



DOI 10.5862/JEST.254.16

УДК 539.3:539.214

*Б.Е. Мельников, А.С. Семенов***ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПОДАТЛИВОСТЕЙ
ПРИ СЛОЖНЫХ ПАССИВНЫХ ПУТЯХ НАГРУЖЕНИЯ***B.E. Melnikov, A.S. Semenov***STUDY OF PLASTIC COMPLIANCE FIELD
UNDER COMPLEX PASSIVE LOADING**

Представлены результаты экспериментальных исследований упругопластического деформирования при сложных переменных пассивных путях нагружения образцов из технически чистого никеля. Произведен анализ погрешностей эксперимента и предложены методы повышения точности испытаний. Исследованы свойства поля пластических податливостей в условиях пассивного нагружения. Для всех рассмотренных путей нагружения геометрические места равных пластических модулей податливости близки к окружностям. На основе полученных результатов предложены определяющие уравнения многоповерхностной теории пластичности с одной активной поверхностью равных пластических податливостей. Предложен метод определения констант модели, характеризующих эволюцию центра активной поверхности нагружения, по данным опытов на сложное непропорциональное нагружение, состоящее из первичного нагружения, разгрузки, вторичного нагружения в другом направлении и разгрузки. Представлены результаты верификации введенных определяющих уравнений на основе испытаний тонкостенных трубчатых образцов при сложных переменных (монотонное и циклическое) нагружениях, включающих частичные и промежуточные разгрузки.

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МЕТАЛЛОВ; ПОЛЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПОДАТЛИВОСТЕЙ; СЛОЖНОЕ ПАССИВНОЕ НАГРУЖЕНИЕ; ЭКСПЕРИМЕНТ; МОДЕЛИРОВАНИЕ.

The paper presents the findings of experimental studies on elastic-plastic deformation under complex-variable passive loading of commercially pure nickel samples. The analysis of experimental errors is performed and methods to improve test accuracy are proposed. The properties of the field of plastic compliances are investigated under passive loading. For all loading paths the shapes of equal plastic compliance are close to circles. On the basis of the obtained results, the constitutive equations of multisurface plasticity theory with one active surface of plastic compliances are suggested. A method for determining the model constants, characterizing the evolution of the center of the active surface is proposed based on the experiments under nonproportional complex loading, consisting of primary loading, unloading, secondary loading in a different direction and unloading. The verification of the proposed constitutive equations is performed on the basis of the experiments on thin-walled tubular specimens under complex (monotonic and cyclic) loadings, including partial and intermediate unloading.

PLASTIC DEFORMATION OF METALS; PLASTIC COMPLIANCE FIELD; COMPLEX PASSIVE LOADING; EXPERIMENT, MODELING.

Введение

Анализ усталостной прочности элементов конструкций, работающих в условиях сложного непропорционального циклического воздействия, требует использования в расчетах уточненных моделей неупругого деформирования. Получившая широкое распространение на практике теория пластического течения не учитывает накопление пластических деформаций при пассивном нагружении, предполагая, что разгрузка, нагружение внутри поверхности нагружения и по касательной к ней являются чисто упругими процессами. Однако в ряде случаев пассивного нагружения наблюдается накопление пластических деформаций. Поэтому необходимо разработать альтернативные модели пластичности, основой для которых могут служить результаты ряда экспериментальных и теоретических исследований [1–17] пассивного нагружения. В теории упруго-пластических процессов А.А. Ильюшина [3], эндохронной теории пластичности [4, 5] и обобщенной модели Прандтля (модель Мазинга) [6] учитывается пластическое деформирование при пассивном нагружении, однако определяющие уравнения и постоянные задаются исходя из режима активного нагружения без учета специфики процессов при пассивном нагружении.

Экспериментальное изучение свойств поля пластических податливостей [18, 19] послужило основой для разработки многоповерхностной теории пластичности с одной активной поверхностью [12–17]. Понятие пластических податливостей прямо или косвенно используется многоповерхностными теориями пластичности [20, 21]. Однако свойства пластических податливостей экспериментально исследованы слабо. Прежде всего это касается деформирования при пассивных путях нагружения. Учет накопления остаточных деформаций при таких нагружениях актуален не только при расчете деформирования [12–17, 22], но и при расчете накопления повреждений [11, 23, 24], анализе сверхпластичности [25], оценке надежности элементов машин и конструкций [26–28].

Целями работы были углубленное исследование процессов сложного пассивного нагружения и совершенствование определяющих уравнений многоповерхностной теории пластичности с од-

ной активной поверхностью на основе экспериментального изучения упругопластического деформирования трубчатых образцов из технически чистого никеля при непропорциональном сложном (монотонное и циклическое) нагружении, включающем частичные и промежуточные нагрузки.

Материал и образцы для испытаний

Материал (технически чистый никель, примеси – Si-0,068 %; Fe-0,025 %; Cu-0,02 %) для проведения опытов выбран в связи с тем, что обладает сравнительно высоким модулем упругости – $E = 2,07 \cdot 10^{11}$ Па, большой величиной отношения временного сопротивления к пределу текучести и малой ползучестью при нормальной температуре. Для данного материала установлено [17], что угол между плоскостью нагружения и плоскостью деформирования составляет около 5 %, а ошибка в вычислении приращения пластических деформаций как проекции на эту плоскость не превосходит 0,4 %. В работе [29] показано, что погрешность между удельными работами пластической деформации, определенными с учетом и без учета отклонения от подобия девиаторов, максимально достигает 1,73 %. Это весьма важно для последующего расчета поврежденности с использованием энергетических моделей накопления повреждений.

Образцы, на которых проводились испытания, вырезаны из холоднотянутых труб длиной около метра; наружные диаметры 8,06–8,10 мм, толщина стенки 0,18–0,20 мм. Это позволило создать практически однородное напряженно-деформированное состояние. По толщине стенки располагались не менее 6–7 зерен. Образцы браковались, если отклонения в замерах толщин стенок в десяти контролируемых точках составляли более чем $\pm 0,005$ мм. Несмотря на некоторый разброс в величинах толщин стенок вдоль окружности сечения, средние значения для рассматриваемого сечения отличались менее чем на $\pm 0,001$ мм. Если погонные веса вырезанных из одной трубы образцов отличались более чем на 1%, то образцы также браковались. По весу, диаметру и плотности (последняя определялась взвешиванием в дистиллированной воде и воздухе и равнялась $8,78 \cdot 10^3$ кг/м³) образца вычислялась

осредненная толщина стенки. При расхождении (они были менее $\pm 0,002$ мм) с замерами в расчетах использовалась толщина, найденная по результатам взвешивания.

Образцы отжигали (одновременно для одной серии опытов) при 860°C с последующим охлаждением в печи. На основании металлографического анализа установлено, что в продольном и поперечном шлифах зерна (средний поперечный размер $0,033$ мм) – равноосные полиэдры со следами двойников. Испытания проводились через 20 дней после отжига. Каждый опыт проводился непрерывно.

Для крепления в установке на концы образца после отжига напайвались две втулки. При пайке во избежание перегрева рабочая часть образца омывалась водой. Перед отжигом, после него и после пайки проверялась прямолинейность образцов.

Установка для испытаний детально описана в [17].

Оценка погрешностей эксперимента

При анализе экспериментальных данных упруго-пластического деформирования материала рационально использовать векторное представление девиаторов напряжений и деформаций, введенное для случая плоской деформации Л. Прандтлем и позднее развитое В. Прагером, А.А. Ильюшиным [3] и др.

В совмещенном пространстве девиаторов напряжений ($\Sigma_1 = \sigma$, $\Sigma_3 = \sqrt{3}\tau$) и пластических деформаций ($\Theta_1^p = \epsilon^p$, $\Theta_3^p = \gamma^p / \sqrt{3}$) для построения полей пластических податливостей h использовалась зависимость

$$h = \frac{|\delta\Theta^p|}{|\delta\Sigma| \cos(\alpha - \beta)}, \quad (1)$$

где обозначено:

$$|\delta\Theta^p| = \sqrt{(\delta\epsilon^p)^2 + \frac{1}{3}(\delta\gamma^p)^2}; \quad |\delta\Sigma| = \sqrt{(\delta\sigma)^2 + 3(\delta\tau)^2};$$

$$\alpha = \arctg \frac{\delta\gamma^p}{\sqrt{3}\delta\epsilon^p}; \quad \beta = \arctg \frac{\sqrt{3}\delta\tau}{\delta\sigma}, \quad (2)$$

в которых $\delta\sigma$, $\delta\tau$ – изменения нормального и касательного напряжений за ступень нагружения; $\delta\epsilon^p$ и $\delta\gamma^p$ – изменения пластической осевой и сдвиговой деформаций.

Диаграмма строилась по средним значениям σ , τ на ступени вторичного нагружения. Вычисление напряжений и деформаций проводилось в соответствии с методикой, предложенной в [17].

Расчеты выполнялись с учетом изменения размеров образцов в ходе опыта. Погрешности, получаемые с использованием соотношений (1), (2), соответствуют следующему разбросу данных:

в положении точек на поверхности напряжений разброс по σ доходил до $\pm 2,5 \cdot 10^6$ Па, по $\sqrt{3}\tau$ – до $\pm 3 \cdot 10^6$ Па;

в интенсивности пластических деформаций при вторичных нагружениях в точках, по которым строились геометрические места равных h , при $h = 10^{-11}$ Па⁻¹ погрешность в $\delta\epsilon^p$ составляла $\pm 0,001$ %;

в направлении $\delta\Theta^p$ при $|\delta\Theta^p| = 0,01$ % погрешность доходила до $\pm 5^\circ$; при $|\delta\Theta^p| = 0,05\%$ – до $\pm 1^\circ$.

В соответствии с методикой, изложенной в [17], учитывались погрешности, вызванные как погрешностями в измерениях, так и применением приближенных соотношений.

Методология проведения эксперимента

Методология включала одновременный отжиг 10 образцов; испытания начались через 20 дней и продолжались две недели. С каждым образцом испытания проводились непрерывно в течение 8–10 часов. Для контроля работы приборов и проверки отсутствия изгиба образца после каждой ступени нагружения снимались отсчеты. Определялись напряжения и деформации. Методология эксперимента подробно описана в [17].

Подготовительные опыты

Для изучения однородности образцов и начальной анизотропии материала были поставлены эксперименты при пропорциональном нагружении. Установлено, что при аппроксимации данных опытов уравнением

$$\epsilon_i^p = a\sigma_i^k, \quad (3)$$

где ϵ_i^p, σ_i – интенсивности пластических деформаций и напряжений, их отклонения не превосходят 2 % ($k = 5,6$; $a = 1,25 \cdot 10^{14}$ Па^{-5,6}). Приняты модули упругости $E = 2,07 \cdot 10^{11}$ Па и сдвига $G = 0,75 \cdot 10^{11}$ Па. При шести вариантах

пропорционального нагружения расхождение по величинам напряжений менее 3 %.

Диаграммы деформирования при нагружении осевой силой и различными по знаку крутящими моментами практически совпали. Отклонения опытных точек от кривой, построенной по зависимости

$$h = \frac{d\varepsilon_i^p}{d\sigma_i} = ak\sigma_i^{k-1}, \quad (4)$$

не превышают величину $\pm 5\%$ по напряжениям. Геометрические места равных $\Delta\varepsilon_i^p$ (для значений 0,006; 0,012; 0,018; 0,036 %) и равных h (10^{-11} ; $2 \cdot 10^{-11}$; $3 \cdot 10^{-11}$; $5 \cdot 10^{-10}$; 10^{-9} Па⁻¹) могут отклоняться на такую же величину от соответствующих окружностей.

На основании данных по изменению скорости ползучести проведены эксперименты для первичного нагружения при нулевой выдержке, 15-минутной и 16-часовой выдержке. После этого образцы разгружались и нагружались по различным программам. Результаты испытаний для второго и третьего вариантов выдержки оказались близки. Соппротивление образца, не подвергавшегося выдержке, было приблизительно на 20 % ниже.

Величины выдержек выбирались по скорости ползучести, т. е. при интенсивности деформации $\varepsilon_{i0}^p < 1\%$ применялась выдержка 15 мин., при $\varepsilon_{i0}^p = (3-4)\%$ – 30 мин. и т.д.

Исследование поля пластических податливостей

При активном нагружении растягивающей силой и крутящим моментом в различных вариантах пассивного нагружения в ходе 16 опытов установлено, что значение h и направление $\delta\mathcal{E}^p$ практически не зависят от $\delta\Sigma$: наибольший поворот $\delta\mathcal{E}^p$, соответствующий изменению направления $\delta\Sigma$ на 90° , составляет $\pm 2^\circ$ от среднего направления.

Эволюция поверхности упругого состояния по допуску 0,05 % на образцах получивших пластическую деформацию 1,1; 1,9; 2,2 и 3,5 %, соответствует характерным свойствам, отмеченным в [30].

Для изучения влияния характера пути пассивного нагружения 10 образцов были подвергнуты растяжению, 3 образца – кручению и 4 образца первично нагружались по пути $\sigma = \sqrt{3}\tau$.

Далее задавались различные пути пассивного нагружения. Результаты опытов на 10 образцах при различных путях пассивного нагружения показали, что величины вторичных пластических деформаций, направления векторов их приращений, величины h в первом приближении определяются первичным нагружением и текущим напряженным состоянием.

По достижении заданного напряженного состояния осуществлялась 15-минутная выдержка, после этого образец частично разгружался. При некотором, предварительно намеченном для данного образца, напряженном состоянии разгрузка прекращалась и начиналось вторичное нагружение. На плоскости напряжений вторичный путь составлял прямой угол с путем первичного нагружения.

На каждой ступени нагружения определялись величины, необходимые для расчета характеристик анизотропии. Вторичное нагружение доходило до величины интенсивности напряжений, близкой к σ_{i0} , достигнутой при первичном нагружении. Затем обследованный вторичный путь проходил в обратном направлении до выхода на путь первичного нагружения и производилось нагружение образца по первичному пути до получения следующего значения σ_{i0} . Опять давалась 15-минутная выдержка под полной нагрузкой. В такой же последовательности производилась разгрузка и вторичное нагружение образца. Достижение на том же образце нового напряженного состояния и последующее вторичное нагружение производились так же, только время выдержки образца при полной нагрузке было увеличено до 20 минут.

По вторичным путям, составляющим прямой угол с направлением пути первичного нагружения, было испытано 8 образцов и 2 образца нагружались по «косым» вторичным путям. Результаты всех этих испытаний позволили построить искомые участки геометрических мест равных h и равных $\Delta\varepsilon_i^p$.

В описанных выше испытаниях как при первичном, так и при вторичном нагружении одновременно изменяли осевую силу и крутящий момент.

В основных опытах по изучению деформационной анизотропии реализованы 16 вариантов

нагружения, испытано 54 образца, пройдено 118 вторичных путей нагружения.

Опыты поставлены для трех вариантов интенсивностей напряжений первичного нагружения – 103, 150, 306 МПа, достигавшихся различными путями.

Построены геометрические места равных пластических податливостей h для первичных нагружений соответственно осевой силой, крутящим моментом, по пути $\sigma = \sqrt{3}\tau$ и по двухзвенному пути.

Получены геометрические места равных h для первичных нагружений осевой силой (рис. 1), крутящим моментом и по двухзвенному пути. Пути вторичного нагружения показаны тонкими линиями. Во всех случаях пропорционального нагружения центры окружностей лежат на линии первичного нагружения.

На рис. 2 изображены опытные точки и окружности, соответствующие равным значениям h , при различных величинах первичного нагружения, что демонстрирует влияние достигнутого при первичном нагружении σ_{j0} на размеры и положение окружностей равных h . Центры окружностей располагаются на отрезке $o'-o''$.

Во всех изученных случаях деформационная анизотропия проявлялась при первых пластиче-

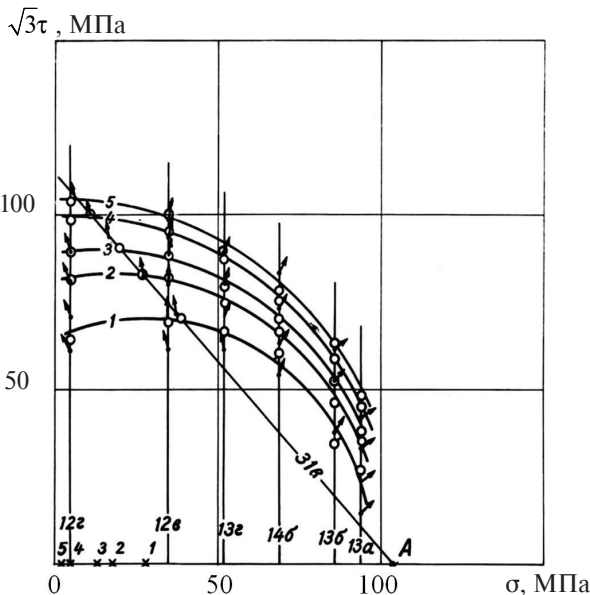


Рис. 1. Геометрические места равных пластических податливостей h для первичных нагружений осевой силой. Для всех кривых одинаковое значение $\sigma_{j0} = 103$ МПа и различные h

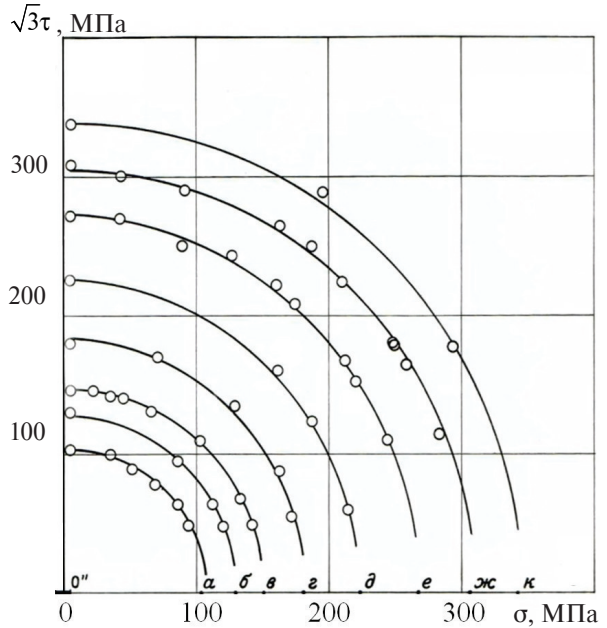


Рис. 2. Геометрические места равных пластических податливостей h для первичных нагружений осевой силой. Для всех кривых одинаковое значение $h = 10^{-10}$ Па⁻¹ и различные σ_{j0}

ских деформациях (около 0,2 %) и не исчезала при больших значениях ϵ_{j0} . Геометрические места равных h аппроксимировались окружностями, положения центров и радиусы которых находились по методу наименьших квадратов. При этом отклонение не превосходило 2–3 % величины радиуса, т.е. имело тот же порядок, что и разброс, обусловленный неоднородностью образцов.

Во всех случаях пропорционального нагружения эти центры лежат на линии первичного нагружения. При сложных путях первичного нагружения они смещались к большей проекции Θ_0^p .

Форма и свойства поверхностей равных остаточных деформаций соответствуют приведенным в работах [30, 31] и многочисленным экспериментальным данным для поликристаллических металлов.

При вторичных нагружениях, не выходящих за пределы круга Мизеса, соответствующего последней точке первичного нагружения, поле равных h в первом приближении однозначно определяется историей первичного нагружения.

Все геометрические места равных h в диапазоне 10^{-11} Па⁻¹ $\leq h \leq 10^{-10}$ Па⁻¹ близки к окружностям. Центры этих окружностей смещены относительно начала координат. Направление

вектора смещения центра соответствует отношению компонент первичной пластической деформации, модуль этого вектора зависит только от значения h , отвечающего данной окружности, и не зависит от истории нагружения. Радиусы окружностей не зависят от характера пути первичного нагружения и определяются соответствующим значением h и интенсивностью напряжений σ_{i0} достигнутой при первичном нагружении. Чтобы определить размеры и положение этих окружностей, кроме величин h и σ_{i0} , необходимо располагать значениями пяти констант материала, определяемых по результатам трех опытов.

При $h < 1 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$ геометрические места равных h приближенно можно считать окружностями, проходящими через последнюю точку пути первичного нагружения. Центры этих окружностей располагаются на той же прямой, что и центры окружностей, отвечающих большим значениям h .

Величины вторичных пластических деформаций модулей податливости и направления векторов приращений вторичных пластических деформаций в первом приближении однозначно определяются лишь историей первичного нагружения и текущим напряженным состоянием при вторичном нагружении. Следовательно, деформационную анизотропию, созданную данным первичным нагружением, можно характеризовать одним полем h и одним полем направлений $\delta \mathcal{E}^p$.

Из-за понижения точности измерений при $h < 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$ зависимости, характеризующие поля, могут быть менее точными.

Расчет процессов деформирования проводился с помощью соотношений [17]

$$\rho_\sigma = \frac{A \varepsilon_0}{h \varepsilon_{i0}}; \rho_{\sqrt{3}\tau} = \frac{A \gamma_0}{h \sqrt{3}\varepsilon_{i0}}; \quad (5)$$

$$h = ak \left[\frac{R+B}{\sigma_{i0}+B} D-B \right]^{k-1}, \quad (6)$$

где ρ_σ , $\rho_{\sqrt{3}\tau}$ – проекции вектора смещения поверхности равных пластических податливостей; a , k , A , B , D – постоянные материала.

Базовые эксперименты и методика определения постоянных

Значения постоянных в соотношениях (5), (6) – $a = 3,15 \cdot 10^{-46} \text{ Па}^{-5,6}$; $k = 5,6$; $A = 3,6 \cdot 10^{-4}$; $B = 3,2 \cdot 10^9 \text{ Па}$; $D = 4,12 \cdot 10^9 \text{ Па}$ – получены осреднением данных ряда опытов. Величины a и k могут быть определены из опыта на линейное растяжение (в результате аппроксимации диаграммы испытаний прямой линией, построенной в координатах $\lg \sigma - \lg \varepsilon^p$). Погрешность в вычислениях этих постоянных определяется неоднородностью материала, которая дает отклонения не более $\pm 2\%$. Среднеквадратические погрешности a и k равны соответственно 4% и $0,3\%$ при $\sigma = 10^7 \text{ Па}$.

Для определения константы A необходимо знать величину хотя бы одного смещения центра окружности равной пластической податливости. Такая окружность может быть построена по данным двух опытов на вторичное нагружение, первичные нагружения которых были одинаковыми. Наибольшая погрешность определения A будет при использовании окружностей, отвечающих меньшим значениям h , т.к. ρ в этом случае велико.

Для определения постоянных B и D необходимы значения минимум двух радиусов R_1 и R_2 , соответствующих разным h . Модуль вектора смещения центра поверхности $|\rho|$ определяется величиной модуля пластической податливости h . Сопоставление величин $|\rho|$ позволяет установить зависимость

$$|\rho| = \frac{A}{h}. \quad (7)$$

Направление вектора ρ определяется соотношением компонент первичных пластических деформаций (5).

Для установления зависимости радиуса окружности равной пластической податливости от σ_{i0} и для определения постоянных в координатах $\sigma_{i0} - R$ были нанесены точки, соответствующие изучаемым значениям σ_{i0} и h (рис. 3). Точки, отвечающие одинаковым значениям h , располагаются весьма близко от прямых, пересекающихся в точке S .

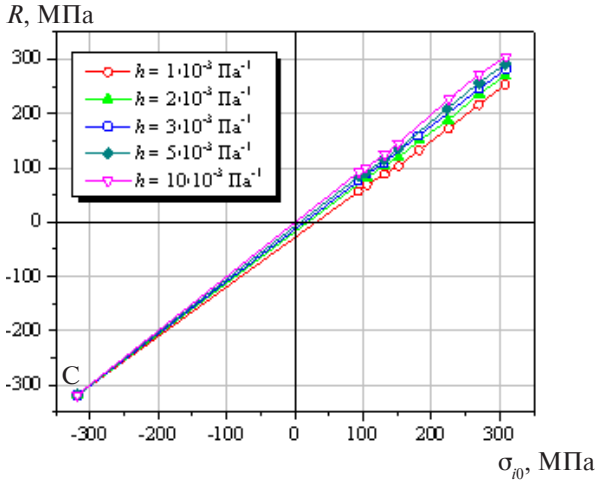


Рис. 3. Зависимость радиуса окружности равных пластических податливостей от интенсивности напряжений первичного нагружения

Ее координаты соответствуют величине B , которую можно рассматривать как некоторую постоянную материала, определяющую развитие деформационной анизотропии. Для сопоставления поведения материала при вторичных нагружениях с его поведением при первичном нагружении (рис. 4) были нанесены точки, соответствующие величинам радиусов R_0 окружностей равных h для исходного материала, которые получены из (4):

$$R_0 = \left(\frac{h}{ak} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (8)$$

Экспериментально определенные точки располагались на вертикальной прямой с абсциссой $\sigma^* = 9,2 \cdot 10^5$ Па. Тогда для любого луча

$$\frac{\sigma_{i0} + B}{\sigma^* + B} = \frac{R + B}{R_0 + B}. \quad (9)$$

Полагая $\sigma^* + B = D$, после подстановки в (8) получаем

$$\frac{\sigma_{i0} + B}{D} = \frac{R + B}{k^{-1} \sqrt[k]{\frac{h}{ak}} + B}. \quad (10)$$

Откуда могут быть получены выражения для R и h :

$$R = \frac{\sigma_{i0} + B}{D} \left(k^{-1} \sqrt[k]{\frac{h}{ak}} + B \right) - B; \quad (11)$$

$$h = ak \left(\frac{R + B}{\sigma_{i0} + B} D - B \right)^{k-1}. \quad (12)$$

С помощью соотношений (7) и (11) найдены значения $|\rho|$ и R для окружностей, отвечающих значениям h , 10^{-11} Па^{-1} , равным 1, 2, 3, 5 и 10. Из (10) следует

$$\frac{\sigma_{i0} + B}{D} = \frac{R_1 + B}{k^{-1} \sqrt[k]{\frac{h_1}{ak}} + B}; \quad \frac{\sigma_{i0} + B}{D} = \frac{R_2 + B}{k^{-1} \sqrt[k]{\frac{h_2}{ak}} + B}. \quad (13)$$

Отсюда могут быть найдены константы B и D :

$$B = \frac{R_1 k^{-1} \sqrt[k]{\frac{h_1}{ak}} - R_2 k^{-1} \sqrt[k]{\frac{h_2}{ak}}}{(R_1 - R_2) + \left(k^{-1} \sqrt[k]{\frac{h_2}{ak}} - k^{-1} \sqrt[k]{\frac{h_1}{ak}} \right)};$$

$$D = (\sigma_{i0} + B) \frac{k^{-1} \sqrt[k]{\frac{h_1}{ak}} - k^{-1} \sqrt[k]{\frac{h_2}{ak}}}{R_1 - R_2}. \quad (14)$$

При этом чем больше разность $(R_1 - R_2)$ радиусов, тем меньше погрешность B и D . Поэтому при постановке опытов следует выбирать возможно большее σ_{i0} , а окружности равной пластической податливости h строить для наименьшего и наибольшего достоверно определяемых значений h .

По описанной методике из данных двух опытов ($\sigma_{i0} = 3,42 \cdot 10^8$ Па, $h_1 = 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$ и $h_2 = 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$) определены $B = 3,32 \cdot 10^8$ Па, $D = 4,24 \cdot 10^8$ Па, а по осредненным данным всех опытов – $B = 3,2 \cdot 10^8$ Па, $D = 4,12 \cdot 10^8$ Па.

Отличия в результатах расчетов по соотношениям (4), (5) с использованием этих значений оказались невелики.

Таким образом, для определения констант A , B и D достаточно иметь две окружности равных h . Чтобы построить такую окружность, центр которой лежит на векторе первичной пластической деформации, необходимо знать две точки окружности, достаточно удаленные друг от друга. Окружности, отвечающие $\sigma_0 = 3,42 \cdot 10^8$ Па, были построены по двум точкам. Средние точки (см. рис. 2) оказались близки к этим окружностям. Также не дали значительных отклонений от этих окружностей точки, полученные в ряде проверочных опытов (см. рис. 4).

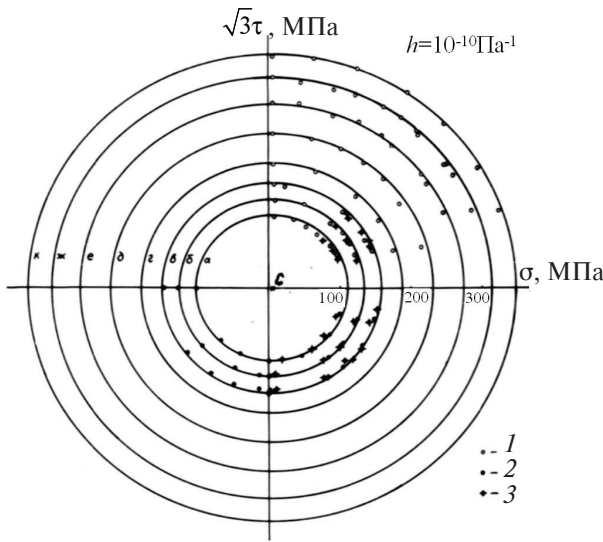


Рис. 4. Геометрические места равных пластических податливостей h для различных первичных нагружений (1 – осевое растяжение; 2 – крутящий момент; 3 – нагружение $\sigma = \sqrt{3}\tau$)

Исследован вопрос о направлении векторов $\delta\mathcal{E}^p$ по отношению к нормали к поверхностям равных $\delta\epsilon_i^p$. Проведены испытания первично-растянутых образцов (см. рис. 4), первичнозакрученных крутящим моментом, а также нагруженных первично либо пропорциональными, либо сложными путями до $\sigma = \sqrt{3}\tau$ (соответственно точки 1, 2, 3).

Построенные по приближенным формулам (7), (11) окружности соответствуют следующим значениям σ_{j0} , 10^8 Па: 1; 1,27; 1,47; 1,77; 2,19; 2,62; 3 и 3,35.

Координаты экспериментальных точек преобразовывались так, чтобы направление вектора первичной пластической деформации \mathcal{E}_0^p повернулось до совпадения с осью σ (при нагружении крутящим моментом – на 90° ; по пути $\sigma = \sqrt{3}\tau$ – на 45° и т. д.).

На рис. 5 показаны геометрические места равных $\delta\epsilon_i^p$ (кривая 1 – 0,006 %, 2 – 0,012 %, 3 – 0,018 %, 4 – 0,036 %) при первичном нагружении растягивающей силой до $\sigma_0 = 1,48 \cdot 10^8$ Па. Направления вторичных нагружений изображены штрих-пунктирными линиями. Для ряда путей вторичных нагружений стрелками показаны направления векторов $\delta\mathcal{E}^p$.

Отклонения $\delta\mathcal{E}^p$ от нормалей увеличиваются при удалении от точки окончания первичного

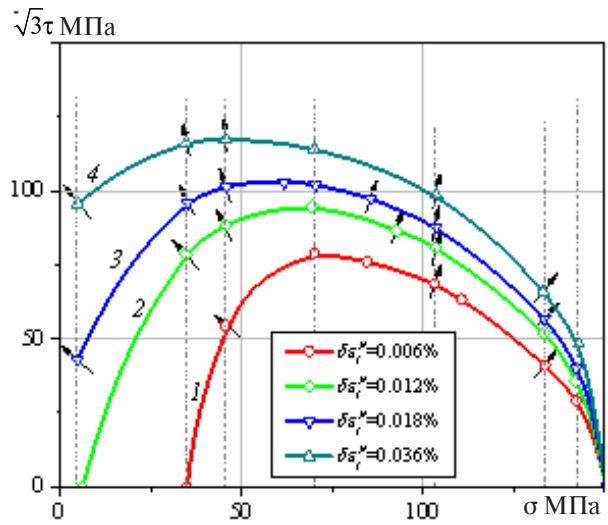


Рис. 5. Геометрические места равных $\delta\epsilon_i^p$ (1 – 0,006 %; 2 – 0,012 %; 3 – 0,018 %; 4 – 0,036 %) при первичном нагружении растягивающей силой ($\sigma_0 = 148$ МПа; $\epsilon_0 = 1,4$ %)

нагружения. В среднем эти отклонения составляли 5° . Практическое использование геометрических мест равных $\delta\epsilon_i^p$ для определения направления векторов $\delta\mathcal{E}^p$ затруднено, так как формы этих поверхностей существенно меняются в зависимости от величины $\delta\epsilon_i^p$ [30].

Отклонения от нормалей к поверхностям равных h составляло $6-7^\circ$, т. е. немного больше отклонений от поверхностей равных $\delta\epsilon_i^p$.

Определяющие уравнения многоповерхностной теории при одной активной поверхности

Рассмотрим вариант определяющих уравнений, учитывающих описанные выше особенности упруго-пластического деформирования при сложном пассивном нагружении:

$$d\sigma = {}^4D \cdot (d\epsilon - d\epsilon^p); \quad (15)$$

$$d\epsilon^p = h \frac{\partial f(\sigma_A)}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial f(\sigma_A)}{\partial \sigma} \dots d\sigma, \quad (16)$$

где ϵ и ϵ^p – тензоры полной и пластической деформации; $f(\sigma_A) = f_{k+1}(\sigma_A)$ – соответствует активной $(k+1)$ -й поверхности; $\sigma_A = \sigma - \sigma_{Ok+1}$ – тензор активных напряжений; σ_{Ok+1} – центр $(k+1)$ -й поверхности равных податливостей, характеризующий ее смещение как жесткого целого; h – модуль пластической податливости $(k+1)$ -й

поверхности; ${}^4\mathbf{D}$ — тензор модулей упругости четвертого ранга.

Использование окружностей в качестве двумерных сечений поверхности равной податливости позволяет ввести в рассмотрение гиперсферу Мизеса

$$f(\boldsymbol{\sigma}_A) = f(\mathbf{s}_A) = \sqrt{3/2 \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{s}_A}, \quad (17)$$

где \mathbf{s}_A — девиатор тензора активных напряжений $\boldsymbol{\sigma}_A$. В этом случае закон течения (16) принимает вид

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} h \frac{\mathbf{s}_A \otimes \mathbf{s}_A \cdot d\mathbf{s}}{\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{s}_A}. \quad (18)$$

Уравнения для величин, характеризующих положение центров поверхностей \mathbf{s}_{O_j} , необходимые для вычисления $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ по (18), вводятся на основе экспериментально наблюдаемой закономерности, устанавливающей, что центр поверхности $\mathbf{s}_{O_{j+1}}$ находится на прямой, соединяющей \mathbf{s}_{O_j} и точку реверса \mathbf{s}_{R_j} [14, 15]:

$$\mathbf{s}_{O_{j+1}} = \mathbf{s}_{O_j} + a_j (\mathbf{s}_{R_j} - \mathbf{s}_{O_j}); \quad (19)$$

$$a_j = \frac{(\mathbf{s}_{R_{j+1}} - \mathbf{s}_{R_j} - 2\mathbf{s}_{O_j}) \cdot (\mathbf{s}_{R_{j+1}} - \mathbf{s}_{R_j})}{(\mathbf{s}_{R_j} - 2\mathbf{s}_{O_j}) \cdot (\mathbf{s}_{R_{j+1}} - \mathbf{s}_{R_j})}, j=1, \dots, k, \quad (20)$$

где \mathbf{s}_{R_j} — девиатор напряжений, соответствующий реверсу нагрузки, под которым понимаем точку излома пути нагружения с последующим приращением напряжений, направленным внутрь поверхности равной податливости. Условие возникновения нового, j -го реверса можно определить следующим образом:

$$\frac{\partial f_j(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{O_j})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot d\boldsymbol{\sigma} < 0. \quad (21)$$

Возникновение нового, j -го реверса $\boldsymbol{\sigma}_{O_j}$ обуславливает появление новой $(j+1)$ -й поверхности. Для вычисления местоположения центра активной поверхности в (20) вместо $\mathbf{s}_{R_{j+1}}$ следует использовать значение девиатора напряжений \mathbf{s} .

Уравнения эволюции внутренних переменных \mathbf{s}_{O_j} (19), (20) имеют голономный рекуррентный характер, что позволяет учесть предысторию

процесса нагружения без введения дифференциальных уравнений.

Модуль пластической податливости h , фигурирующий в уравнениях (16) и (18), является функцией активных напряжений и напряжений в точке реверса наибольшей поверхности за всю историю нагружения \mathbf{s}_{R_j} . Сопоставление результатов расчетов и опытов показало, что хорошую точность обеспечивает степенная аппроксимация (12).

Предложенный вариант теории является обобщением на трехмерный случай рассмотренных выше особенностей поведения материала при сложном нагружении, а также удовлетворяет термодинамическим ограничениям [32]. Особенности интегрирования введенных определяющих уравнений (15), (18)–(20) рассмотрены в [15].

Сравнение расчетных и экспериментальных путей деформирования

Пути первичного и вторичного нагружения в пространстве напряжений показаны на рис. 6 сплошной линией. На рис. 7 представлены пути деформирования, отвечающие путям вторичного нагружения. Деформации, вычисленные с помощью многоповерхностной теории, показаны на рис. 7 пунктирной линией, с использованием теории пластического течения — штрихпунктирной линией, экспериментальные данные маркированы сплошной линией. Отличие от экспериментальных данных деформаций, рассчитанных по многоповерхностной теории, не превышает 0,009 %, а по теории пластического течения — 0,09 % для ε_x , 0,125 % для ε_{xy} .

На рис. 6 также показаны пути нагружения, полученные по теории течения (штрихпунктирная линия) и по исследуемой теории (пунктирная линия), отвечающие наблюдаемому в опыте (сплошная линия) пути вторичного деформирования. Наибольшее отклонение от действительного пути нагружения составляет $1,08 \cdot 10^7$ Па для рассматриваемой теории и $3,33 \cdot 10^7$ Па для теории течения.

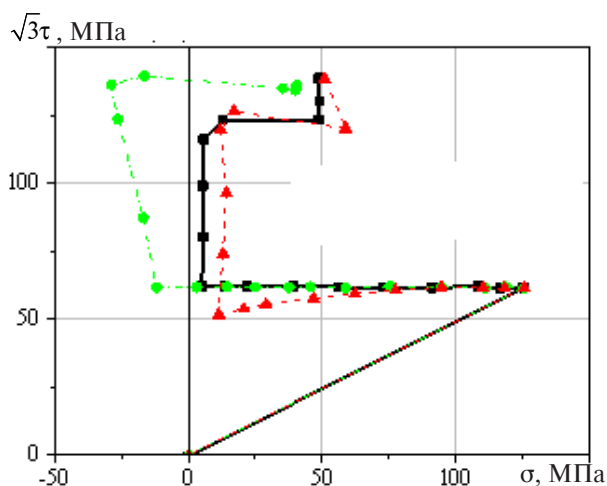


Рис. 6. Пути нагружения:
1 – эксперимент (сплошная линия);
2 – многоповерхностная теория (пунктирная линия);
3 – теория течения (штрих-пунктирная линия)

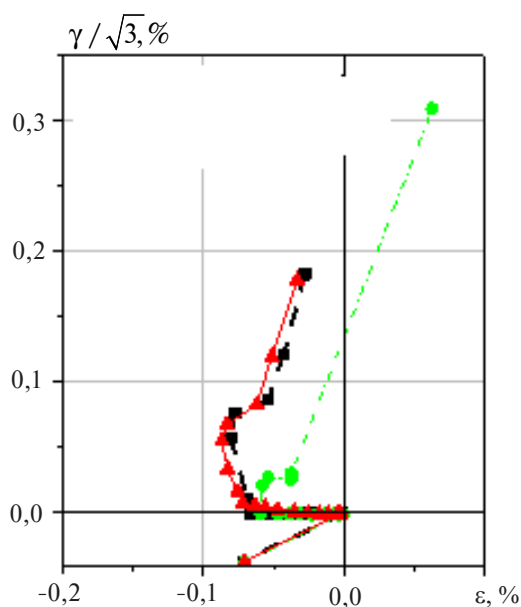


Рис. 7. Пути деформирования:
1 – эксперимент (сплошная линия);
2 – многоповерхностная теория (пунктирная линия);
3 – теория течения (штрих-пунктирная линия)

Заключение

Для всех рассмотренных путей нагружения геометрические места равных пластических модулей податливости h близки к окружностям, центры которых лежат на прямой, соединяющей исходную точку первоначального нагружения и точку реверса. Приращение пластической деформации направлено по нормали к этим окружностям.

Радиусы окружностей, соответствующих геометрическим местам равных пластических податливостей не зависят от характера пути первичного нагружения и определяются значением h и интенсивностью напряжений σ_{i0} , до которой доводилось первичное нагружение.

Выполнена систематическая оценка влияния различных источников погрешности (неточности в геометрии образцов, погрешности измерительной аппаратуры, статистического разброса характеристик и микроструктуры материала образцов) на точность результатов при проведении экспериментов в условиях сложного пассивного нагружения.

Для определения констант модели, характеризующих эволюцию центра активной поверхности нагружения, предложен метод, использующий результаты опытов на сложное непропорциональное нагружение, состоящее из двух участков нагружений.

Сравнение прогнозов многоповерхностной теории при одной активной поверхности с данными опытов на сложное пассивное нагружение продемонстрировало их хорошее соответствие (отличие менее 5 % для рассматриваемых траекторий деформирования).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского Фонда Фундаментальных исследований (РФФИ) № 16-08-00845-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зубчанинов В.Г., Гульятев В.И., Зубчанинов Д.В.** Экспериментальное исследование процессов сложного нагружения материалов на многозвенных траекториях // Современные проблемы термовязкопластичности. Труды II школы-семинара. М., 2007. С. 19–24.
2. **Зубчанинов В.Г.** Об активных и пассивных процессах сложного нагружения-разгрузки // Сове-

- менные проблемы термовязкопластичности. Труды II школы-семинара. М., 2007. С. 3–18.
3. **Ильюшин А.А.** Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
4. **Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б.** Эндохронные теории пластичности: основные положения, перспективы развития // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1989. № 1. С. 161.

5. **Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б.** О соотношениях эндохронной теории пластичности с «новой» мерой внутреннего времени // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54, № 4. С. 689.
6. **Пальмов В.А.** Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976. 328 с.
7. **Kuwabara T., Ishiki M., Kuroda M., Takahashi S.** Yield locus and work hardening behavior of a thin-walled steel tube subjected to combined tension-internal pressure // J. Phys. IV France 105. 2003. P. 347–354.
8. **Smith S., Almroth B.O.** An experimental investigation of plastic flow under biaxial stress // Experimental mechanics. 1970. № 10. P. 217–224.
9. **Khan A.S., Parikh Y.** Large deformation in polycrystalline copper under combined tension-torsion, loading, unloading and reloading or reverse loading: a study of two incremental theories of plasticity // International Journal of Plasticity. 1986. Vol. 2. P. 379–392.
10. **Rees D.W.A.** Research note on a reexamination of neutral loading experiments // International Journal of Plasticity. 1988. Vol. 4. P. 91–102.
11. **Павлов П.А.** Основы инженерных расчетов элементов машин на усталость и длительную прочность. Л.: Машиностроение, 1988. 251 с.
12. **Мельников Б.Е., Изотов И.Н., Кузнецов Н.П.** Пространственный упругопластический элемент для описания нестационарного деформирования // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 1986. Т. 197. С. 75–79.
13. **Мельников Б.Е., Изотов И.Н., Кузнецов Н.П.** Расчет и экспериментальное исследование сложных путей упругопластического деформирования // Проблемы прочности. 1990. № 8. С. 14–17.
14. **Мельников Б.Е., Семенов А.С.** Многоповерхностная теория пластичности с одной активной поверхностью пластических податливостей // Труды СПбГТУ. 1991. № 144. С. 26–31.
15. **Мельников Б.Е., Семенов А.С.** Описание эволюции поверхностей равной податливости в многоповерхностной теории пластичности // Труды СПбГТУ. 1996. № 456. С. 52–61.
16. **Изотов И.Н., Кузнецов Н.П., Мельников Б.Е., Митюков А.Г.** Упругопластическое поведение стальных трубчатых образцов при сложном трехосном нагружении // Научно-технические ведомости СПбГТУ, 2003. № 3(33). С. 114–125.
17. **Изотов И.Н., Мельников Б.Е., Семенов А.С., Семенов С.Г.** Определение свойств пластических податливостей на никелевых образцах // Научно-технические ведомости СПбГПУ, 2009. № 2(78). С. 165–174.
18. **Изотов И.Н., Ягн Ю.И.** Изучение пластического деформирования металла с деформационной анизотропией, созданной в процессе предварительного нагружения // ДАН СССР. 1961. Т. 139, № 2(78). С. 576–579.
19. **Изотов И.Н.** Изучение анизотропии металла созданной некоторыми видами пластического деформирования: Автореф. ... дисс. на соиск. уч. ст. канд. тех. наук. Ленинград. 1962.
20. **Mroz Z.** On the description of anisotropic workhardening // J. Mech. Phys. Solids. 1967. Vol. 15. № 3. P. 163–175.
21. **Mroz Z., Norries V.A., Zienkiewicz O.C.** An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading // Int. J. for Numerical and analytical Methods in Geomechanics. 1978. Vol. 2. № 3. P. 203–221.
22. **Melnikov B.E., Semenov A.S.** Creation and application of hierarchical sequence of material models for numerical analysis of elasto-plastic structures // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 1996. Vol. 76. № Suppl. 2. P. 615–616.
23. **Мельников Б.Е., Кузнецов Н.П., Митюков А.Г., Семенов А.С., Семенов С.Г.** Применение модели энергетической оценки прочности при нескольких циклах нагружения в случае сложного неоднородного напряженного состояния // Современные проблемы ресурса материалов и конструкций. Труды III школы-семинара М.: Изд-во МГТУ (МАМИ), 2009. С. 140–147.
24. **Мельников Б.Е., Семенов А.С.** Энергетическая модель накопления повреждений при малоцикловой усталости // Сб. матер.: XXI Петербургские чтения по проблемам прочности. К 100-летию со дня рождения Л.М. Качанова и Ю.Н. Работнова. 2014. С. 59–61.
25. **Kitaeva D.A., Rudaev Y.I.** About kinetic equations of dynamic superplasticity model // Proceedings of the XXXI Summer School «Advanced Problems in Mechanics». 2003. St. Petersburg: Polytechnical Publishing House, 2003. P. 172–176.
26. **Semenov A., Semenov S., Nazarenko A., Getsov L.** Computer simulation of fatigue, creep and thermal-fatigue cracks propagation in gas-turbine blades // Materiali in Tehnologije. 2012. Vol. 46. № 3. P. 197–203.
27. **Артюх В.Г.** Точность предохранителей для металлургических машин. Мариуполь: Изд-во ПГТУ, 2000. 177 с.
28. **Melnikov B.E., Semenov A.S.** Multimodel analysis as strategy of reliable description of elastic-plastic deformation processes // Proc. of IV International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications. 1995. P. 181–189.
29. **Касап К.** Учет отклонения от подобия девиаторов при определении работы пластической деформации // Periodica Polytechnica Mechanical engineering. 1971. Т. 13. № 1. С. 17–25.
30. **Васин Р.А.** Определяющие соотношения теории пластичности // Итоги науки и техники. Серия: Механика деформируемого тела. 1990. Т. 21. С. 3–75.
31. **Ягн Ю.И., Шишмарев О.А.** Некоторые результаты исследования границ упругого состояния пластически растянутых образцов никеля // Доклады АН СССР. 1958. Т. 119, № 1. С. 46–48.

32. Семенов А.С. Анализ термодинамической состоятельности многоповерхностной теории пластичности с одной активной поверхностью // На-

учно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 2003. № 3(33). С. 103–113.

REFERENCES

- Zubchaninov V.G., Gulyayev V.I., Zubchaninov D.V. Eksperimentalnoye issledovaniye protsessov slozhnogo nagruzheniya materialov na mnogozvennykh trayektoriyakh. *Sovremennyye problemy termovyazkoplasticnosti. Trudy II shkoly-seminara*. M., 2007. S. 19–24.
- Zubchaninov V.G. Ob aktivnykh i passivnykh protsessakh slozhnogo nagruzheniya-razgruzheniya. *Sovremennyye problemy termovyazkoplasticnosti. Trudy II shkoly-seminara*. M., 2007. S. 3–18.
- Iyushin A.A. Plasticnost. Osnovy obshchey matematicheskoy teorii. M.: Izd-vo AN SSSR, 1963. 271 s. (rus.)
- Kadashevich Yu.I., Mosolov A.B. Endokhronnyye teorii plastichnosti: osnovnyye polozheniya, perspektivy razvitiya. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 1989. № 1. S. 161. (rus.)
- Kadashevich Yu.I., Mosolov A.B. O sootnosheniyyakh endokhronnoy teorii plastichnosti s «novoy» meroy vnutrennego vremeni. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1990. Vol. 54. № 4. S. 689. (rus.)
- Palmov V.A. Kolebaniya uprugo-plasticheskikh tel. M.: Nauka. 1976. 328 s. (rus.)
- Kuwabara T., Ishiki M., Kuroda M., Takahashi S. Yield locus and work hardening behavior of a thin-walled steel tube subjected to combined tension-internal pressure. *J. Phys. IV France* 105. 2003. P. 347–354.
- Smith S., Almroth B.O. An experimental investigation of plastic flow under biaxial stress. *Experimental Mechanics*. 1970. № 10. P. 217–224.
- Khan A.S., Parikh Y. Large deformation in polycrystalline copper under combined tension-torsion, loading, unloading and reloading or reverse loading: a study of two incremental theories of plasticity. *International Journal of Plasticity*. 1986. Vol. 2. P. 379–392.
- Rees D.W.A. Research note on a reexamination of neutral loading experiments. *International Journal of Plasticity*. 1988. Vol. 4. P. 91–102.
- Pavlov P.A. Osnovy inzhenernykh raschetov elementov mashin na ustalost i dlitelnyuyu prochnost. L: Mashinostroyeniye, 1988, 251 s. (rus.)
- Melnikov B.E., Izotov I.N., Kuznetsov N.P. Prostranstvennyy uprugoplasticheskiy element dlya opisaniya nestatsionarnogo deformirovaniya. *Izvestiya VNIIG im. B.Ye. Vedenevaya*, 1986. T.197. S. 75–79. (rus.)
- Melnikov B.E., Izotov I.N., Kuznetsov N.P. Raschet i eksperimentalnoye issledovaniye slozhnykh putey uprugoplasticheskogo deformirovaniya. *Problemy prochnosti*. 1990. №8. S. 14–17. (rus.)
- Melnikov B.E., Semenov A.S. Mnogopoverkhnostnaya teoriya plastichnosti s odnoy aktivnoy poverkhnostyu plasticheskikh podatlivostey. *Trudy SPbGTU*. 1991. №144. S. 26–31. (rus.)
- Melnikov B.E., Semenov A.S. Opisanie evolyutsii poverkhnostey ravnoy podatlivosti v mnogopoverkhnostnoy teorii plastichnosti. *Trudy SPbGTU*. 1996. № 456. S. 52–61. (rus.)
- Izotov I.N., Kuznetsov N.P., Melnikov B.E., Mityukov A.G. Uprugoplasticheskoye povedeniye stalnykh trubchatykh obraztsov pri slozhnom trekhosnom nagruzhenii. *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti SPbGTU*. 2003. № 33. S. 114–125. (rus.)
- Izotov I.N., Melnikov B.E., Semenov A.S., Semenov S.G. Opredeleniye svoystv plasticheskikh podatlivostey na nikelovykh obraztsakh. *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti SPbGPU*. 2009. № 2(78). S. 165–174. (rus.)
- Izotov I.N., Yagn Yu.I. Izucheniye plasticheskogo deformirovaniya metalla s deformatsionnoy anizotropiyey, sozdannoy v protsesse predvaritelnogo nagruzheniya. *Doklady AN SSSR*. 1961. T. 139. № 3. S. 576–579. (rus.)
- Izotov I.N. Izucheniye anizotropii metalla sozdannoy nekotorymi vidami plasticheskogo deformirovaniya: Avtoref. diss. ... na soisk. uch. st. kand. tekh. nauk. Leningrad. 1962. (rus.)
- Mroz Z. On the destription of anisotropic work-hardening. *J. Mech. Phys. Solids*. 1967. Vol. 15, № 3. P. 163–175.
- Mroz Z., Norries V.A., Zienkiewicz O.C. An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading. *Int. J. for Numerical and analytical Methods in Geomechanics*. 1978. Vol. 2, № 3. P. 203–221.
- Melnikov B.E., Semenov A.S. Creation and application of hierarchical sequence of material models for numerical analysis of elasto-plastic structures. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1996. Vol. 76. № Suppl. 2. P. 615–616.
- Melnikov B.E., Kuznetsov N.P., Mityukov A.G., Semenov A.S., Semenov S.G. Primeneniye modeli energeticheskoy otsenki prochnosti pri neskol'kikh tsiklakh nagruzheniya v sluchaye slozhnogo neodnorodnogo napryazhennogo sostoyaniya. *Sovremennyye problemy resursa materialov i konstruktsey. Trudy III shkoly-seminara*. M.: Izd-vo MGTU (MAMI), 2009. S. 140–147. (rus.)
- Melnikov B.E., Semenov A.S. Energeticheskaya model nakopleniya povrezhdeniy pri malotsiklovoy ustalosti. *Sb. mater.: XXI Peterburgskiy chteniya po problemam prochnosti. K 100-letiyu so dnya rozhdeniya L.M. Kachanova i Yu.N. Rabotnova*. 2014. S. 59–61. (rus.)
- Kitaeva D.A., Rudaev Y.I. About kinetic equations of dynamic superplasticity model. *Proceedings of the XXXI Summer School «Advanced Problems in Mechanics»*. 2003. St. Petersburg: Polytechnical Publishing House, 2003. P. 172–176.

26. **Semenov A., Semenov S., Nazarenko A., Getsov L.** Computer simulation of fatigue, creep and thermal-fatigue cracks propagation in gas-turbine blades. *Materiali in Tehnologije*. 2012. Vol. 46, № 3. P. 197–203.
27. **Artyukh V.G.** Tochnost predokhraniteley dlya metallurgicheskikh mashin: Mariupol: Izd-vo PGТУ, 2000. 177 s. (rus.)
28. **Melnikov B.E., Semenov A.S.** Multimodel analysis as strategy of reliable description of elastic-plastic deformation processes. *Proc. of IV International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications*. 1995. P. 181–189.
29. **Kasap K.** Uchet otkloneniya ot podobiya deviatorov pri opredelenii raboty plasticheskoy deformatsii. *Periodica Polytechnica Mechanical engineering*. 1971. Vol. 13, № 1. P. 17–25.
30. **Vasin R.A.** Opredelyayushchiye sootnosheniya teorii plastichnosti. *Itoги nauki i tekhniki. Seriya mekhanika deformiruyemogo tela*. 1990. Vol. 21. S. 3–75. (rus.)
31. **Yagn Yu.I., Shishmarev O.A.** Nekotoryye rezultaty issledovaniya granits uprugogo sostoyaniya plasticheski rastyanutykh obraztsov nikelya. *Doklady AN SSSR*. 1958. Vol. 119, № 1. S. 46–48. (rus.)
32. **Semenov A.S.** Analiz termodinamicheskoy sostoyatelnosti mnogopoverkhnostnoy teorii plastichnosti s odnoy aktivnoy poverkhnostyu. *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta*. 2003. № 3(33). S. 103–113. (rus.)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ/AUTHORS

МЕЛЬНИКОВ Борис Евгеньевич – доктор технических наук заведующий кафедрой Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
E-mail: kafedra@ksm.spbstu.ru

MELNIKOV Boris E. – Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University. 29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia.
E-mail: kafedra@ksm.spbstu.ru

СЕМЕНОВ Артем Семенович – кандидат физико-математических наук доцент Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
E-mail: Semenov.Artem@googlemail.com

SEMENOV Artem S. – Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University. 29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia.
E-mail: Semenov.Artem@googlemail.com