DOI: 10.5862/JPM.242.12
УДК: 519.213.2:519.217.4

С.В. Березин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПРОЦЕССА, ЗАДАННОГО СИСТЕМОЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе исследуются вопрос аналитичности характеристической функции решения системы стохастических дифференциальных уравнений. Рассматривается важный для приложений случай, когда матрица диффузии не зависит от фазовых координат системы, однако может зависеть от времени. Доказывается, что при некоторых естественных ограничениях на коэффициенты стохастического дифференциального уравнения характеристическая функция его решения является целой по совокупности всех своих аргументов.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ЦЕЛАЯ ФУНКЦИЯ.

Введение

В настоящее время аппарат характеристической функции является одним из основных инструментов исследования случайных процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями. Разработаны как точные [1], так и приближенные [2] методы такого исследования, многие из которых опираются на возможность разложения характеристической функции в степенной ряд. Хорошо известно, что в одномерном случае степенные ряды представляют собой функции, аналитические в кругах на комплексной плоскости [3]. Более того, в специфическом случае характеристических функций эти ряды могут быть продолжены в область, которая получается из круга всевозможными сдвигами вдоль вещественной оси (полосу) [4 – 6]. Аналогичная ситуация имеет место и в многомерном случае, где естественным множеством аналитичности характеристической функции является трубчатая область [7].

В настоящей статье исследуется аналитичность характеристической функции процесса, заданного системой стохастических дифференциальных уравнений. Оказывается, что такая характеристическая функция является аналитической не только в некоторой трубчатой области, но и во всем комплексном пространстве. В частности, отсюда следует конечность смешанных моментов любых порядков для соответствующего процесса.

В работе мы ограничиваемся рассмотрением случая систем стохастических дифференциальных уравнений с матрицей диффузии, которая не зависит от фазовых координат системы, но может зависеть от времени, и произвольным вектором сноса, удовлетворяющим условию не более чем линейного роста. С одной стороны, эта ситуация является более простой для анализа по сравнению с самой общей, но, с другой стороны, достаточно важной для приложений [8, 9].

Некоторый частный случай решаемой в настоящей статье задачи рассмотрен в работе [10]. А именно, в ней доказывается, что характеристическая функция решения системы кусочно-линейных стохастических дифференциальных уравнений является целой. Рассматривается такая система уравнений, вектор сноса которой допускает декомпозицию в виде суммы линейного относительно фазовых координат слагаемого и нелинейной части, имеющей вид релейной нелинейности (sign x) по какой-то одной выбранной координате, причем матрица диффузии считается постоянной. При отбрасывании релейной нелинейности решением соответствующей линейной системы является гауссовский процесс, характеристическая функция которого – целая для каждого фиксированного момента времени. Поскольку релейная нелинейность ограничена во всем пространстве, то решение исходной нелинейной задачи удается оценить через решений линейной, что немедленно приводит к искомой аналитичности с применением результатов из [6].

К сожалению, в общем случае указанная выше декомпозиция невозможна и требуется новый метод оценки решения общей системы стохастических дифференциальных уравнений через решение некоторой более простой, частной системы. В настоящей статье для этих целей используется неравенство Гронуолла (см., например, монографию [11]), которое позволяет прийти к желаемому результату.

Одномерный случай

Сначала мы докажем заявленные утверждения для одномерного случая. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Характеристическая функция* $E(z) = \mathbb{E}[e^{iz\xi}]$ *случайной величины* ξ *является целой в том и только в том случае, когда для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существует* $\mathbb{E}[|\xi|^k] < \infty$ *и выполняется предельное равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|\mathbb{E}[\xi^k]|}{k!}} = 0.$$

Отметим, что в лемме утверждается не только существование аналитического продолжения $E(z)$ на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, но и тот факт, что это продолжение задается прежней формулой $E(z) = \mathbb{E}[e^{iz\xi}]$.

Доказательство этого несложного утверждения приведено в монографии [6, с. 234].

Далее нам потребуется следующее очевидное свойство гауссовской случайной величины.

Лемма 2. *Пусть задана случайная величина* $\xi \sim N(0,\sigma^2)$. *Тогда для любого* $k \in \mathbb{N}$ *выполняется соотношение*

$$\mathbb{E}[|\xi|^k] = \frac{(\sqrt{2}\sigma)^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right), \qquad (1)$$

где $\Gamma(x)$ *– гамма-функция Эйлера.*

Приведем также ряд важных для дальнейшего лемм.

Лемма 3 (неравенство Гронуолла). *Пусть интегрируемая функция* $\alpha(t) \geq 0$, *где* $t \in [t_0, T]$, *удовлетворяет неравенству*

$$\alpha(t) \leq h\int_{t_0}^{t} \alpha(s)\, ds + \beta(t),\ t \in [t_0, T], \qquad (2)$$

где $h \geq 0$ *– некоторая постоянная, а* $\beta(t)$ *– еще одна интегрируемая на* $[t_0, T]$ *функция. Тогда выполняется неравенство*

$$\alpha(t) \leq h\int_{t_0}^{t} e^{h(t-s)}\beta(s)\, ds + \beta(t),\ t \in [t_0, T]. \qquad (3)$$

Доказательство этой леммы можно найти в монографии [11, с. 471].

Лемма 4 (об оценке моментов). *Пусть непрерывный случайный процесс* $X(t)$ *задан при* $t \in [t_0, T]$, *а* $H(t)$ *– некоторая неслучайная функция, интегрируемая с квадратом на* $[t_0, T]$, *причем при некоторых постоянных* $h \geq 0$ *и* $C \geq 0$ *выполняется неравенство*

$$|X(t)| \leq C + h\int_{t_0}^{t} |X(s)|\, ds + \left|\int_{t_0}^{t} H(s)\, dW(s)\right|, \qquad (4)$$

где $W(t)$ *– стандартный винеровский процесс, стартующий из нуля. Тогда для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существует* $\mathbb{E}[|X(t)|^k] < \infty$, *а характеристическая функция* $E(z;t) = \mathbb{E}[e^{izX(t)}]$ *является целой при каждом фиксированном* $t \in [t_0, T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись неравенством Гронуолла (3), из неравенства (4) получим:

$$\begin{aligned} |X(t)| \leq C + \left|\int_{t_0}^{t} H(s)\, dW(s)\right| + \\ + h\int_{t_0}^{t} e^{h(t-s)} \left[C + \left|\int_{t_0}^{s} H(q)\, dW(q)\right|\right] ds. \end{aligned} \qquad (5)$$

Введем для удобства обозначения

$$C_1 = Ce^{h(T-t_0)} \geq 0,\ G(t) = \int_{t_0}^{t} H(s)\, dW(s),$$

$$\tilde{h} = he^{h(T-t_0)} \geq 0,$$

и тогда будем иметь

$$|X(t)| \leq C_1 + |G(t)| + \tilde{h}\int_{t_0}^{t} |G(s)|\, ds. \qquad (6)$$

Хорошо известно, что процесс $G(t)$ является (непрерывным) гауссовским, поэтому из леммы 2 следует, что

$$\mathbb{E}[|G(t)|^k] \leq \frac{(\sqrt{2}\sigma)^k}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right), \qquad (7)$$

где $\sigma^2 = \int_{t_0}^{T} H^2(s)\, ds.$

Далее, из неравенства Гёльдера следует оценка

$$\left(\int_{t_0}^{t} |G(s)|\, ds\right)^k \leq (T - t_0)^{k-1}\int_{t_0}^{t} |G(s)|^k\, ds, \qquad (8)$$

из которой, ввиду соотношения (6) следует существование конечных абсолютных моментов $\mathbb{E}[|X(t)|^k]$, где $k \in \mathbb{N}$.

Возведем левую и правую части неравенства (6) в степень k и перейдем к математическим ожиданиям; после этого, извлекая корень степени k, получим оценку

$$(\mathbb{E}[|X(t)|^k])^{\frac{1}{k}} \leq$$
$$\leq \left(\mathbb{E}\left[\left(C_1 + |G(t)| + \tilde{h}\int_{t_0}^{t} |G(s)|\, ds\right)^k\right]\right)^{\frac{1}{k}}. \qquad (9)$$

Далее используем неравенство Минковского для правой части (9) и с помощью формулы (8) придем к очередной оценке

$$(\mathbb{E}[|X(t)|^k])^{\frac{1}{k}} \leq C_1 + (\mathbb{E}[|G(t)|^k])^{\frac{1}{k}} +$$
$$+ \tilde{\tilde{h}}(T - t_0)^{-\frac{1}{k}}\left(\int_{t_0}^{t} \mathbb{E}[|G(s)|^k]\, ds\right)^{\frac{1}{k}}, \qquad (10)$$

где $\tilde{\tilde{h}} = (T - t_0)\tilde{h} \geq 0.$

Применим неравенство (7) еще раз и введем новое обозначение $h_1 = 1 + \tilde{\tilde{h}} \geq 0$; тогда получим окончательное выражение

$$(\mathbb{E}[|X(t)|^k])^{\frac{1}{k}} \leq C_1 + h_1\sqrt[k]{\frac{(\sqrt{2}\sigma)^k}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}, \qquad (11)$$

из которого с помощью формулы Стирлинга легко получается соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{|\mathbb{E}[X^k(t)]|}{k!}} = 0. \qquad (12)$$

Таким образом, с учетом леммы 1 доказательство закончено. □

Замечание. Фактически было установлено более сильное утверждение, а именно: из неравенства (11) следует, что

$$\sup_{s\in[t_0,T]} \mathbb{E}[|X(s)|^k] < \infty,$$

а также, что сходимость соответствующего ряда Тейлора для целой функции $E(z;t)$ будет равномерной по t на отрезке $[t_0, T]$.

Отметим также, что в книге [12, с. 48] приведена другая оценка для моментов решения стохастического дифференциального уравнения при несколько иных предположениях, однако она недостаточно точна для доказательства аналитичности соответствующей характеристической функции. Напротив, из леммы 4 следует более сильная оценка, которая уже позволяет прийти к желаемому результату.

Перейдем теперь к основному утверждению данного раздела – аналитичности характеристической функции решения стохастического дифференциального уравнения.

Мы будем рассматривать непрерывный случайный процесс $X(t)$, определенный при $t \in [t_0, T]$, который является (вообще говоря, слабым) решением стохастического дифференциального уравнения с коэффициентом диффузии, зависящим только от времени:

$$dX(t) = a(t, X(t))\, dt + H(t)\, dW(t), \quad (13)$$

и с начальным условием $X(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$. Здесь, как обычно, $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, стартующий из нуля; причем мы считаем, что коэффициенты уравнения (13) удовлетворяют условиям

$$\int_{t_0}^{T} H^2(s)\, ds < \infty, \quad |a(t,x)| \leq C(1 + |x|), \quad (14)$$

где $x \in \mathbb{R}$, а $C \geq 0$.

В таких предположениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть случайный процесс $X(t)$, определенный при $t \in [t_0, T]$, является решением стохастического дифференциального уравнения* (13) *с начальным условием $X(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда характеристическая функция $E(z;t) = \mathbb{E}[e^{izX(t)}]$* – это *целая функция аргумента $z \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Запишем уравнение (13) в эквивалентной интегральной форме:

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s, X(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} H(s)\, dW(s). \quad (15)$$

Оценим правую часть этого равенства по модулю и используем второе из условий (14); получим следующее неравенство:

$$|X(t)| \le \tilde{C} + h\int_{t_0}^{t} |X(s)|\, ds + \left|\int_{t_0}^{t} H(s)\, dW(s)\right|,$$

где $\tilde{C} = |x_0| + C\,(T - t_0) \ge 0$.

Последнее в силу леммы 4 и завершает доказательство теоремы. □

Многомерный случай

В случае систем стохастических дифференциальных уравнений наибольший интерес представляет исследование аналитичности характеристической функции по всей совокупности ее аргументов. Начнем с получения удобного достаточного условия такой аналитичности, а затем используем его для установления основного для данной секции результата – аналитичности характеристической функции решения системы стохастических дифференциальных уравнения во всем комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$.

Прежде всего введем удобные обозначения: определим мультииндекс равенством $\mathbf{k} = (k_1, ..., k_n)$, где $k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ для $j = 1, ..., n$, а сумму элементов этого мультииндекса будем обозначать через $|\mathbf{k}| = k_1 + \ldots + k_n$. Для сокращения записи будем также применять краткую нотацию

$$\mathbf{k}! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!, \quad \xi^{\mathbf{k}} = \xi_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{k_n},$$

$$|\xi|^{\mathbf{k}} = |\xi_1|^{k_1} \cdot \ldots \cdot |\xi_n|^{k_n},$$

а для евклидовой нормы вектора $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n$ будет использоваться обозначение $\|\xi\| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$.

Далее, имеет место следующее простое достаточное условие аналитичности характеристической функции $E(z)$ во всем комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$.

Лемма 5. *Пусть ξ – случайный вектор в $\mathbb{R}^n$ такой, что для любого $l \in \mathbb{N}$ существует $\mathbb{E}[\|\xi\|^l] < \infty$, причем*

$$\lim_{l\to\infty} \sqrt[l]{\frac{\mathbb{E}[\|\xi\|^l]}{l!}} = 0. \quad (16)$$

Тогда характеристическая функция

$$E(z) = \mathbb{E}[e^{iz^T\xi}],$$

где $z = (z_1, ..., z_n)^T$, является целой функцией в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$.

Отметим, что в лемме утверждается не только существование аналитического продолжения $E(z)$ во все комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, но и то, что это продолжение задается прежней формулой $E(z) = \mathbb{E}[e^{iz^T\xi}]$.

Доказательство. Из очевидного неравенства $|\xi|^{\mathbf{k}} \le \|\xi\|^{|\mathbf{k}|}$ следует существование конечных смешанных моментов $\mathbb{E}[|\xi|^{\mathbf{k}}]$ любого порядка. Поэтому можно записать цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\sum_{|\mathbf{k}|=l} \mathbb{E}[|\xi|^{\mathbf{k}}]\frac{|y|^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} &\le \sum_{|\mathbf{k}|=l} \mathbb{E}[|\xi|^{\mathbf{k}}]\frac{|y|^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} = \\ = \frac{\mathbb{E}\left[\|\xi\|^l\right]}{l!}(|y_1| + \ldots + |y_n|)^l &\leqslant \frac{\mathbb{E}\left[\|\xi\|^l\right]}{l!}(n\|y\|)^l\end{aligned} \quad (17)$$

при любых $l = 0, 1, \ldots$, где символ $\sum\limits_{|\mathbf{k}|=l}$ обозначает суммирование по всем мультииндексам $\mathbf{k}$ таким, что $|\mathbf{k}| = l$.

Условие (16) гарантирует, что радиус сходимости ряда

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\|\xi\|^l\right]}{l!}(n\|y\|)^l \quad (18)$$

является бесконечным (согласно формуле Адамара [3]). Другими словами, для любого $\rho > 0$ ряд (18) сходится равномерно на замкнутом шаре $\bar{B}_\rho = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leqslant \rho\}$, а значит имеет место равномерная сходимость и для ряда

$$\sum_{\mathbf{k}} \mathbb{E}\left[|\xi|^{\mathbf{k}}\right]\frac{|y|^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{|\mathbf{k}|=l} \mathbb{E}\left[|\xi|^{\mathbf{k}}\right]\frac{|y|^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!}, \quad (19)$$

где символ $\sum\limits_{\mathbf{k}}$ обозначает суммирование теперь уже по всевозможным мультииндексам $\mathbf{k}$.

Далее рассмотрим еще одну цепочку неравенств:

$$\sum_{\mathbf{k}} \mathbb{E}\left[|\xi|^{\mathbf{k}}\right] \frac{|y|^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} \geq \sum_{\mathbf{k}} \int_{-A}^{A} \ldots \int_{-A}^{A} |x|^{\mathbf{k}}\, dF_{\xi}(x)\, \frac{|y|^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} =$$

$$= \int_{-A}^{A} \ldots \int_{-A}^{A} e^{|x_1 y_1|+\ldots+|x_n y_n|} dF_{\xi}(x_1, \ldots, x_n) \geq \qquad (20)$$

$$\geq \int_{-A}^{A} \ldots \int_{-A}^{A} \left| e^{iz^T x} \right| dF_{\xi}(x),$$

где совместная функция распределения системы компонент случайного вектора ξ обозначена через

$$F_{\xi}(x) = F_{\xi}(x_1, \ldots, x_n),$$

а $z = u + iy \in \mathbb{C}^n$ обозначает некоторый комплексный вектор, причем здесь $u \in \mathbb{R}^n$.

При выводе неравенства (20) была произведена перестановка суммирования и интегрирования, законность которой следует из известной теоремы о монотонной сходимости, принадлежащей Б. Леви [13]. Для всех z, принадлежащих замыканию $\overline{G}_{\rho}$ трубчатой области $G_{\rho} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|\mathrm{Im}\, z\| < \rho\}$, из полученных неравенств сразу же следует существование и конечность интеграла в правой части равенства

$$E(z) = \mathbb{E}[e^{iz^T \xi}] = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz^T x} dF_{\xi}(x). \qquad (21)$$

Если теперь обратить внимание на то, что сходимость этого интеграла является равномерной на $\overline{G}_{\rho}$, то по хорошо известной теореме Вейерштрасса [3] получим аналитичность предельной функции $E(z)$ в G_{ρ}. А в силу произвольности ρ, аналитичность будет иметь место и во всем комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$.

Итак, установлено, что $E(z)$ является целой функцией в $\mathbb{C}^n$, что и завершает доказательство. □

Пусть теперь задан нормальный центрированный случайный вектор ξ с корреляционной матрицей $K = \{K_{j,l}\}_{j,l=1}^{n}$, норму Фробениуса которой будем обозначать через

$$\|K\|_F = \sqrt{\sum_{j,l=1}^{n} K_{j,l}^2}.$$

В такой ситуации имеет место следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть задан случайный вектор $\xi \sim N(0, K)$, тогда для любого $l \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\mathbb{E}\left[\|\xi\|^l\right] \leq C \frac{(\sqrt{2}\sigma)^l}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{l+n}{2}\right), \qquad (22)$$

где $\sigma = \sqrt{\|K\|_F} \geq 0$, а $C \geq 0$ — некоторая константа, не зависящая от l.

Доказательство. Подберем такую ортогональную матрицу A, чтобы новый случайный гауссовский центрированный вектор $\tilde{\xi} = A\xi$ имел некоррелированные компоненты. Тогда получим, что корреляционная матрица случайного вектора $\tilde{\xi}$ будет иметь диагональный вид

$$K_{\tilde{\xi}} = \mathbb{E}[\tilde{\xi}\tilde{\xi}^T] = AKA^T =$$

$$= \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_v, 0, \ldots, 0\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что именно первые $v \leq n$ диагональных элементов этой матрицы отличны от нуля. Легко понять, что

$$\|K\|_F = \left\|K_{\tilde{\xi}}\right\|_F = \sqrt{\sum_{l=0}^{v} \lambda_l^2},$$

а также, что $\|\tilde{\xi}\| = \|\xi\|$.

Производя явное вычисление $\mathbb{E}\left[\|\tilde{\xi}\|^l\right]$, получим равенство

$$\mathbb{E}\left[\|\tilde{\xi}\|^l\right] = \frac{1}{(2\pi)^{v/2}} \int_{\mathbb{R}^v} (\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_v x_v^2)^{\frac{l}{2}} \times$$
$$\times\, e^{-\frac{x_1^2}{2} - \ldots - \frac{x_v^2}{2}} dx_1 \ldots dx_v, \qquad (23)$$

причем очевидно, что последний интеграл конечен. Из этого равенства без труда выводим, что

$$\mathbb{E}\left[\|\tilde{\xi}\|^l\right] \leq \frac{\sigma^l}{(2\pi)^{v/2}} \int_{\mathbb{R}^v} (x_1^2 + \ldots + x_v^2)^{\frac{l}{2}} \times$$
$$\times\, e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_v^2)} dx_1 \ldots dx_v, \qquad (24)$$

где $\sigma = \sqrt{\| K_F \|}$.

Вычислим последний интеграл путем перехода к многомерным сферическим координатам, в результате чего получим неравенство

$$\mathbb{E}\left[\|\xi\|^l\right] \le C\frac{(\sqrt{2}\sigma)^l}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{l+n}{2}\right), \qquad (25)$$

где $C \ge 0$ – некоторая константа, не зависящая от l, что и завершает доказательство леммы. □

Леммы, доказанные выше, позволяют без напряжения установить аналитичность характеристической функции и в многомерном случае. Действительно, рассмотрим непрерывный векторный случайный процесс $X(t)$, определенный при $t \in [t_0, T]$, который является (вообще говоря, слабым) решением системы стохастических дифференциальных уравнений (векторного стохастического дифференциального уравнения)

$$dX(t) = a(t, X(t))\,dt + H(t)\,dW(t), \quad (26)$$

с детерминированным начальным условием $X(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, где $W(t)$ – теперь уже вектор, составленный из n независимых стандартных винеровских процессов, стартующих из нуля.

Предполагается, что коэффициенты уравнения (26) удовлетворяют следующим условиям:

$$\int_{t_0}^{T} \|H(s)\|_F^2\,ds < \infty, \ \ \|a(t,x)\| \le C(1+\|x\|), \ (27)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а $C > 0$.

Сформулируем окончательно основное утверждение настоящего раздела.

Теорема 2. *Пусть случайный векторный процесс* $X(t)$, *определенный при* $t \in [t_0, T]$, *есть решение векторного стохастического дифференциального уравнения* (26) *с детерминированным начальным условием* $X(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Тогда характеристическая функция*

$$E(z;t) = \mathbb{E}[e^{iz^T X(t)}]$$

является целой функцией векторного аргумента $z \in \mathbb{C}^n$.

Доказательство. Заметим вначале, что

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} H(s)\,dW(s)$$

есть центрированный многомерный гауссовский процесс с корреляционной матрицей

$$K(t) = \int_{t_0}^{t} H(s)\,H^T(s)\,ds.$$

С помощью обобщенного неравенства Минковского легко получить оценку для ее нормы Фробениуса:

$$\|K(t)\|_F \le \int_{t_0}^{t} \|H(s)H^T(s)\|_F\,ds \le \int_{t_0}^{T} \|H(s)\|_F^2\,ds.$$

Далее повторяем все выкладки из доказательств теоремы 1 и леммы 4 с учетом замены модуля на норму вектора и пользуемся леммами 6 и 5. Таким образом мы придем к необходимому утверждению. □

Замечание. Обратим внимание, что в условии теоремы 2 матрица диффузии может вырождаться, что довольно часто возникает в приложениях.

Заключение

Доказанное в работе свойство аналитичности характеристической функции процесса, заданного системой стохастических дифференциальных уравнений, часто используется на практике (см. статью [1] и другие работы того же автора), однако строгое обоснование того, что оно имеет место, до сих пор было известно только для довольно частных случаев систем.

Приведенный в настоящей статье метод доказательства аналитичности характеристической функции также допускает обобщение и на более широкий класс уравнений. В частности, при внимательном анализе видно, что по существу в доказательствах использовалась аналитичность в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ характеристической функции процесса – решения системы уравнений (26) при $a(x;t) = 0$.

В нашем рассмотрении такой процесс был гауссовским, но аналогичные результаты можно получить и для более общих стохастических дифференциальных уравнений где, например, роль процесса с независимыми приращениями выполняет центрированный (компенсированный) пуассоновский процесс, характеристическая функция которого – также целая.

Благодарности

Автор считает своим долгом поблагодарить кандидата физико-математических наук, доцента кафедры прикладной математики СПбПУ О.И. Зайца, а также доктора физико-математических наук, профессора кафедры теории вероятностей и математической статистики СПбГУ М.А. Лифшица за внимательное изучение текста статьи и ряд ценных замечаний, которые способствовали ее улучшению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Заяц О.И.** Применение уравнения Пугачева – Свешникова к исследованию кусочно-линейных стохастических систем, линейных в полупространствах // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2013. № 4-1 (182). С. 128–142.

[2] **Пугачёв В.С., Синицын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990. 632 с.

[3] **Шабат Б.В.** Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969. 576 с.

[4] **Kawata T.** Fourier analysis in probability theory. Academic Press, 1972. 668 p.

[5] **Рамачандран Б.** Теория характеристических функций. М.: Наука, 1975. 224 с.

[6] **Лукач Е.** Характеристические функции. М.: Наука, 1979. 264 с.

[7] **Линник Ю.В., Островский И.В.** Разложения случайных величин и векторов. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1972. 480 с.

[8] **Manohar C.** Methods of nonlinear random vibration analysis // Sadhana. 1995. Vol. 20. No. 2. Pp. 345–371.

[9] **Ibrahim R.** Recent results in random vibrations of nonlinear mechanical systems // ASME. J. Mech. Des. 1995. Vol. 117(B). No. 2. Pp. 222–233.

[10] **Заяц О.И.** Об аналитических свойствах решения уравнения В.С. Пугачёва в форме А.А. Свешникова. Деп. в ВИНИТИ 30.06.1987, №7461-В87. С. 1–16. 1987.

[11] **Гихман И.И., Скороход А.В.** Введение в теорию случайных процессов. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 568 с.

[12] **Гихман И.И., Скороход А.В.** Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова Думка, 1968. 356 с.

[13] **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

БЕРЕЗИН Сергей Васильевич – *старший научный сотрудник лаборатории виртуально-имитационного моделирования института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

servberezin@yandex.ru

Berezin S.V. ON ANALYTIC CHARACTERISTIC FUNCTIONS AND PROCESSES GOVERNED BY SDEs.

We study analyticity of the characteristic function of a process defined by means of SDEs. Namely, starting with the simple case of a scalar Ito SDE we show that the corresponding characteristic function is entire. The proof is based on the Gröenwall's inequality technique and the classic analyticity criterion in terms of moments. Further, we extend this criterion and derive a handy sufficient condition of analyticity in the multidimensional case. This condition is used to prove the corresponding general result of analyticity. We assume that the drift vector obeys the linear growth condition, and the diffusion matrix is time-only-dependent, but possibly degenerate. The approach used in the article can be extended to more general types of SDEs.

STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION, COMPLEX ANALYTIC FUNCTION, HOLOMORPHIC FUNCTION, MULTIVARIATE HOLOMORPHIC FUNCTION.

REFERENCES

[1] **O.I. Zayats**, Analysis of piecewise linear stochastic systems in half-spaces by means of the Pugachev–Sveshnikov equation, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 4(182)-1 (2013) 129–142.

[2] **V.S. Pugachev, I.N. Sinitsyn**, Stochastic

differential systems. Analysis and filtering, Chechester, 1987.

[3] **B.V. Shabat**, Vvedeniye v kompleksnyy analiz [Introduction to complex analysis] (in Russian). M.: Nauka, 1969.

[4] **T. Kawata**, Fourier analysis in probability theory. Academic Press, 1972.

[5] **B. Ramachandran**, Teoriya kharakteristicheskikh funktsiy [The characteristic functions theory] (in Russian). M.: Nauka, 1975.

[6] **E. Lukach**, Kharakteristicheskiye funktsii [Characteristic functions] (in Russian). M.: Nauka, 1979.

[7] **Yu.V. Linnik, I.V. Ostrovskiy**, Razlozheniya sluchaynykh velichin i vektorov [Decomposition of random variables and vectors] (in Russian). Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika. M.: Nauka, 1972.

[8] **C. Manohar**, Methods of nonlinear random vibration analysis, Sadhana. 20(2) (1995) 345–371.

[9] **R. Ibrahim**, Recent results in random vibrations of nonlinear mechanical systems. ASME, J. Mech. Des. 117(B) (2) (1995) 222–233.

[10] **O.I. Zayats**, Ob analiticheskikh svoystvakh resheniya uravneniya V.S. Pugacheva v forme A.A. Sveshnikova [On analytic properties of the Pugachev–Sveshnikov equation solution] (in Russian). Dep. v VINITI 30.06.1987, №7461-B87. Pp. 1–16. 1987.

[11] **I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod**, Vvedeniye v teoriyu sluchaynykh protsessov [Introduction to stochastic processes] (in Russian). 2th izd. M.: Nauka, 1977.

[12] **I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod**, Stokhasticheskiye differentsialnyye uravneniya [Stochastic differential equations] (in Russian). Kiyev: Naukova Dumka, 1968.

[13] **A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin**, Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza [Elements of the functions theory and of the functional analysis] (in Russian). M.: Nauka, 1972.

THE AUTHOR

BEREZIN Sergey V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politekhnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
servberezin@yandex.ru