DOI: 10.5862/JPM.242.10
УДК 519.854

В.И. Хохлюк

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ СЕЧЕНИЙ

Статья посвящена решению дизъюнктивной задачи. В работе представлены различные способы, с помощью которых можно получить дизъюнктивные сечения из логических ограничений на линейные неравенства. Изложен основной принцип дизъюнктивных сечений, а также принцип, позволяющий усиливать такие сечения. Благодаря этим принципам, упрощается решение задач оптимизации с большим числом линейных ограничений. Формулируются и доказываются две теоремы. Четыре примера иллюстрируют различные теоретические положения.

Предложенные принципы и процедуры на их основе являются теоретической базой для построения алгоритмов, предназначенных для программной реализации при решении практических задач.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, ДИЗЪЮНКТИВНАЯ ЗАДАЧА, ВЫПУКЛАЯ ОБОЛОЧКА, ЗАМЫКАНИЕ МНОЖЕСТВА, УСИЛЕНИЕ СЕЧЕНИЯ.

Введение

Дизъюнктивные методы позволяют получать дизъюнктивные сечения (DC – Disjunctive Cut) из логических ограничений на линейные неравенства. В настоящем исследовании рассмотрен принцип DC, который позволяет обобщить имеющиеся способы получения сечений. Однако указанный принцип связан с другими принципами и подходами, относящимися к нахождению сечений, поэтому его часто называют основным. Для усиления DC используется так называемый метапринцип MCS (Metaprinciple Cut Strengthening).

Представленные в данной статье DC расширяют возможности их получения при построении новых алгоритмов. Программы, реализующие эти алгоритмы, предназначены для численного решения теоретических и практических задач оптимизации с логическими ограничениями на линейные неравенства. Полученные результаты уже используются при анализе экономических моделей, в описании которых используются логические ограничения. Возможны и другие применения этих результатов, например при численном решении задач оптимизации. Теоретические положения различной степени сложности проиллюстрированы в настоящей статье четырьмя примерами.

Основные определения

Рассмотрим дизъюнктивную задачу минимизации, которая формулируется как

$$\min\left\{cx \,\middle|\, \mathop{\vee}_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \ge b_i,\ x \ge 0\right) = \text{true}\right\},$$

где $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$.

В дальнейшем будем ее называть DP (Disjunctive Program). Выражение в круглых скобках формулы есть логическая переменная, принимающая значение true – истина (либо false – ложь), если точка x удовлетворяет (не удовлетворяет) системе из $n+1$ неравенств.

Объектом исследования является допустимое множество рассматриваемой дизъюнктивной задачи минимизации

$$S_4 = \left\{ x \Big| \bigvee_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \ge b_i,\ x \ge 0 \right) = \text{true} \right\}.$$

Множество S_4 называется дизъюнктивным, и его можно представить двумя способами. В первом случае его представление есть дизъюнктивная нормальная форма логического выражения, содержащего линейные неравенства (любое такое выражение может быть приведено к дизъюнктивной форме). Второй способ представления дизъюнктивного множества имеет вид

$$S_4 = \bigcup_{i=1}^{m} \left\{ x \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \ge b_i,\ x \ge 0 \right\}.$$

На самом деле эти два представления эквивалентны. Следует отметить, что множество S_4 может быть невыпуклым.

Дизъюнктивные сечения

Для формулировки изложенных далее принципов целесообразно рассмотреть конкретный пример.

Пример 1. Пусть для неотрицательных переменных x_1, x_2, x_3 предложено два неравенства:

$$2x_1 + (-3)x_2 + (-7)x_3 \ge 15 \qquad (1)$$

и

$$1x_1 + 2x_2 + (-5)x_3 \ge 28. \qquad (2)$$

Известно, что одно из них справедливо, однако неизвестно, какое именно. Возникает вопрос, существует ли хотя бы одно неравенство, которое с необходимостью справедливо.

Утверждаем, что такое неравенство существует и в данном случае им будет третье неравенство, например, вида

$$2x_1 + 2x_2 + (-5)x_3 \ge 15, \qquad (3)$$

которое представляет собой ослабление обоих неравенств (1) и (2), так как

$$2 = \max\{2,1\},\ 2 = \max\{-3,2\},$$
$$-5 = \max\{-7,-5\} \text{ и } 15 = \min\{15,28\}.$$

Таким образом, неравенство (3) справедливо в том случае, когда хотя бы одно из неравенств (1) и (2) является истинным.

Метапринцип DC, который обобщает идею получения последнего неравенства (3) из двух неравенств (1) и (2), формулируется следующим образом.

Метапринцип DC. Предположим, что имеет место по крайней мере одно из неравенств

$$\sum_{j=1}^{r} b_{i,j} x_j \ge b_{i,0},\ i = 1, 2, \ldots, p,\ p \ge 2 \qquad (4)$$

и что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – неотрицательные.

Тогда неравенство

$$\sum_{j=1}^{r} \left(\max_{i=1}^{p} b_{i,j} \right) x_j \ge \min_{i=1}^{p} b_{i,0} \qquad (5)$$

и все его ослабления являются справедливыми сечениями для множества

$$S_4 = \left\{ x \Big| \bigvee_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{r} b_{i,j} x_j \ge b_{i,0}, x \ge 0 \right) = \text{true} \right\}.$$

Поскольку принцип DC, который является ключевым для нашего исследования, следует из принципа LP и метапринципа DC [3, 5], сформулируем в первую очередь принцип LP.

Принцип LP. Если λ – произвольный неотрицательный m-вектор, то неравенство

$$(\lambda A)x \ge \lambda b$$

и все его ослабления являются справедливыми неравенствами для непустого множества

$$S_1 = \{x \mid Ax \ge b, x \ge 0, x \in \mathbf{R}^r\}.$$

Итак, сформулируем принцип дизъюнктивных сечений (DC).

Принцип DC [2, 3, 5]. *Предположим, что имеет место по крайней мере одна из систем линейных неравенств*

$$(A^h x \ge b^h, x \ge 0), h \in H, H \ne \varnothing \qquad (6)$$

(A^h – $m_h \times r$-матрица, b^h – m_h-вектор-столбец).

Тогда для любых m_h-вектор-строк λ^h неотрицательных множителей неравенство

$$(\sup_{h \in H} \lambda^h A^h) x \ge \inf_{h \in H} \lambda^h b^h \qquad (7)$$

и все его ослабления являются справедливыми *сечениями для дизъюнктивного множества*

$$S_4 = \{x | \vee_{h\in H} (A^h x \ge b^h, x \ge 0) = \text{true}\}.$$

Здесь и далее нами используется понятие супремума множества векторов. В неравенстве (7) через $\sup_{h\in H} \lambda^h A^h$ обозначен вектор **v**, j-я компонента которого есть

$$v_j = \sup_{h\in H} v_j^h \ (j = 1, 2, ..., r), \ v^h = \lambda^h A^h,$$

где λ^h – вектор-строка из m_h компонент, h – индекс.

В неравенстве (7) предполагается существование конечного инфимума и конечных супремумов. Множество H может быть конечным или бесконечным.

Доказательство. Ввиду того, что по крайней мере одна система (6) имеет место для некоторого x, по крайней мере одно неравенство

$$(\lambda^h A^h) x \ge \lambda^h b^h$$

имеет место для этого x. Однако h может зависеть от x. Взятие инфимума и супремумов в неравенстве (7) устраняет эту зависимость и оставляет неравенство все еще справедливым, поскольку $x \ge 0$.

Отметим, что принцип LP может быть переформулирован как метапринцип, полученный из логического условия, согласно которому справедливы все неравенства $Ax \ge b$. Кроме того, частными случаями принципа DC являются принцип LP и метапринцип DC:

$$(|H| = 1 \text{ и } m_h = 1 \ \forall h \in H, |H| = p, \ p \ge 2).$$

Обычно сечение (7) обладает свойствами, характерными для всех систем в случае, если они известны лишь для одной из них среди системы линейных неравенств (6), которая справедлива (см. теоремы 1 и 2, представленные ниже).

Но иногда возможны исключения, когда сечение (7) оказывается неэффективным в представлении такой информации (см. следующий пример).

Пример 2. Предположим, что x_1 – неотрицательная переменная и что имеет место неравенство

$$(-1) \cdot x_1 \ge (-1) \tag{8}$$

или

$$0 \cdot x_1 \ge 1.$$

Система (6) при значениях $h = 1$ и 2 состоит из одного неравенства, причем в первом случае ($h = 1$) она совместна, а во втором – нет. Тогда, используя принцип DC, получаем следующие неравенства:

$$\max\{-1 \cdot \lambda_1, 0 \cdot \lambda_2\} x \ge \min\{-1 \cdot \lambda_1, 1 \cdot \lambda_2\} \tag{9}$$

и

$$0 \cdot x_1 \ge -\lambda_1. \tag{9a}$$

Неравенство (9a) есть ослабление тривиального сечения $0 \cdot x_1 \ge 0$, которое выполняется для всех x_1. Итак, из анализа неравенств (8) следует (6), что должны выполняться неравенства

$$0 \le x_1 \le 1$$

(ввиду того, что $0 \cdot x_1 \ge 1$ не выполняется, должно иметь место неравенство $(-1) \cdot x_1 \ge (-1)$).

Важна геометрическая интерпретация дизъюнктивных сечений:

Справедливые сечения для дизъюнктивного множества S_4 в точности являются таковыми для замкнутой выпуклой оболочки $clconvS_4$ множества S_4.

Обратные утверждения к принципу DC

В нижеследующих теоремах формулируются условия, выполнение которых гарантирует, что принцип DC дает все справедливые сечения. Представленные теоремы 1 и 2 являются обратными утверждениями к принципу DC. Еще одно обратное утверждение представлено в работах [2, 5].

Теорема 1. *Если каждая система (6), где $h \in H$, является совместной, то для любого справедливого неравенства $\pi x \ge \pi_0$, $x \in S_4$, существуют неотрицательные векторы $\lambda^h, h \in H$, такие, что*

$$(\sup_{h\in H} \lambda^h A^h)_j \le \pi_j, \ j = 1, 2, ..., r, \ \inf_{h\in H} \lambda^h b^h \ge \pi_0.$$

Доказательство. Согласно выдвинутому нами предположению, все системы (6) совместны. Поскольку справедливое неравенство $\pi x \ge \pi_0$ следует из любой из них, то согласно теореме, обратной утверждению к принципу LP, для каждого $h \in H$ существует вектор $\lambda^h \ge 0$, удовлетворяющий условию

$$(\lambda^h A^h)_j \; j = 1, 2, \ldots, r, \lambda^h b^h \geq \pi_0,$$

где $(\lambda^h A^h)_j$ – j-я компонента вектора $\lambda^h A^h$.

Беря супремумы и инфимум, получаем требуемое.

Теорема 1 доказана.

Прежде чем будет сформулирована и доказана следующая теорема, введем новые понятия. Для каждого $h, h \in H$, рассмотрим конус

$$C_h = \{x \mid A^h x \geq 0, x \geq 0\}. \qquad (10)$$

Далее в формуле (11) будет записана сумма множеств (конусов), определяемая как

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

В принципе DC не все системы (6) обязаны быть совместными, чтобы давать все справедливые сечения.

Теорема 2. *Принцип DC дает все справедливые сечения для логического условия, по которому по крайней мере одна из систем (6) имеет место, если для каждого $h \in H$ такого, что указанная система несовместна, выполняется*

$$C_h \subseteq \sum\nolimits_p \{C_p \mid (A^p x \geq b^p, x \geq 0) \text{ совместна}, p \in H\} \qquad (11)$$

(сумма интерпретируется как {0}, если все системы (6), $h \in H$, являются несовместными).

Доказательство. Идея доказательства теоремы 2 заключается в нахождении таких $\lambda^h(\lambda^h \geq 0)$ для несовместных систем (6), что выполняется неравенство

$$\lambda^h A^h \leq \pi \; (\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r)) \text{ и } \lambda^h b^h \geq \pi_0$$

для любого сечения $\pi x \geq \pi_0$, справедливого для всех совместных систем $(A^p x \geq b^p, x \geq 0)$. Тогда взятие супремумов и инфимума, как в доказательстве теоремы 1, завершит рассуждения.

Для начала подробного доказательства теоремы 2 заметим, что если система

$$(A^p x \geq b^p, x \geq 0)$$

совместна и неравенство $\pi x \geq \pi_0$ является справедливым, то имеем неравенство $\pi x \geq 0$ для $x \in C_p$. Это следует из системы неравенств $\lambda^p A^p \leq \pi$ для некоторого $\lambda^p, \lambda^p \geq 0$ и из того, что $x \geq 0$.

Но если система (6) несовместна и $x \in C_h$, то, согласно системе (11), когда

$$x = \sum\nolimits_p \{x^p \mid (A^p x \geq b^p, x \geq 0) \text{ совместна } x^p \in C_p, p \in H\}$$

для определенных x^p из C_p, получаем, что

$$\pi x = \sum_p \pi x^p \geq 0. \qquad (11a)$$

Система (11а) также выполняется, если все системы (6), $h \in H$, несовместны. Поэтому из неравенств

$$A^h x \geq 0, x \geq 0$$

следует неравенство $\pi x \geq 0$, и, в соответствии с принципом LP, получаем множители θ^h, для которых

$$\theta^h \geq 0, \theta^h A^h \leq \pi.$$

Наконец, согласно лемме Минковского – Фаркаша, из несовместности системы (6) следует, что существует вектор p^h, для которого (см. работу [5], стр. 39) справедливы неравенства

$$p^h \geq 0, p^h A^h \leq 0 \text{ и } p^h b^h > 0.$$

Но тогда для достаточно большого значения переменной $r, r \geq 0$, полагая

$$\lambda^h = \theta^h + r p^h,$$

имеем

$$\lambda^h A^h \leq \pi + 0 = \pi, \lambda^h b^h \geq \pi_0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2 доказана.

В качестве следствия теоремы 2 отметим, что конус C_h, представленный формулой (10), имеет интересную интерпретацию. Этот конус часто называют рецессивным или конусом направлений в бесконечность [1]. Для определенности предположим, что d^h выбирается так, что система

$$A^h x \geq d^h, x \geq 0 \qquad (12)$$

совместна.

Пусть x^0 удовлетворяет системе (12), и пусть $\bar{x} \in C_h$. Тогда для любого $\lambda, \lambda \geq 0$ выполняется соотношение

$$A^h(x^0+\lambda\bar{x}) = A^h x^0 + \lambda A^h \bar{x} \geq d^h + 0 = d^h, \quad (13)$$

и, следовательно, $x^0+\lambda\bar{x}$ также удовлетворяет системе (12).

Усиление дизъюнктивного сечения

В данном разделе представлен метапринцип MCS, который по своему действию значительно отличается от метапринципа DC. Метапринцип MCS предназначен для усиления сечений (напомним, что MCS – это Metaprinciple Cut Strengthening).

Метапринцип MCS. *Пусть T – непустое множество, а M – моноид, т. е. $T \subseteq \boldsymbol{R}^m$, $M \subseteq \boldsymbol{R}^m$ (m – число строк матрицы A). Предположим, что из ограничений*

$$Ax \in T + M, x \in Z_+^r \quad (14)$$

всегда следует неравенство

$$\sum_{j=1}^{r} F_j(a^j)x_j \geq \pi_0 \quad (15)$$

для некоторых матриц A,
где $F_1(v), F_2(v), \ldots, F_r(v)$ – заданные (не обязательно субаддитивные) функции, a^j – j-й столбец матрицы A.

Тогда неравенство

$$\sum_{j=1}^{r} (\inf_{m\in M} F_j(a^j+m))x_j \geq \pi_0 \quad (16)$$

также является справедливым для ограничений (14).

Доказательство. Пусть произвольно выбраны элементы

$$m^j, m^j \in M, j = 1, 2, \ldots, r.$$

Поскольку M – моноид, имеем

$$\sum_{j=1}^{r} m^j x_j \in M$$

для любого вектора $x \in Z_+^r$.. Следовательно, из ограничения (14) следует, что

$$\sum_{j=1}^{r}(a^j+m^j)x_j = \\ = \sum_{j=1}^{r} a^j x_j + \sum_{j=1}^{r} m^j x_j \in T + M + M = T + M \quad (17)$$

(последнее равенство имеет место, так как M – моноид). Это, в свою очередь, влечет за собой следующее неравенство (оно вытекает из принятого предположения):

$$\sum_{j=1}^{r} F_j(a^j+m^j)x_j \geq \pi_0. \quad (18)$$

Формула (14) влечет за собой неравенство (18) для любого произвольного выбора m^j. Отсюда и следует неравенство (16).

Метапринцип MCS может быть использован вместе с принципом DC для усиления сечений, полученных по принципу DC, когда $x \in Z_+^r$.

Проиллюстрируем процедуру усиления сечения на конкретном примере.

Пример 3. Предположим, что неотрицательные целочисленные переменные x, t_1, t_2, t_3 удовлетворяют уравнению

$$x = 1,7 + 2,3(-t_1) + (-0,3)(-t_2) + 2(-t_3).$$

Релаксируем (ослабляем) это ограничение, записывая его как

$$2,3(-t_1) - 0,3(-t_2) + 2(-t_3) \in T + M,$$

а в общем случае как

$$a_1(-t_1) + a_2(-t_2) + a_3(-t_3) \in T + M, \quad (19)$$

где $T = \{-1, 7\}$, M – моноид всех целых чисел по сложению.

Поскольку для каждого элемента из множества $T + M$ выполняются ограничения $\geq 0,3$ или $\leq -0,7$, нетрудно видеть, что имеют место неравенства

$$(-a_1)t_1 + (-a_2)t_2 + (-a_3)t_3 \geq 0,3$$

или

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 \geq 0,7.$$

Используя множители $\lambda^1 = 1/0,3$ и $\lambda^2 = 1/0,7$, в соответствии с принципом DC, немедленно получаем справедливое неравенство

$$\sum_{j=1}^{3}(\max\{-a_j/0,3, a_j/0,7\})t_j \geq 1, \quad (20)$$

которое представляет собой одно из сечений, предложенных Гомори для задач с непрерывными неотрицательными переменными t_j [5]. В контексте формул с конкретными числовыми данными неравенство (20) преобразуется в неравенство вида

$$3,29t_1 + t_2 + 2,86t_3 \geq 1. \quad (21)$$

Если умножим обе части неравенства (21) на 0,7, то увидим, что оно есть ослабление дробного сечения Гомори:

$$0,3t_1 + 0,7t_2 + 0t_3 \geq 0,7.$$

Однако неравенство (21) справедливо для непрерывных переменных t_j, в то время как в дробном сечении Гомори требуется целочисленность этих переменных.

Для усиления неравенств (20) и (21), когда все переменные t_j неотрицательные и целочисленные, обратимся к метапринципу MCS, чтобы получить сечение

$$\sum_{j=1}^{3}(\inf_{m\in M}\max\{-(a_j + m) / 0,3, (a_j + m) / 0,7\})t_j \geq 1. \tag{20a}$$

Сначала упрощаем сечение (20а) следующим образом. Записываем коэффициент a_j в виде суммы его целой и дробной частей

$$a_j = \lfloor a_j \rfloor + f_j,\ 0 \leq f_j < 1. \tag{22}$$

Для $m \geq -\lfloor a_j \rfloor$ имеем

$$\max\{-(a_j + m) / 0,3, (a_j + m) / 0,7\} = (a_j + m) / 0,7 \geq f_j / 0,7, \tag{23}$$

а для $m \leq -\lfloor a_j \rfloor - 1$ –

$$\max\{-(a_j + m) / 0,3, (a_j + m) / 0,7\} = -(a_j + m) / 0,3 \geq (1 - f_j) / 0,3. \tag{24}$$

Поэтому (20а) эквивалентно неравенству

$$\sum_{j=1}^{3}(\min\{f_j / 0,7, (1 - f_j) / 0,3\})\, t_j \geq 1, \tag{25}$$

которое для конкретных числовых данных становится неравенством вида

$$0,43t_1 + t_2 + 0t_3 \geq 1. \tag{26}$$

Умножая неравенство (26) на 0,7, видим, что оно согласуется с дробным сечением Гомори с точностью до двух десятичных разрядов (сечения фактически тождественны).

Из этого примера ясно, что «простой способ» использования принципа DC и метапринципа MCS есть вопрос искусства, а не прямая процедура. Было бы очень полезно в дополнение к метапринципу MCS иметь другие процедуры усиления сечений, чтобы использовать их в связи с принципом DC. Фактически о процедурах усиления сечений известно очень мало [4].

Следующий пример представлен более подробно и демонстрирует комбинирование принципа DC и метапринципа MCS.

Пример 4 [3]. Предположим, что по крайней мере одна система (6) совместна и что у всех систем имеются нижние границы, т. е. все системы

$$A^h x \geq d^h, x \geq 0 \tag{27}$$

совместны ($d^h, d^h \leq b^h$ – вектор, выбранный надлежащим образом). Наконец, предположим, что x – это целочисленное решение системы.

Положим

$$T = \{(v^1, v^2, \ldots, v^t) \mid v^h \geq d^h\ \forall h \in H,\ v^h \geq b^h\ \exists h \in H\}, \tag{28а}$$

$$M = \{(n_1(b^1 - d^1), n_2(b^2 - d^2), \ldots, n_t(b^t - d^t)) \mid \sum_{h=1}^{t} n_h \geq 0, n_h \in \mathrm{Z}^1 \forall h \in H\}, \tag{28б}$$

где $t = |H|$.

Положим также

$$A = (A^1, A^2, \ldots, A^t)^T \tag{29}$$

(столбец записан в строку).

Тогда имеющаяся информация может быть представлена как

$$Ax \in T. \tag{30}$$

Ослабляем сечение (30) как

$$Ax \in T + M. \tag{31}$$

Теперь заметим, что из формулы (31) следует совместность по крайней мере одной системы (6). Если $n_h = 0\ \forall h \in H$ в (28б), то $Ax \in T$ и по крайней мере одна система (6) имеет место. Если же

$$n_h \neq 0\ \exists n_h \in H,$$

то $n_{h^*} \geq 1$ для по крайней мере одного h^*, и тогда имеет место система

$$(A^{h^*} x \geq b^{h^*}, x \geq 0).$$

Поэтому сечение (31) гарантирует справедливость сечений (7).

Пусть $a^{j,h}$ обозначает j-й столбец матрицы A^h ($j = 1, 2, \ldots, r$; $h = 1, 2, \ldots, t$).

Тогда записываем сечение (7) в виде

$$\sum_{j=1}^{r}(\max_{h\in H}\lambda^h a^{j,h})x_j \geq \min_{h\in H}\lambda^h b^h. \qquad (32)$$

Таким образом, усиленное сечение (16) для сечения (32), рассматриваемого как неравенство (15), есть

$$\sum_{j=1}^{r}\left(\min\left\{\max_{h\in H}\lambda^h(a^{j,h}+n_h(b^h-d^h)) \mid \sum_{h=1}^{t}n_h \geq 0,\right.\right.$$
$$\left.\left. n_h \in Z^1\ \forall h\in H\right\}\right)x_j \geq \min_{h\in H}\lambda^h b^h. \qquad (33)$$

Итак, приведенные примеры показывают, что комбинирование принципа DC и метапринципа MCS – задача нетривиальная и требующая определенного навыка.

Пример алгоритма. В качестве реализации изложенных принципов приведем возможный алгоритм решения задач с логическими ограничениями на линейные неравенства.

Шаг 1. Применяя принцип DC или метапринцип MCS, переходим к упрощенной задаче (или набору упрощенных задач).

Шаг 2. Решаем упрощенную задачу (набор задач).

Шаг 3. Выясняем, что найденное решение дает для исходной задачи.

Шаг 4. Если удовлетворительное решение исходной задачи найдено, процесс вычислений останавливаем, если нет – возвращаемся к шагу 1.

Заключение

В работе представлены различные способы, с помощью которых можно получить дизъюнктивные сечения из логических ограничений на линейные неравенства. Изложен основной принцип дизъюнктивных сечений, а также принцип, позволяющий усилить такие сечения. Благодаря этим принципам, упрощается решение задач оптимизации с большим числом линейных ограничений.

Предложенные принципы и процедуры на их основе являются теоретической базой для построения алгоритмов, предназначенных для программной реализации при решении практических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Rockafellar R.T.** Convex Analysis. USA, New Jersey: Princeton University Press, 1970.

[2] **Jeroslow R.G.** Cutting-plane theory: Disjunctive methods // Annals of Discrete Mathematics. 1977. Vol. 1. Pp. 293–330.

[3] **Jeroslow R.G.** An introduction to the theory of cutting-planes // Annals of Discrete Mathematics. 1979. Vol. 5. Pp. 71–95.

[4] **Balas E.** Disjunctive programming // Annals of Discrete Mathematics. 1979. Vol. 5. Pp. 3–51.

[5] **Хохлюк В.И.** Методы дискретной оптимизации. Учеб. пос. Новосибирск: Изд-во Новосибирского гос. ун-та, 2013. Ч. 1.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ХОХЛЮК Виталий Иванович – *доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.*

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Коптюга, 4

vit@academ.org

Khokhlyuk V.I. PRINCIPLES FOR CONSTRUCTING THE DISJUNCTIVE CUTS.

This article focuses on solving the disjunctive problem. Various methods of constructing the disjunctive cuts (DC) from the logical limitations on the linear inequalities have been presented. A general principle of DC and a principle making possible to strengthen these cuts were stated. By virtue of the stated principles, solving the problems of optimization with a great number of limitations can be simplified. Two theorems were formulated and proved. Four examples illustrated various theoretical statements.

The suggested principles and procedures on their basis provide the theoretical background to the elaboration of algorithms intended for the software implementation in solving the practical problems.

MATHEMATICAL LOGIC, DISJUNCTIVE PROBLEM, CONVEX HULL, CLOSURE OF SET, STRENGTHENING OF CUT.

REFERENCES

[1] **R.T. Rockafellar,** Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[2] **R.G. Jeroslow,** Cutting-plane theory: Disjunctive methods, Annals of Discrete Mathematics. 1 (1977) 293–330.

[3] **R.G. Jeroslow,** An introduction to the theory of cutting-planes, Annals of Discrete Mathematics. 5 (1979) 71–95.

[4] **E. Balas,** Disjunctive programming, Annals of Discrete Mathematics. 5 (1979) 3–51.

[5] **V.I. Khokhlyuk,** Metody diskretnoy optimizatsii [Methods of discrete optimization], ucheb. posobiye. Novosibirsk, Izd-vo Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2013. Ch. 1.

THE AUTHOR

KHOKHLYUK Vitaly I.
Sobolev Institute of Mathematics
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation
vit@academ.org