

ВЛИЯНИЕ ВЫБОРА КРИТЕРИЯ МАРКИРОВКИ НА РАБОТУ АДАПТИВНОГО АЛГОРИТМА С АПОСТЕРИОРНЫМ КОНТРОЛЕМ ТОЧНОСТИ

Исследуется влияние выбора критерия маркировки элементов на результат работы адаптивных алгоритмов с апостериорным контролем точности на основе функциональной мажоранты погрешности для плоских задач линейной теории упругости. Реализована мажоранта без ограничения симметрии на свободный тензор, для вычисления которой применяются аппроксимации Равьяра–Тома нулевого порядка. Рассмотрены четыре наиболее широко используемых критерия отбора элементов для их последующего разбиения. Представлены численные результаты для задач плоской деформации, в том числе с различными материалами и геометрией. Проведен подробный анализ результатов.

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ, ЛИНЕЙНАЯ УПРУГОСТЬ, АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ, АППРОКСИМАЦИЯ РАВЬЯРА–ТОМА.

Введение

В статье рассматриваются функциональные апостериорные оценки погрешности для двумерных задач линейной теории упругости. Впервые такие оценки были численно исследованы в работе [1]. В основе их вывода изначально лежали соотношения теории двойственности вариационного исчисления; такой метод был предложен в статье [2]. Позднее в монографии [3] те же оценки были получены с помощью преобразования интегральных тождеств. В статье [1] также были рассмотрены частные случаи оценки для ряда двумерных задач: плоской деформации, плоского напряженного состояния и осесимметричной.

В литературе имеются два типа функциональных мажорант погрешности для указанных задач: с явным и неявным учетом симметрии входящего в оценку свободного тензора. Оценка второго типа позволяет использовать специальные конечные

элементы, разработанные для смешанных методов. Такой подход был впервые предложен и реализован в работе [4].

Численные исследования функционального подхода для плоских задач линейной теории упругости проводились несколькими авторами. В работе [1], например, приводятся два примера решения задач плоской деформации с адаптацией расчетной сетки в областях сложной формы; при этом используется «симметричная» оценка и, соответственно, непрерывная кусочно-линейная аппроксимация метода конечных элементов. Результаты показали рост индекса эффективности оценки (отношение мажоранты погрешности к оцениваемой норме, оптимальное значение индекса – единица). Как было показано в работе [4], для четырехугольных конечноэлементных сеток переоценка погрешности возрастает: для некоторых задач индекс эффективности примерно на порядок превышает оптимальное значение на сетке, содержащей

всего несколько тысяч узлов. В работах [4, 5] для вычисления функциональных мажорант на вложенных четырехугольных сетках без адаптации применялись аппроксимация Равьяра–Тома нулевого порядка и аппроксимация Арнольда – Боффи – Фалка с двумя дополнительными степенями свободы на каждом элементе. Помимо этого, в работе [6] были исследованы основные теоретические свойства и аспекты практической реализации для обоих типов функциональных апостериорных оценок, а также приведены численные результаты работы адаптивных алгоритмов решения задач плоской деформации. Сформулированы и доказаны теоремы о вычислительных свойствах оценок и соответствующих индикаторов погрешности.

Целью данного исследования является проведение сравнительного анализа различных методов отбора элементов для разбиения (маркировка элементов) и их влияния на результат работы алгоритма адаптации расчетной сетки (адаптивного алгоритма). Тем самым данное исследование продолжает работу [6] и берет за основу некоторые идеи монографии [7].

Постановка задачи

Плоская задача линейной теории упругости в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей Γ , непрерывной по Липшицу и состоящей из двух непересекающихся частей Γ_1 и Γ_2 , имеет вид

$$\begin{cases} \sigma = L\varepsilon(u) & \text{в } \Omega, \\ \text{Div}\sigma + f = 0 & \text{в } \Omega, \\ u = u_0 & \text{на } \Gamma_1, \\ \sigma n = F & \text{на } \Gamma_2, \end{cases} \quad (1)$$

где Div – тензорная дивергенция.

Неизвестным является векторное поле перемещений $u(x_1, x_2)$, через которое выражаются тензор деформаций

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$$

и тензор напряжений σ .

Вектор объемных сил

$$f \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^2) = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega),$$

нормальные напряжения $F \in L_2(\Gamma_2, \mathbb{R}^2)$ на

части границы Γ_2 , а также перемещения $u_0 \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ на Γ_1 заданы. Пространство Лебега L_2 – это пространство функций, суммируемых с квадратом. Пространство Соболева W_2^1 – пространство функций из L_2 , первые обобщенные производные которых также принадлежат L_2 . Вектор n – единичная нормаль к Γ_2 , L – тензор упругих констант. Предполагается, что для коэффициентов тензора L существуют положительные константы λ_1 и λ_2 , такие что

$$\lambda_1^2 |\varepsilon|^2 \leq L\varepsilon : \varepsilon \leq \lambda_2^2 |\varepsilon|^2 \quad (2)$$

для любого тензора $\varepsilon \in M_{sym}^{2 \times 2}$, где $M_{sym}^{2 \times 2}$ – пространство симметричных тензоров второго ранга размерности два. Также предполагается, что выполнено условие симметрии

$$L_{ijkm} = L_{jikm} = L_{kmij}, \quad L_{ijkm} \in L_\infty(\Omega), \\ i, j, k, m = 1, 2,$$

где пространство Лебега $L_\infty(\Omega)$ состоит из функций, ограниченных почти всюду в Ω .

Решение задачи (1) ищется в обобщенном смысле:

Найти функцию u из $V = u_0 + V_\sigma$, где $V_0 = \{w \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid w = 0 \text{ на } \Gamma_1\}$, удовлетворяющую интегральному соотношению

$$\int_\Omega L\varepsilon(u) : \varepsilon(w) d\Omega = \int_\Omega f \cdot w d\Omega + \int_{\Gamma_2} F \cdot w d\Gamma \quad (3)$$

для любого $w \in V_0$.

Пусть $v \in V$ – некоторое приближенное решение задачи (3). Для контроля точности решения v необходимо иметь верхнюю оценку энергетической нормы

$$\| \| u - v \| \| := \left(\int_\Omega L\varepsilon(u - v) : \varepsilon(u - v) d\Omega \right)^{1/2}.$$

Для задачи (1) в работе [1] была получена функциональная мажоранта погрешности:

$$\| \| u - v \| \| \leq C(\| \text{Div}\tau + f \|_\Omega^2 + \| \tau n - F \|_{\Gamma_2}^2)^{1/2} + \\ + \| \| \tau_{sm} - L\varepsilon(v) \| \|_* + \frac{C_{\Omega\Gamma_1}}{\lambda_1} \| \| \tau_{sk} \|_\Omega, \quad (4)$$

где $\| \dots \|_\Omega$ и $\| \dots \|_{\Gamma_2}$ – нормы в L_2 ; τ – произвольный тензор из Гильбертова пространства

$$H = \left\{ \begin{array}{l} \tau \in L_2(\Omega, M^{2 \times 2}) \mid \\ \operatorname{Div} \tau \in L_2(\Omega, R^2), \\ \tau n \in L_2(\Gamma_2, R^2) \end{array} \right\};$$

τ_{sm}, τ_{sk} – симметричная и кососимметричная части тензора τ , соответственно; $C_{\Omega \Gamma_1}$ – константа из неравенства Корна, которую можно оценить численно.

Вспомогательная норма в мажоранте вычисляется по формуле

$$\|\tau\|_* = \left(\int_{\Omega} L^{-1} \tau : \tau dx \right)^{1/2}.$$

Константа C должна удовлетворять неравенству

$$\int_{\Omega} |w|^2 d\Omega + \int_{\Gamma_2} |w|^2 d\Gamma \leq C^2 \|\tau\|_*^2$$

для любого $w \in V_0$.

Применив дважды к мажоранте (4) неравенство Коши с параметром, можно получить более удобную для вычислений квадратичную структуру мажоранты:

$$\begin{aligned} \|\tau - v\|_*^2 &\leq M^2(v, \tau, \beta_1, \beta_2) := \\ &:= (1 + \beta_1) \|\tau_{sm} - L\varepsilon(v)\|_*^2 + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) (1 + \beta_2) C^2 \|\operatorname{Div} \tau + f\|_{\Omega}^2 + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) (1 + \beta_2) C^2 \|\tau n - F\|_{\Gamma_2}^2 + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) \left(1 + \frac{1}{\beta_2}\right) \left(\frac{C_{\Omega \Gamma_1}}{\lambda_1}\right)^2 \|\tau_{sk}\|_{\Omega}^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ – произвольные параметры.

Формулы для оптимальных значений β_1 и β_2 при фиксированном τ и константы C приведены в работе [6].

Важно отметить, что мажоранта в неравенстве (5) является точной, так как при подстановке в нее $\tau = \sigma$ и $\beta_1 = 0$ достигается равенство правой и левой части.

В данной работе функциональная мажоранта (5) реализована в предположении об изотропной линейной упругости: тензор упругих констант L зависит от двух параметров материала – модуля Юнга E и

коэффициента Пуассона ν .

Для того чтобы вычислить мажоранту $M(v, \tau, \beta_1, \beta_2)$, необходимо выбрать тип аппроксимации для тензорного поля τ . Используя положительный опыт исследований [4–6], применим аппроксимацию Равьяра – Тома нулевого порядка. В качестве индикатора погрешности для приближенного решения $v = u_h$, полученного на конечноэлементной сетке с характерным размером h , используется первое слагаемое мажоранты на каждом элементе сетки T :

$$\eta_T = \left(\int_T (L^{-1} \tau - \varepsilon(u_h)) : (\tau - L\varepsilon(u_h)) dT \right)^{1/2}.$$

Далее индикатор, основанный на мажоранте, будем обозначать как η_T^{RT} , поскольку при его вычислении используется аппроксимация Равьяра – Тома.

Для оценки качества адаптивных сеток используется «эталонный» индикатор

$$\eta_T^{ref} = \left(\int_T L\varepsilon(u_{ref} - u_h) : \varepsilon(u_{ref} - u_h) dT \right)^{1/2},$$

где u_{ref} – «эталонное» решение (reference solution). В данном качестве выбиралось приближенное решение, полученное на сетке с характерным размером $h/4$; сетка была получена из исходной равномерным разбиением элементов.

С помощью эталонного решения также вычисляется относительная погрешность

$$e = \frac{\|u_h - u_{ref}\|}{\|u_{ref}\|} \cdot 100\%$$

и индекс эффективности мажоранты

$$I_{eff} = \frac{M(u_h, \tau, \beta_1, \beta_2)}{\|u_h - u_{ref}\|},$$

которые используются для контроля качества оценок, получаемых в ходе исследования.

Способы маркировки элементов

При адаптации расчетной сетки необходимо выбрать критерий отбора элементов для разбиения на каждом шаге алгоритма (см., например, монографию [8] и книгу

[9]). С математической точки зрения его можно представить в виде оператора $m(\eta_T)$, переводящего массив значений индикатора погрешности в массив нулей и единиц (0 – элемент не разбивается, 1 – элемент разбивается). Будем называть такой оператор маркером. Использование различных маркеров приводит к различным последовательностям сеток, поэтому итоговые адаптивные сетки могут существенно отличаться. Для сравнительного анализа было выбрано четыре наиболее широко используемых маркера.

1. Маркер $m_1(\eta_T)$ по максимальному значению: разбиваются все элементы, для которых

$$\eta_T > \alpha \max_{i=1..N_i}(\eta_{T_i}),$$

где N_i – число элементов сетки; $\alpha \in (0;1)$ – константа, обычно полагаемая равной 0,5.

2. Маркер $m_2(\eta_T)$ по среднему значению: разбиваются все элементы, для которых

$$\eta_T > \left(\sum_{i=1}^{N_i} \eta_{T_i} \right) / N_i.$$

3. Маркер $m_3(\eta_T)$ дает разбиение заданного количества элементов с наибольшей ошибкой, для чего необходима сортировка элементов по убыванию значения индикатора.

4. Маркер $m_4(\eta_T)$, или «массовый критерий» (bulk criterion): разбиваются первые

k элементов с наибольшей ошибкой, для которых

$$\sum_{i=1}^k \eta_{T_i} \geq \alpha \sum_{i=1}^{N_i} \eta_{T_i} > \sum_{i=1}^{k-1} \eta_{T_i},$$

где $\alpha \in (0;1)$ – некоторая константа. Для этого маркера также необходима сортировка элементов по убыванию значения индикатора.

Для сравнения различных маркеров в монографии [7] было предложено вычислять «точность маркера»:

$$\mu = \left(1 - \frac{\|m(\eta_T) - m(\eta_T^{ref})\|_1}{N_i} \right) \cdot 100 \%,$$

где $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ – первая норма вектора.

Величина μ позволяет оценить, насколько близко друг к другу количество и расположение отобранных с заданным маркером элементов при использовании индикатора η_T и эталонного индикатора η_T^{ref} .

Примеры работы адаптивных алгоритмов

Рассмотрим несколько примеров, демонстрирующих работу адаптивных алгоритмов с различными маркерами для решения задач плоской деформации, и проанализируем, насколько функциональный подход устойчив к смене критерия маркировки. Во всех случаях адаптация начинается с равномерной сетки с относительно небольшим количеством узлов и заканчивается при до-

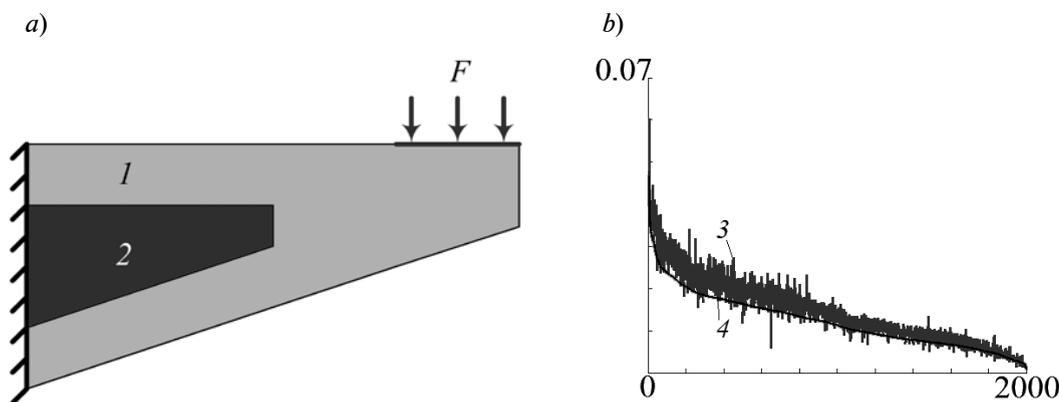


Рис. 1. Нагруженная конструкция (расчетная область) с различными параметрами материала (а) и соответствующий график значений индикаторов погрешности η^{RT} (3) и η^{ref} (4) в зависимости от номера элемента (b). Материалы: бетон (1) и сталь (2).

Иллюстрируется пример 1



стижении заданного уровня относительной погрешности ϵ , равного 3 – 4 %.

Пример 1. Рассмотрим некоторую конструкцию, расчетная область для которой представлена на рис. 1, *a*; она состоит из двух частей с различными параметрами

материала:

бетон	$E = 30$ ГПа,	$\nu = 0,2$;
сталь.....	$E = 210$ ГПа,	$\nu = 0,3$.

Конструкция закреплена по левому краю, на часть верхней границы приложена

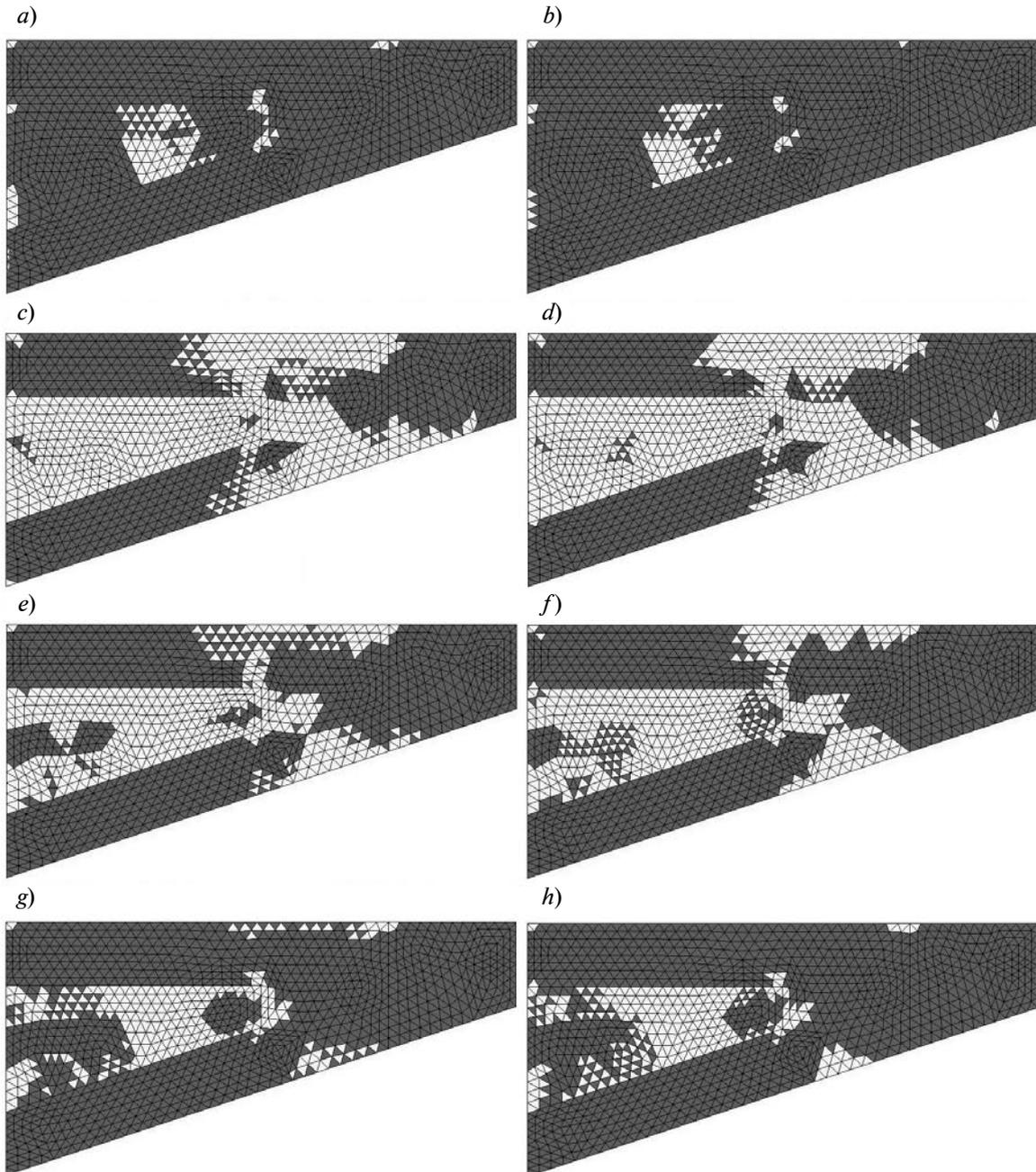


Рис. 2. Элементы области (см. рис. 1, *a*), отобранные для разбиения (обозначены светлым) с помощью различных маркеров: $m_1(\eta_T^{ref})$ (*a*), $m_1(\eta_T^{RT})$ (*b*); $m_2(\eta_T^{ref})$ (*c*), $m_2(\eta_T^{RT})$ (*d*); $m_3(\eta_T^{ref})$ (*e*), $m_3(\eta_T^{RT})$ (*f*); $m_4(\eta_T^{ref})$ (*g*), $m_4(\eta_T^{RT})$ (*h*).
Иллюстрируется пример 1

распределенная нагрузка $F = 10^8 \text{ Н/м}^2$.

На рис. 1, *b* представлен график распределения значений индикаторов погрешности η^{ref} и η^{RT} на равномерной сетке, состоящей из 2000 элементов. Номера элементов по оси абсцисс отсортированы по убыванию величины эталонного индикатора. График демонстрирует, что индикатор, основанный на мажоранте, воспроизводит основные особенности распределения ошибки в области.

На рис. 2 представлена равномерная сетка с элементами, отобранными для разбиения с помощью четырех описанных ранее маркеров, вычисленных по индикатору η^{RT} . Для оценки правильности отбора элементов приводятся аналогичные графики, построенные для эталонного индикатора. Для маркера m_3 здесь и далее используется разбиение 30 % элементов с максимальной ошибкой; для маркера m_4 было выбрано значение параметра $\alpha = 0,3$.

Точность маркеров на равномерной

сетке приведена во втором столбце таблицы. На рис. 3 представлены узлы адаптивных сеток, получившихся на финальном шаге работы алгоритмов (адаптация начиналась с равномерной сетки с 282 узлами). Для сравнения качества сеток была построена «эталонная сетка» с помощью индикатора η^{ref} . На каждом шаге алгоритма адаптации разбивалось 25 элементов с наибольшей ошибкой. Для достижения желаемой погрешности $e \leq 3 \%$ на эталонной сетке понадобилось 105 шагов адаптации. Данная процедура была использована исключительно для вычислительного эксперимента, поскольку в реальных расчетах она слишком трудозатратна.

Количество узлов сетки N_n , относительная погрешность e и индекс эффективности мажоранты I_{eff} для каждого маркера на финальных адаптивных сетках представлены в таблице, где за N_s обозначено число шагов адаптивного алгоритма, критерий остановки $e \leq 3 \%$.

Таблица

Результаты работы адаптивных алгоритмов

Маркер	$\mu, \%$	N_s	N_n	$e, \%$	I_{eff}
<i>Пример 1 (эталонная сетка содержит 10334 узла, $e = 3,00 \%$)</i>					
m_1	97,85	8	12204	2,83	1,43
m_2	97,70	6	30007	1,89	1,43
m_3	92,80	6	12277	2,86	1,43
m_4	93,40	9	16880	2,47	1,43
<i>Пример 2 (эталонная сетка содержит 6039 узлов, $e = 3,00 \%$)</i>					
m_1	99,79	9	10670	2,83	1,37
m_2	77,50	5	22205	1,02	1,41
m_3	88,75	5	12420	2,76	1,37
m_4	86,25	8	13701	2,47	1,40
<i>Пример 3 (эталонная сетка содержит 10430 узлов, $e = 3,99 \%$)</i>					
m_1	99,57	15	14499	3,54	1,65
m_2	91,28	6	41566	3,95	1,95
m_3	79,65	6	36096	4,00	1,94
m_4	79,65	8	15493	3,77	1,76

Обозначения: μ – точность маркера; N_s – число шагов адаптивного алгоритма; N_n – количество узлов сетки; e – относительная погрешность; I_{eff} – индекс эффективности мажоранты

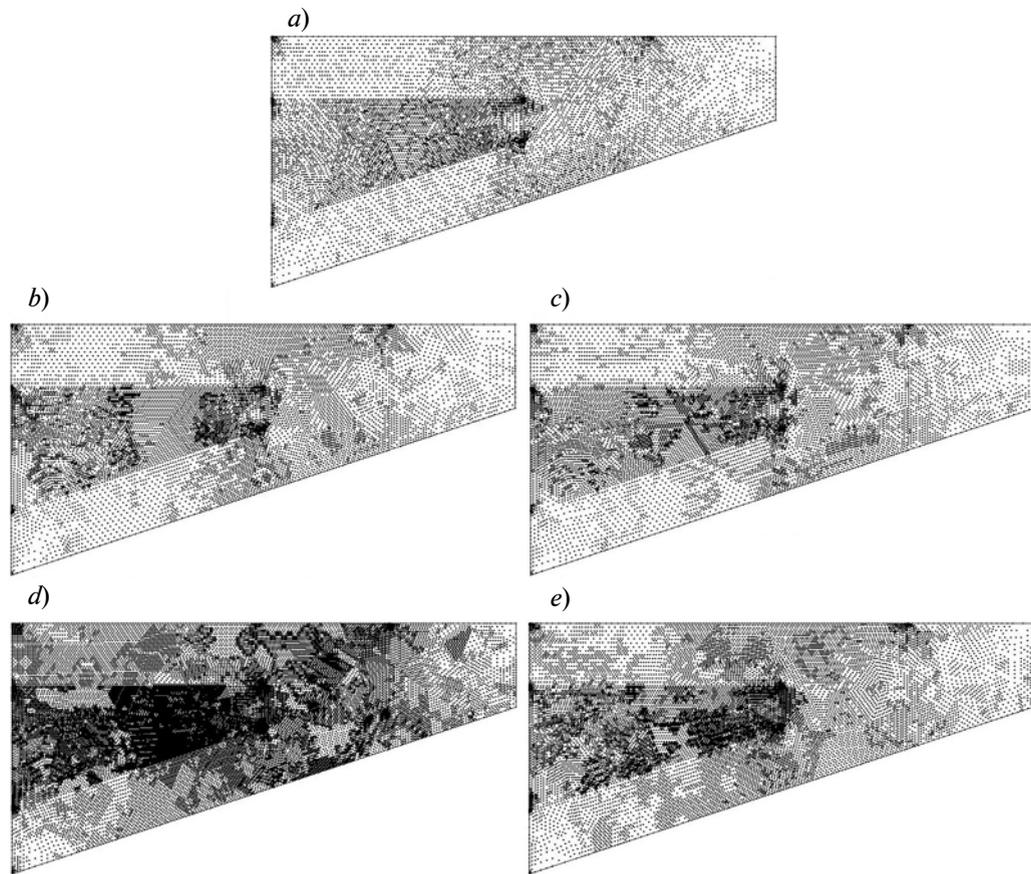


Рис. 3. Финальные конечноэлементные сетки, полученные при помощи маркеров m_1 (b), m_2 (d), m_3 (c), m_4 (e), а также эталонная сетка (a).
Иллюстрируется пример 1

Отметим, что индекс эффективности вычисляемой мажоранты практически не зависит от способа маркировки элементов, т. е. точность глобальной оценки остается неизменной. Также из таблицы видно, что маркер m_2 приводит к избыточному разбиению сетки: для него в три раза больше узлов, чем в эталонной сетке. Наибольшее количество шагов алгоритма для данного примера получается при использовании маркера m_4 .

Пример 2. Рассмотрим другую конструкцию, расчетная область для которой приведена на рис. 4, a; она состоит из трех частей, закреплена по левому краю, на правый край приложена распределенная нагрузка $F = 10^7$ Н/м². На рис. 4, c-f представлены узлы адаптивных сеток на финальном шаге работы алгоритмов, полученных с различными маркерами. Узлы эталонной сетки

изображены на рис. 4, b. Точность маркеров на равномерной сетке с 1344 элементами приведена во втором столбце таблицы. На рис. 5 представлена равномерная сетка с элементами, отобранными для разбиения с помощью маркеров, вычисленных по индикаторам η^{RT} и η^{ref} .

Количество узлов, относительная погрешность и индекс эффективности мажоранты для каждого маркера на финальных адаптивных сетках представлены в таблице в соответствующих графах. Критерий остановки адаптивного алгоритма — $e \leq 3\%$. Как и в предыдущем примере, маркер m_2 приводит к избыточному разбиению сетки. Наибольшее количество шагов алгоритма для данного примера возникает при использовании маркера m_1 , но полученная сетка по количеству узлов наиболее близка к эталонной.

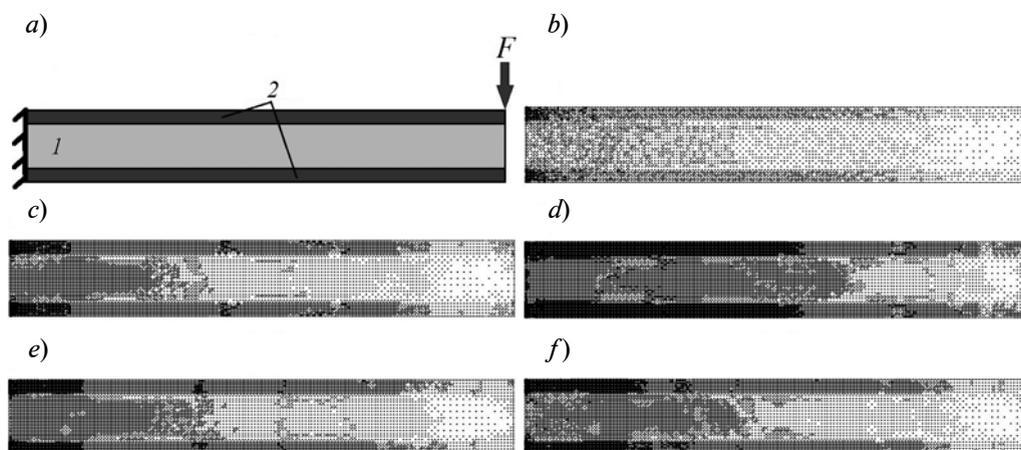


Рис. 4. Нагруженная конструкция (расчетная область) с различными параметрами материала (а) и финальные конечноэлементные сетки, полученные при помощи маркеров m_1 (с), m_2 (d), m_3 (e), m_4 (f), а также эталонная сетка (b). Материалы: бетон (1) и сталь (2).
Иллюстрируется пример 2

Пример 3. Рассмотрим закрепленную бетонную конструкцию с отверстиями. Соответствующая область представлена на рис. 6, а. Тело полностью состоит из бетона, имеются два квадратных отверстия, по границе которых и в середине нижней стороны оно закреплено. Сверху приложена распределенная нагрузка $F = 10^8 \text{ Н/м}^2$. На рис. 6 также приведены узлы эталонной сетки и сеток, получившихся в результате адаптации с различными маркерами. На

рис. 7 представлены элементы, отобранные для разбиения на равномерной сетке с помощью маркеров, рассчитанных по индикаторам η^{RT} и η^{ref} . В таблице приводится точность маркеров на равномерной сетке и данные для адаптивных сеток, узлы которых приведены на рис. 6. Критерий остановки адаптивного алгоритма $e \leq 4 \%$.

Из рис. 6, 7 и таблицы видно, что второй и третий маркер приводят к сеткам с значительно большим количеством узлов

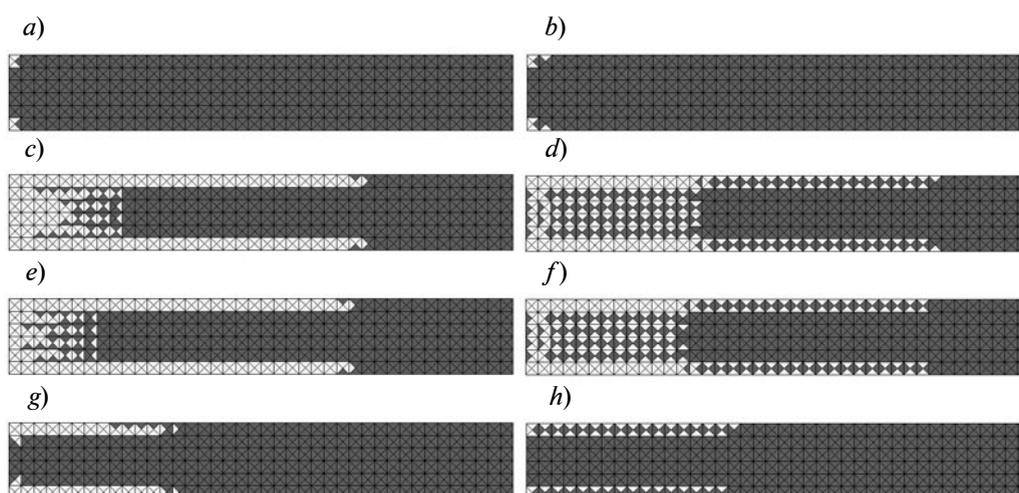


Рис. 5. Элементы области (см. рис. 4, а), отобранные для разбиения (обозначены светлым) с помощью различных маркеров: $m_1(\eta_T^{\text{ref}})$ (a), $m_1(\eta_T^{\text{RT}})$ (b); $m_2(\eta_T^{\text{ref}})$ (c), $m_2(\eta_T^{\text{RT}})$ (d); $m_3(\eta_T^{\text{ref}})$ (e), $m_3(\eta_T^{\text{RT}})$ (f); $m_4(\eta_T^{\text{ref}})$ (g), $m_4(\eta_T^{\text{RT}})$ (h).
Иллюстрируется пример 2

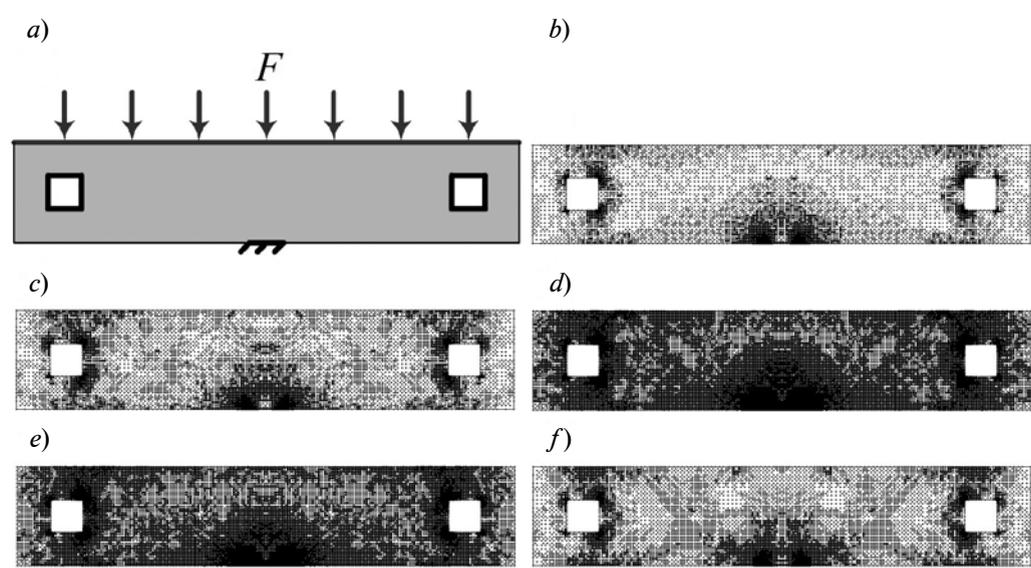


Рис. 6. Нагруженная конструкция (расчетная область) из бетона с отверстиями (a) и финальные конечноэлементные сетки, полученные при помощи маркеров m_1 (c), m_2 (d), m_3 (e), m_4 (f), а также эталонная сетка (b).
Иллюстрируется пример 3

при том же уровне относительной погрешности, по сравнению с маркерами m_1 и m_4 , однако характерные зоны сгущения узлов сетки совпадают для всех маркеров. Как и в предыдущих примерах, с помощью маркера m_1 на каждом шаге выбирается небольшое количество элементов, из-за чего

количество шагов адаптации увеличивается (см. третий столбец таблицы, Пример 3).

Заключение

В ходе исследования было рассмотрено четыре наиболее широко используемых критерия маркировки элементов, которые

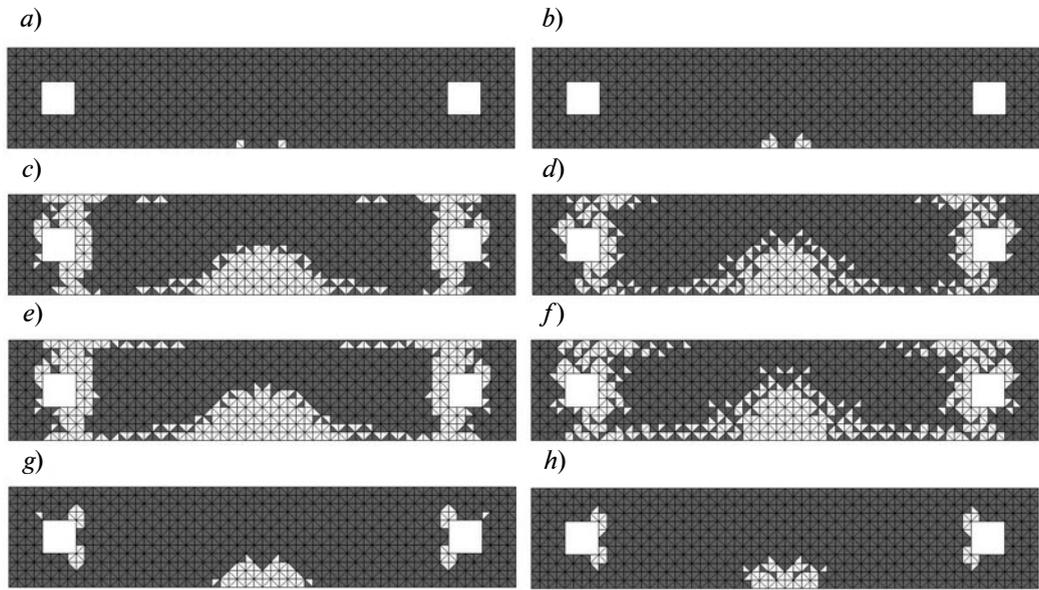


Рис. 7. Элементы области (см. рис. 6, a), отобранные для разбиения (обозначены светлым) с помощью различных маркеров: $m_1(\eta_T^{ref})$ (a), $m_1(\eta_T^{RT})$ (b); $m_2(\eta_T^{ref})$ (c), $m_2(\eta_T^{RT})$ (d); $m_3(\eta_T^{ref})$ (e), $m_3(\eta_T^{RT})$ (f); $m_4(\eta_T^{ref})$ (g), $m_4(\eta_T^{RT})$ (h).
Иллюстрируется пример 3

применялись в адаптивных алгоритмах решения задач плоской деформации, в том числе с различными материалами и геометрией.

Результаты показали, что для выбора критерия отбора элементов необходимо использовать как графические методы сравнения (итоговые сетки, графики отобранных элементов), так и количественные (количество шагов алгоритма, точность маркера, число узлов адаптивной сетки). Использование какого-либо критерия в отдельности не позволяет в полной мере получить представление о качестве маркера.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что основные зоны сгущения узлов итоговой адаптивной сетки не зависят от выбора маркера. Получаемая с помощью маркера m_1 сетка оказывается наиболее близкой к эталонной по количеству узлов, но при этом необходимо больше шагов адаптации, чем при использовании

других критериев маркировки. Во всех рассмотренных примерах использование маркера m_2 приводило к сеткам с избыточным количеством узлов, поэтому использование этого критерия нецелесообразно. Результаты для маркера m_3 и «массового критерия» m_4 зависят от выбранной задачи. Из приведенных в данной статье примеров и других, рассмотренных в ходе исследования задач, не удалось установить постоянного преимущества какого-либо из этих критериев.

Стоит отметить, что для маркеров m_1 и m_4 количество узлов итоговой сетки и число шагов алгоритма зависит от параметра α , а для маркера m_3 – от числа разбиваемых за один раз элементов. Подбор этих параметров для конкретной задачи может улучшить качество получаемых адаптивных сеток.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант номер 14-01-31273mol_a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Muzalevsky A., Repin S.** On two-sided error estimates for approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2003. Vol. 18. No. 1. Pp. 65–85.

[2] **Repin S.I., Xanthis L.S.** A posteriori error estimation for elastoplastic problems based on duality theory // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1996. Vol. 138. No. 1-4. Pp. 317–339.

[3] **Repin S.I.** A posteriori estimates for partial differential equations: Radon series on computational and applied mathematics, de Gruyter, Berlin, 2008.

[4] **Фролов М.Е.** Применение функциональных оценок погрешности со смешанными аппроксимациями к плоским задачам линейной теории упругости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 7. С. 1178–1191.

[5] **Фролов М.Е.** О реализации контроля точности решений плоских задач теории упругости

при помощи смешанных конечных элементов // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7. № 1. С. 73–81.

[6] **Чурилова М.А., Фролов М.Е.** Functional a posteriori error estimates for linear elasticity: computational properties and adaptive algorithms // Университетский научный журнал. 2014. № 10. С. 23–36.

[7] **Mali O., Neittaanmäki P., Repin S.** Accuracy Verification Methods. Theory and algorithms, Computational Methods in Applied Sciences, Springer, Dordrecht, 2014.

[8] **Verfürth R.** A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques. Chichester: John Wiley & Sons, Stuttgart: B.G. Teubner, 1996.

[9] **Bertoluzza S., Nocketto R.H., Quarteroni A., et al.** Multiscale and Adaptivity: Modeling, Numerics and Applications, C.I.M.E. Summer School. Cetraro, Italy 2009. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag 2012.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ЧУРИЛОВА Мария Александровна – кандидат физико-математических наук, ведущий программист суперкомпьютерного центра «Политехнический» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
m_churilova@mail.ru



Churilova M.A. THE SENSITIVITY OF THE ADAPTIVE ALGORITHM WITH A POSTERIORI ERROR CONTROL TO MARKING CRITERIA.

The aim of this work is to compare different marking strategies, their influence on the work of adaptive algorithms with a posteriori error control for plane elasticity problems. The error control was performed using functional error majorant. Implemented adaptive algorithms were based on the functional error majorant with no symmetry limitation on free tensor, computed using the zero-order Raviart-Thomas approximations on triangular meshes. The four most commonly used element marking criteria were used in adaptation. Numerical results for several plane strain problems have been presented, including the case of different materials and geometry. A comprehensive analysis of obtained results was given.

A POSTERIORI ERROR ESTIMATE, LINEAR ELASTICITY, ADAPTIVE ALGORITHM, RAVIART-THOMAS APPROXIMATION.

REFERENCES

- [1] **A. Muzalevsky, S. Repin**, On two-sided error estimates for approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity, *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 18(1) (2003) 65–85.
- [2] **S. Repin, L.S. Xanthis**, A posteriori error estimation for elastoplastic problems based on duality theory, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 138 (1-4) (1996) 317–339.
- [3] **S.I. Repin**, A posteriori estimates for partial differential equations: Radon series on computational and applied mathematics, de Gruyter, Berlin, 2008.
- [4] **M. Frolov**, Application of functional error estimates with mixed approximations to plane problems of linear elasticity, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 53(7) (2013) 1000–1012.
- [5] **M. Frolov**, Implementation of error control for solving plane problems in linear elasticity by mixed finite elements, *Computational continuum mechanics*, 7(1) (2014) 73–81.
- [6] **M.A. Churilova, M.E. Frolov**, Functional a posteriori error estimates for linear elasticity: computational properties and adaptive algorithms, *Humanities & Science University Journal*, 10 (2014) 23–36.
- [7] **O. Mali, P. Neittaanmäki, S. Repin**, Accuracy Verification Methods. Theory and algorithms, *Computational Methods in Applied Sciences*, Springer, Dordrecht, 2014.
- [8] **R. Verfürth**, A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques, Chichester: John Wiley & Sons, Stuttgart: B.G. Teubner, 1996.
- [9] **S. Bertoluzza, R.H. Nochetto, A. Quarteroni, et al.** Multiscale and Adaptivity: Modeling, Numerics and Applications, C.I.M.E. Summer School, Cetraro, Italy 2009, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

THE AUTHOR

CHURILOVA Maria A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

m_churilova@mail.ru