекватной при решении некоторых радиофизических задач, например задач об отражении электромагнитных волн от ионосферы. Помимо этого, показано, что с точки зрения вероятностного описания траекторий случайного процесса при помощи функционала плотности вероятностей, предложенного И.Н. Амиантовым, вейвлетная реализация данного случайного процесса более вероятна. При получении модели были использованы свойства вейвлетов, а также известные теоремы математического анализа и теории вероятности (теорема о среднем значении, центральная предельная теорема Ляпунова). В результате была получена теорема о разложении рассматриваемого случайного процесса по вейвлетному базису. В работе показано, что полученные результаты согласуются с соответствующими результатами В.А. Котельникова.

БЕЛЫЙ ШУМ, ФЛУКТУАЦИОННЫЕ ПОМЕХИ, ВЕЙВЛЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ.

Нормальные флуктуационные помехи, согласно работам В.А. Котельникова [1], характеризуются тем, что состоят из большого количества импульсов, следующих друг за другом через случайные промежутки времени, причем такие импульсы могут накладываться друг на друга.

В работе [1] и в ряде других публикаций (см., например, [2 – 4]) аналитическое задание помех представлено в виде разложения по тригонометрическому базису. Однако в некоторых задачах радиофизики такая модель, которая характеризуется дискретным спектром, не всегда является адекватной. Так например, в задачах об отражении радиоволн в нижней (турбулентной) ионосфере целесообразно рассматривать флуктуации со сплошным спектром.

Возьмем за основу вероятностное описание возможных траекторий стационарных случайных процессов при помощи функционала плотности вероятностей $F(x(t))$, впервые предложенное в работе [5]. В случае равномерного спектра мощности процесса и при фиксированной ширине его полосы указанный функционал имеет вид

$$F(x(t)) = h\exp\left(-\frac{1}{2N}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt\right), \qquad (1)$$

где $x(t)$ – траектории, зависящие от времени t; h – величина, зависящая от ранга дробления промежутка, на котором рассматриваются траектории (она одинакова для всех траекторий при стремлении ранга дробления к нулю); N – высота спектра мощности; T – рассматриваемый временной интервал.

Нетрудно убедиться, что при указанных условиях, когда функционал выражен формулой (1), вейвлетная реализация процесса более вероятна, чем синусоидальная.

Это следует из того, что для синусоидальной функции $x(t)$ интеграл в выражении (1) расходится с ростом значения T, а для вейвлета он конечен.

С целью развития результатов, полученных в монографии [1], в нашем исследовании получено аналитическое задание помехи, представляющей собой суперпозицию элементарных случайных процессов в виде разложения по вейвлетному базису. В качестве нового результата данной работы предлагается доказательство теоремы о разложении стационарного случайного процесса по вейвлетному базису.

Для дальнейшего изложения целесообразно перейти от размерных величин t, T (имеют размерность времени) к безразмерным, поделив их, например, на $t_0 = 1$ с; для этих величин далее будут использованы прежние обозначения, а именно t, T.

Теорема. *Пусть на промежутке* $[-T/2, T/2]$ *помеха* $W(t)$ *задана суперпозицией «элементарных» случайных процессов* $F_k(t)$:

$$W(t) = \sum_{k=1}^{N} F_k(t)$$

и выполняются условия:

1) $F_k(t)$ – *некоррелированные случайные процессы*;

2) N – *количество импульсов, попавших в промежуток* $[-T/2, T/2]$, – *случайная величина, причем* $N >>1$;

3) *энергия процесса*

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} W^2(t)dt$$

остается неизменной в каждой реализации случайного процесса.

Тогда с точки зрения сходимости в среднем квадратичном справедливо разложение:

$$W(t) = \frac{1}{\sqrt{TC_\psi}} \sum_i \sum_j 2^{-\frac{i}{2}} \left[\theta_{i,j} \sqrt{\sum_{k=1}^{N} M((q_k^+)^2)} - \chi_{i,j} \sqrt{\sum_{k=1}^{N} M((q_k^-)^2)} \right] \Psi_0\left(\frac{t-j}{2^i}\right), \qquad (2)$$

где C_ψ – *константа нормировки [4], равная*

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{\left|\hat{\Psi}_0(\omega)\right|^2}{\omega} d\omega$$

и зависящая от выбранного материнского вейвлета; случайные величины $\theta_{i,j}, \chi_{i,j} \in N(0,1)$, q_k^+, q_k^- – *соответственно площади положительных и отрицательных подграфиков реализаций* $F_k(t)$.

Доказательство. Будем использовать общепринятое для вейвлетов обозначение

$$\Psi_{i,j}(t) = 2^{-\frac{i}{2}} \Psi_0\left(\frac{t-j}{2^i}\right)$$

[7] и рассматривать вейвлеты $\Psi_{i,j}(t)$ и $\Psi_0(t)$, удовлетворяющие следующим условиям при $T \to \infty$:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Psi_0(t)dt \to 0, \qquad (3)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Psi_0(t)^2 dt \to 1. \qquad (4)$$

Запишем коэффициенты $W(i,j)$ разложения $W(t)$ по этим вейвлетам [6]:

$$W(i,j) = \sum_{k=1}^{N} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F_k(t)\Psi_{i,j}(t)dt.$$

Реализация $F_k(t)$ есть, вообще говоря, знакопеременная функция с произвольным числом нулей (на своем носителе), которую можно представить в виде кортежей положительных и отрицательных всплесков, так что справедливы выражения

$$\begin{gathered} W(i,j) = \sum_{k=1}^{N} C_k^+ - \sum_{k=1}^{N} C_k^-, \\ C_k^+ = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F_k^+(t)\Psi_{i,j}(t)dt, \\ C_k^- = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F_k^-(t)\Psi_{i,j}(t)dt. \end{gathered} \qquad (5)$$

Рассмотрим положительные всплески и применим к первому интегралу (5) известную из математического анализа теорему о среднем значении:

$$C_k^+ = \Psi_{i,j}\left(\bar{t}_k\right)q_k^+, q_k^+ = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F_k^+(t)dt,$$
$$\bar{t}_k \in \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]. \quad (6)$$

Оценим модуль корреляционного момента R случайных величин q_k^+ и $\Psi_{i,j}\left(\bar{t}_k\right)$ с использованием неравенства Коши – Буняковского – Шварца:

$$R^2 \le D\left(\Psi_{i,j}\left(\overline{t_k}\right)\right)D(q_k^+),$$

где

$$R = M\left[\left(\Psi_{i,j}\left(\bar{t}_k\right) - M\left[\Psi_{i,j}\left(\bar{t}_k\right)\right]\right)(q_k^+ - M[q_k^+])\right].$$

Заметим, что при $T \to \infty$

$$D\left(\Psi_{i,j}\left(\bar{t}_k\right)\right) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\Psi_{i,j}^2\left(\bar{t}_k\right)d\,\bar{t}_k \to \frac{1}{T} \to 0.$$

Полагая, что дисперсия q_k^+ конечна, имеем:

$$\text{при } T \to \infty \quad R^2 \to 0,$$

что доказывает некоррелированность величин q_k^+ и $\Psi_{i,j}\left(\bar{t}_k\right)$.

Далее применим для случайных величин C_k^+ центральную предельную теорему А.М. Ляпунова:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{N}C_k^+ - \sum_{k=1}^{N}M(C_k^+)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}D(C_k^+)}} = \theta, \quad (7)$$

где $\theta \in N(0,1)$.

Найдем математическое ожидание $M(C_k^+)$ как математическое ожидание произведения некоррелированных случайных величин:

$$M(C_k^+) = M\left(\Psi_{i,j}\left(\bar{t}_k\right)\right)M(q_k^+) =$$
$$= M(q_k^+)\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\Psi_{i,j}\left(\bar{t}_k\right)\frac{d\,\bar{t}_k}{T}. \quad (8)$$

С учетом свойства (3) интеграл в правой части равенства (8) равен нулю, следовательно, $M(C_k^+) = 0$.

Теперь определим дисперсию $D(C_k^+)$:

$$D(C_k^+) = M[(C_k^+ - M(C_k^+))^2] = M[(C_k^+)^2].$$

С учетом выше доказанной некоррелированности q_k^+ и $\Psi_{i,j}\left(\bar{t}_k\right)$ получаем:

$$D(C_k^+) = M\left[\Psi_{i,j}^{\ 2}\left(\bar{t}_k\right)\right]M[(q_k^+)^2].$$

Перепишем последнее выражение, используя свойство (4):

$$D(C_k^+) = M\left[\Psi_{i,j}^{\ 2}\left(\bar{t}_k\right)\right]M[(q_k^+)^2] =$$
$$= M[(q_k^+)^2]\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\Psi_{i,j}^{\ 2}\left(\bar{t}_k\right)d\,\bar{t}_k = \frac{M[(q_k^+)^2]}{T}. \quad (9)$$

Из формулы (7) с учетом равенств (8) и (9) находим:

$$\sum_{k=1}^{N}C_k^+ = \frac{1}{\sqrt{T}}\theta\sqrt{\sum_{k=1}^{N}M[(q_k^+)^2]}, \theta \in N(0,1). \quad (10)$$

Проделав аналогичные преобразования для случайных величин C_k^-, получим следующее:

$$\sum_{k=1}^{N}C_k^- = \frac{1}{\sqrt{T}}\chi\sqrt{\sum_{k=1}^{N}M[(q_k^+)^2]}, \chi \in N(0,1). \quad (11)$$

Перепишем (5) в соответствии с (10) и (11):

$$W(i,j) = \frac{1}{\sqrt{T}}\left[\theta_{i,j}\sqrt{\sum_{k=1}^{N}M((q_k^+)^2)} - \chi_{i,j}\sqrt{\sum_{k=1}^{N}M((q_k^-)^2)}\right]. \quad (12)$$

Формула (12) определяет коэффициенты разложения процесса $W(t)$ по вейвлетному базису. Восстанавливая $W(t)$ по найденным коэффициентам $W(i, j)$ [7], получаем (2).

Теорема доказана.

Разложение (2) является каноническим разложением белого шума по вейвлетному базису, то есть представляет собой сумму произведений случайных величин на детерминированные функции времени. В данном случае это вейвлетные функции.

В работе И.Н. Амиантова [5], в частности, доказано утверждение, что при равномерном спектре стационарного случайного процесса функционал плотности вероятности имеет вид (1). Если проанализировать вывод формулы (1) в работе [5], прочитав его в обратном порядке, то можно заметить следующее: из условия постоянства энергии процесса за большой промежуток времени и некоррелированности элементов корреляционной матрицы [5] получается равномерный спектр. При этом важно, что матрица составлена для сечений случайного процесса [5], взятых в моменты времени, согласованные с теоремой отсчетов Котельникова.

При решении практических задач (моделирование случайных процессов на компьютере) целесообразно применять те вейвлеты, которые хорошо локализованы как по времени, так и по частоте. Такие вейвлеты рассмотрены в работах [6, 7] и других. В качестве материнских вейвлетов при разложения вещественных случайных процессов можно использовать, например, вещественную часть вейвлета Морле:

$$\Psi_0(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} \cos(\omega_0 t) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

где ω_0 – параметр, либо вещественную часть вейвлета Пауля:

$$\Psi_0(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{2^m i^m m!}{\sqrt{\pi(2m!)}}(1-it)^{-(m+1)}\right],$$

где m – параметр.

Заметим также, что если рассматривать помехи того же типа, что рассматривал В.А. Котельников в работе [1], то разложение (2) можно записать следующим образом:

$$W(t) = \frac{1}{\sqrt{T C_\psi}} \sqrt{\sum_{k=1}^{N} M((q_k^+)^2)} \cdot \sum_i \sum_j \theta_{i,j} \Psi_{i,j}(t). \quad (13)$$

Формула (13) аналогична полученной В.А. Котельниковым [1], но отличается от нее базисом: вместо тригонометрического в формуле (13) стоит вейвлетный, а также наличием двойного суммирования, которое можно заменить (с учетом известных в математике свойств счетных множеств) на суммирование по одному индексу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Котельников В.А.** Теория потенциальной помехоустойчивости. М.: Госэнергоиздат, 1956. 152 с.

[2] **Белянский М.А., Денисов А.В.** Метод канонического разложения случайных функций в классических радиофизических задачах. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2015. 140 с.

[3] **Боровская И.А., Козубская Т.К., Курбанмурадов О., Сабельфельд К.К.** О моделировании однородных случайных полей и сигналов и их использование в задачах аэроакустики //Математическое моделирование. 2007. Т. 19. № 10. С. 76 – 88.

[4] **Пригарин С.М.** Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: Изд-во ИВМ и МГ СО РАН, 2005. 259 с.

[5] **Амиантов И.Н.** Избранные вопросы статистической теории связи. М.: Советское радио, 1971. 416 с.

[6] **Короновский А.А., Храмов А.Е.** Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с.

[7] **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 461с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ЛОБАНОВ Иван Дмитриевич – *студент Института физики, нанотехнологий и телекоммуникаций Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

lobanov.111@yandex.ru

ДЕНИСОВ Александр Владимирович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиотехники и телекоммуникаций Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

A.V.Denisov@inbox.ru

Lobanov I.D., Denisov A.V. A MATHEMATICAL MODEL OF THE FLUCTUATION NOISE BASED ON THE WAVELET TRANSFORM.

A new model of white noise on the basis of the wavelet transform has been put forward. This model is more adequate for solving some radiophysical tasks such as the problem of electromagnetic waves reflection from the ionosphere. Moreover, it was shown that in terms of probabilistic description of the random-process trajectories, the wavelet implementation of this random process is more likely (using the probability density functional offered by I.N. Amiantov). The wavelet properties and the famous theorems of mathematical analysis and theory of chances were used to develop our model: the mean value theorem and Lyapunov's central limit theorem. Our study resulted in a theorem on random-process expansion in terms of wavelet basis. It was also shown that the obtained results were in agreement with those of V.A. Kotelnikov.

WHITE NOISE, FLUCTUATION NOISE, WAVELET TRANSFORM.

REFERENCES

[1] **V.A. Kotelnikov,** Teoriya potentsialnoy pomekhoustoychivosti [The theory of potential noise immunity], Moscow, Gosenegoizdat, 1956.

[2] **M.A. Belyanskiy, A.V. Denisov,** Metod kanonicheskogo razlozheniya sluchaynykh funktsiy v klassicheskikh radiofizicheskikh zadachakh [The method of canobical expansion of random functions in the classical radiophysical problems], St. Petersburg, Izd-vo Politekhnicheskogo universiteta, 2015.

[3] **I.A. Borovskaya, T.K. Kozubskaya, O. Kurbanmuradov, K.K. Sabelfeld,** O modelirovanii odnorodnykh sluchaynykh poley i signalov i ikh ispolzovaniye v zadachakh aeroakustiki [On modeling of uniform random fields and signals and their use in the aeroacoustic problems], Matematicheskoye modelirovaniye. 2007. 19 (10) (2007) 76–88.

[4] **S.M. Prigarin,** Metody chislennogo modelirovaniya sluchaynykh protsessov i poley [Methods of numerical modeling of random processes and fields], Novosibirsk, Izdatelstvo IVM i MG SO RAN, 2005.

[5] **I.N. Amiantov,** Izbrannyye voprosy statisticheskoy teorii svyazi [Selected topics of the statistical communication theory], Moscow, Sovetskoye radio, 1971.

[6] **A.A. Koronovskiy, A.E. Khramov,** Nepreryvnyy veyvletnyy analiz i yego prilozheniya [Continuous wevelet analysis and its applications], Moscow, Fizmatlit, 2003.

[7] **I. Dobeshi,** Desyat lektsiy po veyvletam [Ten lectures on wavelets], Izhevsk, NITs 'Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika', 2001.

THE AUTHORS

LOBANOV Ivan D.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
lobanov.111@yandex.ru

DENISOV ALEXANDER V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
A.V.Denisov@inbox.ru