DOI: 10.18721/JPM.10107
УДК: 537.534.7

А.С. Бердников[1], И.А. Аверин[2], Н.К. Краснова[2], К.В. Соловьёв[2]

[1]Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация;

[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

КВАЗИПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ, ОДНОРОДНЫЕ ПО ЭЙЛЕРУ

Электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру, являются удобным инструментом для разработки электронно- и ионнооптических систем. Принцип подобия траекторий в таких полях, который впервые применил Ю.К. Голиков, позволяет более осмысленно и целенаправленно синтезировать спектрографические корпускулярно-оптические системы при использовании полей, принадлежащих этому классу. Данная работа посвящена рассмотрению трехмерных гармонических функций, однородных по Эйлеру, которые могут быть представлены в виде полинома конечной степени по одной из переменных.

ОДНОРОДНАЯ ПО ЭЙЛЕРУ ФУНКЦИЯ, ПРИНЦИП ПОДОБИЯ ТРАЕКТОРИЙ, ОПТИКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ.

Введение

Электростатическое поле является однородным по Эйлеру, если напряженность электрического поля $\mathbf{E}(x,y,z)$ как функция пространственных координат удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{E}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^{k-1}\mathbf{E}(x, y, z),$$

где k – порядок однородности, в области, в которой происходит движение заряженных частиц, при всех коэффициентах $\lambda > 0$ [1, 2].

Магнитостатическое поле является однородным по Эйлеру, если индукция магнитного поля $\mathbf{B}(x, y, z)$ как функция пространственных координат удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{B}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^{k-1}\mathbf{B}(x, y, z)$$

в области, в которой происходит движение заряженных частиц, при всех $\lambda > 0$.

При $k \neq 0$ скалярный потенциал, описывающий соответствующее электрическое или магнитное поле, является функцией, однородной по Эйлеру, с порядком однородности, равным k. В случае полей, однородных по Эйлеру с нулевым порядком однородности, скалярный потенциал есть функция, также однородная по Эйлеру с нулевым порядком, с точностью до аддитивной логарифмической добавки вида

$$U_0 \ln(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Однородные по Эйлеру электростатические и магнитные поля являются полезным инструментом для синтеза корпускулярно-оптических систем с априорно гарантированными полезными свойствами [3 – 6]. В частности, на базе этих полей можно сконструировать спектрографические системы с идеальными характеристиками [7 – 12], поскольку выполняется принцип подобия траекторий.

Для нашего исследования выберем электрические поля, обладающие плоскостью симметрии $z = 0$, т. е. электрический потенциал

$$U(x, y, -z) \equiv U(x, y, z)$$

– суть симметричная функция от координаты z. В этом случае нормальная компонента напряженности электрического поля в плоскости симметрии обращается в нуль:

$$E_z(x, y, 0) = -(\partial U(x, y, z)/\partial z)_{z=0} = 0.$$

Магнитные поля в нашем рассмотрении будут антисимметричными, и скалярный магнитный потенциал

$$\Phi(x, y, -z) \equiv -\Phi(x, y, z)$$

– суть антисимметричная функция от координаты z, так что $\Phi(x, y, 0) \equiv 0$, а тангенциальные компоненты индукции магнитного поля в плоскости симметрии обращаются в нуль:

$$B_x(x, y, 0) = -(\partial \Phi(x, y, z)/\partial x)_{z=0} = 0,$$

$$B_y(x, y, 0) = -(\partial \Phi(x, y, z)/\partial y)_{z=0} = 0.$$

В этой работе рассмотрены трехмерные гармонические потенциалы, однородные по Эйлеру, представленные в виде полиномов конечной степени относительно одной из декартовых координат. Аналитическая теория этих потенциалов, названных нами квазиполиномиальными, дается в последовательном и замкнутом виде и обсуждается впервые.

Общая формула для планарных потенциалов, однородных по Эйлеру (частный случай)

Потенциалы полей в электронной оптике обычно строятся как решение тех или иных краевых задач для решения уравнения Лапласа. В случае планарных электрических полей $U(x,y)$ решается двумерное уравнение вида

$$U_{xx} + U_{yy} = 0.$$

Если использовать общую теорию аналитических функций комплексного переменного, теснейшим образом связанную с уравнением Лапласа, то решение можно получить без сложных выкладок.

Для описания двумерных Лапласовых полей в электростатике обычно вводят аналитическую функцию комплексного переменного – комплексный потенциал следующего вида [13]:

$$\Omega(\omega) = \Phi(x, y) + iU(x, y), \ \omega = x + iy, \quad (1)$$

где Φ и U – сопряженные функции, связанные системой Коши – Римана, а именно

$$\Phi_x = U_y, \ \Phi_y = -U_x \quad (2)$$

и

$$\Delta\Phi = 0, \ \Delta U = 0. \quad (2a)$$

Функции Φ и U – суть решения уравнения Лапласа; линии $U = \text{const}$ (эквипотенциали) и $\Phi = \text{const}$ (силовые линии поля) вместе образуют на плоскости ортогональную сетку. Функция $U(x,y)$ – обычный скалярный потенциал, вводимый в электродинамике, через который вектор напряженности поля выражается формулой

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\, U(x, y).$$

С помощью системы (2) и комплексного дифференцирования по ω вектор поля в комплексной форме запишется в виде

$$E = E_1(x, y) + iE_2(x, y) = \overline{\left(i\frac{d\Omega}{d\omega}\right)},$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Теперь построим потенциалы нужных нам двумерных спектрографических сред (потенциалы являются однородными функциями по Эйлеру). Рассмотрим функцию $\Omega(\omega)$ вида

$$\Omega = c\omega^k, \ c = c_1 + ic_2.$$

Полагая

$$\omega = x + iy = re^{i\gamma},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \gamma = \text{arctg}\frac{y}{x},$$

получим

$$\Omega = (c_1 + ic_2)\, r^k(\cos k\gamma + i\sin k\gamma) =$$
$$= \Phi + iU = r^k(c_1\cos k\gamma - c_2\sin k\gamma) +$$

$$+\ ir^k (c_1 \sin k\gamma + c_2 \cos k\gamma),$$

и, следовательно,

$$U = r^k (c_1 \sin k\gamma + c_2 \cos k\gamma). \qquad (3)$$

Выражение (3) дает нам наиболее общий вид двумерной, однородной по Эйлеру гармонической функции. Для дальнейшего нашего исследования выберем две формы: симметричную и антисимметричную. Первая – это структура вида

$$U_C(x, y) = U_0(\sqrt{x^2 + y^2})^k \cos\left(k \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right), \quad (4)$$

причем полагаем, что $c_2 = U_0$, $c_1 = 0$. Вторая, антисимметричная, имеет вид

$$U_S(x, y) = U_0(\sqrt{x^2 + y^2})^k \sin\left(k \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right), \quad (5)$$

и полагаем $c_1 = U_0$, $c_2 = 0$.

В роли двумерных зеркал для электростатического энергоанализатора, работающего в режиме спектрографа, электрические потенциалы вида (2) исследовались в работах [4, 9, 14, 15] для случая, когда потенциал не зависит от координаты z, а основное движение заряженных частиц происходит в плоскости OXY.

Квазиполиномиальные поля (общий случай)

Рассмотрим класс полей с трехмерными однородными потенциалами, на базе которых можно построить спектрографические электрические и магнитные системы. Генерировать новые потенциальные структуры будем по следующей схеме.

Построим трехмерные потенциалы в виде полинома конечной степени $2n$ или $2n - 1$ одной из декартовых координат (например, y) с коэффициентами, которые являются однородными функциями соответствующего порядка от двух других координат: x и z. Основная задача состоит в том, чтобы найти вид этих функций-коэффициентов, полагая, что их аналитическая форма должна быть либо симметричной, как выражение (4), либо антисимметричной, как (5). Указанные потенциалы распадаются на два непересекающихся семейства: полиномы по четным степеням и полиномы по нечетным степеням:

$$U(x, y, z) = U_{0,k}(x, z) - \frac{1}{2!} y^2 U_{2,k-2}(x, z) + \cdots$$
$$\ldots \pm \frac{1}{(2n)!} y^{2n} U_{2n,k-2n}(x, z), \quad (6)$$

$$U(x, y, z) = yU_{1,m-1}(x, z) -$$
$$-\frac{1}{3!} y^3 U_{3,m-3}(x, z) + \cdots \quad (7)$$
$$\ldots \pm \frac{1}{(2n+1)!} y^{2n+1} U_{2n+1,m-2n-1}(x, z).$$

В качестве небольшого отступления от основной канвы изложения отметим следующее. Прямой подстановкой в трехмерное уравнение Лапласа легко проверить, что каждый из двух полиномов по отдельности тоже будет гармонической функцией, если гармоническую функцию (она представляет собой полином конечной степени от координаты y) разбить на сумму двух полиномов по четным и по нечетным степеням y. Этот результат следует из того, что те рекуррентные соотношения для множителей при различных степенях y, которые должны быть выполнены, чтобы полином в целом был гармонической функцией, не пересекаются для четных и для нечетных степеней y.

Далее, если в качестве функций $U_{j,k-j}(x, z)$ или $U_{j,m-j}(x, z)$ выбираем симметричные функции аргумента z с порядком однородности $k - j$ или $m - j$ соответственно, то в результате построения получаем вариант электрического потенциала. Если же функции антисимметричные, то получаем конфигурацию магнитного потенциала.

Фактически можно вести решение по двум независимым направлениям.

Сначала рассмотрим разложение (6) по четным степеням для симметричного потенциала, используя четную функцию в качестве базовой.

Подставим разложение (6) в трехмерное уравнение Лапласа

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$$

и сгруппируем вместе члены при одинаковых степенях y.

В силу равенства нулю всего выражения, коэффициенты при разных степенях y должны обнуляться; тогда получаем цепочку следующих равенств:

$$\frac{\partial^2 U_{0,k}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{0,k}}{\partial z^2} = U_{2,k-2},$$

$$\frac{\partial^2 U_{2,k-2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{2,k-2}}{\partial z^2} = U_{4,k-4},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2 U_{2n-2,k-2n+2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{2n-2,k-2n+2}}{\partial z^2} = U_{2n,k-2n},$$

$$\frac{\partial^2 U_{2n,k-2n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{2n,k-2n}}{\partial z^2} = 0.$$

В качестве генерирующей функции возьмем однородную по Эйлеру гармоническую функцию со степенью однородности $p = k - 2n$, и это будет коэффициент при старшей степени y^{2n}:

$$U_{2n,p}(x,z) = U_0 r^p \cos p\gamma.$$

После этого множитель $U_{2n-2,p+2}(x,z)$ при степени y^{2n-2} можно найти, решив уравнение Пуассона с правой частью $U_{2n,p}(x,z)$ и условием быть симметричной по координате z. Как легко проверить, такая функция будет иметь вид

$$U_{2n-2,p-2}(x,z) = c_1 U_0 r^{p+2} \cos p\gamma + $$
$$+ U_1 r^{p+2} \cos(p+2)\gamma,$$

где U_1 – свободная константа, а c_1 подбирается так, чтобы результат удовлетворял уравнению Пуассона с функцией вида $U_0 r^p \cos p\gamma$ в правой части. Множитель

$$U_{2n-2,p+4}(x,z)$$

при степени y^{2n-2} (8) получится уже в виде

$$U_{2n-2,p-4}(x,z) = d_1 r^{p+4} \cos p\gamma +$$
$$+ d_2 r^{p+4} \cos(p+2)\gamma + U_2 r^{p+4} \cos(p+4)\gamma,$$

где U_1 будет свободной константой.

Константа d_2 подбирается так, чтобы обеспечить совпадение с членом

$$U_1 r^{p+2} \cos(p+2)\gamma$$

в правой части уравнения Пуассона, а константа d_1 – с членом

$$c_1 U_0 r^{p+2} \cos p\gamma$$

в правой части уравнения Пуассона.

Описанная процедура продолжается, пока цепочка рекуррентных вычислений не замкнется на первом члене разложения (8). Формулы для нечетных степеней y и для антисимметричных потенциалов конструируются аналогичным образом.

Свободные константы U_1, U_2, ..., как легко видеть, соответствуют однородным по Эйлеру потенциалам меньшей степени. Эти константы, за исключением старшего коэффициента U_0, можно без ограничения общности положить равными нулю. В итоге конструируем набор линейно независимых базисных функций с последовательно возрастающими степенями полиномов.

Далее приведены выражения для однородных по Эйлеру симметричных и антисимметричных потенциалов, которые могут служить спектрографическими средами; заметим, что порядок однородности k не обязан быть целым числом.

Потенциалы, симметричные по z и с четными степенями y:

$$U_0^+(x,y,z) = \cos k\gamma \cdot r^k;$$

$$U_2^+(x,y,z) = \cos(k-2)\gamma \cdot \left(y^2 r^{k-2} - \frac{r^k}{2(k-1)} \right);$$

$$U_4^+(x,y,z) = \cos(k-4)\gamma \times$$
$$\times \left(y^4 r^{k-4} - \frac{3y^2 r^{k-2}}{(k-3)} + \frac{3r^k}{4(k-3)(k-2)} \right); \qquad (9)$$

$$U_6^+(x,y,z) = \cos(k-6)\gamma \cdot \left(y^6 r^{k-6} - \frac{15 y^4 r^{k-4}}{2(k-5)} + \right.$$
$$\left. + \frac{45 y^2 r^{k-2}}{4(k-5)(k-4)} - \frac{15 r^k}{8(k-5)(k-4)(k-3)} \right);$$

$$U_8^+(x,y,z) = \cos(k-8)\gamma \cdot \left(y^8 r^{k-8} - \frac{14 y^6 r^{k-6}}{(k-7)} + \right.$$
$$+ \frac{105 y^4 r^{k-4}}{2(k-7)(k-6)} - \frac{105 y^2 r^{k-2}}{2(k-7)(k-6)(k-5)} +$$
$$\left. + \frac{105 r^k}{16(k-7)(k-6)(k-5)(k-4)} \right) \dots .$$

Потенциалы, симметричные по z и с нечетными степенями y:

$$U_1^+(x,y,z) = \cos(k-1)\gamma \cdot y r^k;$$

$$U_3^+(x,y,z)=\cos(k-3)\gamma\cdot\left(y^3r^{k-3}-\frac{3yr^{k-1}}{2(k-2)}\right);$$

$$U_5^+(x,y,z)=\cos(k-5)\gamma\times$$
$$\times\left(y^5r^{k-5}-\frac{5y^3r^{k-3}}{(k-4)}+\frac{15yr^{k-1}}{4(k-4)(k-3)}\right); \quad (10)$$

$$U_7^+(x,y,z)=\cos(k-7)\gamma\cdot\left(y^7r^{k-7}-\frac{21y^5r^{k-5}}{2(k-6)}+\right.$$
$$\left.+\frac{105y^3r^{k-3}}{4(k-6)(k-5)}-\frac{105yr^{k-1}}{8(k-6)(k-5)(k-4)}\right);$$

$$U_9^+(x,y,z)=\cos(k-9)\gamma\cdot\left(y^9r^{k-9}-\frac{18y^7r^{k-7}}{(k-8)}+\right.$$
$$+\frac{189y^5r^{k-5}}{2(k-8)(k-7)}-\frac{315y^3r^{k-3}}{2(k-8)(k-7)(k-6)}+$$
$$\left.+\frac{945yr^k}{16(k-8)(k-7)(k-6)(k-5)}\right)\ldots .$$

Потенциалы, антисимметричные по z и с четными степенями y:

$$U_0^-(x,y,z)=\sin k\gamma\cdot r^k;$$

$$U_2^-(x,y,z)=\sin(k-2)\gamma\cdot\left(y^2r^{k-2}-\frac{r^k}{2(k-1)}\right);$$

$$U_4^-(x,y,z)=\sin(k-4)\gamma\times$$
$$\times\left(y^4r^{k-4}-\frac{3y^2r^{k-2}}{(k-3)}+\frac{3r^k}{4(k-3)(k-2)}\right); \quad (11)$$

$$U_6^-(x,y,z)=\sin(k-6)\gamma\cdot\left(y^6r^{k-6}-\frac{15y^4r^{k-4}}{2(k-5)}+\right.$$
$$\left.+\frac{45y^2r^{k-2}}{4(k-5)(k-4)}-\frac{15r^k}{8(k-5)(k-4)(k-3)}\right);$$

$$U_8^-(x,y,z)=\sin(k-8)\gamma\cdot\left(y^8r^{k-8}-\frac{14y^6r^{k-6}}{(k-7)}+\right.$$
$$+\frac{105y^4r^{k-4}}{2(k-7)(k-6)}-\frac{105y^2r^{k-2}}{2(k-7)(k-6)(k-5)}+$$
$$\left.+\frac{105r^k}{16(k-7)(k-6)(k-5)(k-4)}\right)\ldots .$$

Потенциалы, антисимметричные по z и с нечетными степенями y:

$$U_1^-(x,y,z)=\sin(k-1)\gamma\cdot yr^k;$$

$$U_3^-(x,y,z)=\sin(k-3)\gamma\cdot\left(y^3r^{k-3}-\frac{3yr^{k-1}}{2(k-2)}\right);$$

$$U_5^-(x,y,z)=\sin(k-5)\gamma\times$$
$$\times\left(y^5r^{k-5}-\frac{5y^3r^{k-3}}{(k-4)}+\frac{15yr^{k-1}}{4(k-4)(k-3)}\right); \quad (12)$$

$$U_7^-(x,y,z)=\sin(k-7)\gamma\cdot\left(y^7r^{k-7}-\frac{21y^5r^{k-5}}{2(k-6)}+\right.$$
$$\left.+\frac{105y^3r^{k-3}}{4(k-6)(k-5)}-\frac{105yr^{k-1}}{8(k-6)(k-5)(k-4)}\right);$$

$$U_9^-(x,y,z)=\sin(k-9)\gamma\cdot\left(y^9r^{k-9}-\frac{18y^7r^{k-7}}{(k-8)}+\right.$$
$$+\frac{189y^5r^{k-5}}{2(k-8)(k-7)}-\frac{315y^3r^{k-3}}{2(k-8)(k-7)(k-6)}+$$
$$\left.+\frac{945yr^k}{16(k-8)(k-7)(k-6)(k-5)}\right).$$

На рис. 1 – 4 представлены эквипотенциальные поверхности полей из списка, представленного формулами (9) – (12).

Симметричность или антисимметричность функции по соответствующей координате полностью эквивалентны разложению потенциала в ряд только по четным или только по нечетным степеням координаты. Поэтому при синтезе корпускулярно-оптических систем нужного типа можно использовать выражения (9) – (12) в «развернутом» варианте, когда координаты y и z меняются местами. Однако главной плоскостью, в которой происходит основное движение частиц, по-прежнему остается плоскость OXY. Такие развернутые конфигурации двумерных электростатических и магнитостатических зеркал применительно к задаче синтеза электронных спектрографов с идеальными характеристиками рассматривались, например, в работах [4, 7 – 10].

Заключение

В работе рассмотрен новый класс потенциалов для электрических и магнитных полей, которые можно использовать для создания спектрографических систем. Указанные потенциалы записываются в ана-

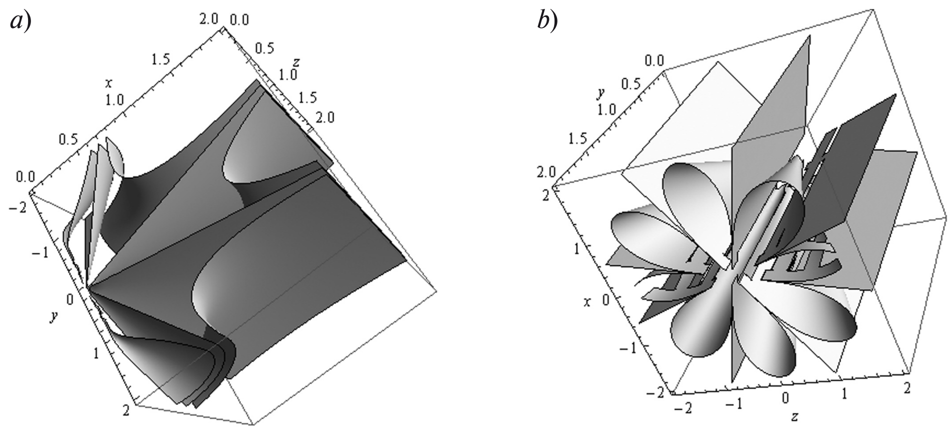

Рис. 1. Графическое представление эквипотенциальных поверхностей полей для потенциала $U_4^+(x,y,z)$ при $k = 10/3$ (a) и $k = 1/3$ (b) (см. формулу (9))

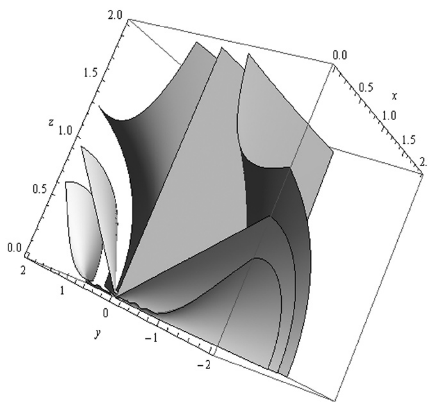

Рис. 2. Графическое представление эквипотенциальных поверхностей полей для потенциала $U_3^+(x,y,z)$ при $k = 7/3$ (см. формулу (10))

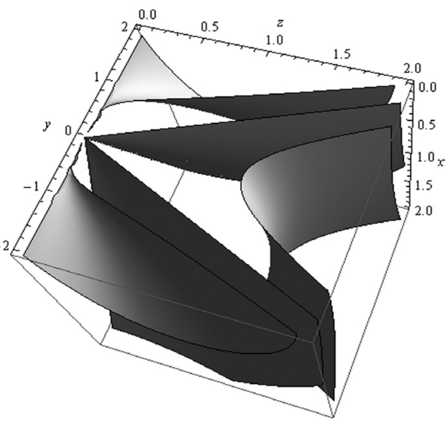

Рис. 3. Графическое представление эквипотенциальных поверхностей полей для потенциала $U_2^-(x,y,z)$ при $k = 5/3$ (см. формулу (11))

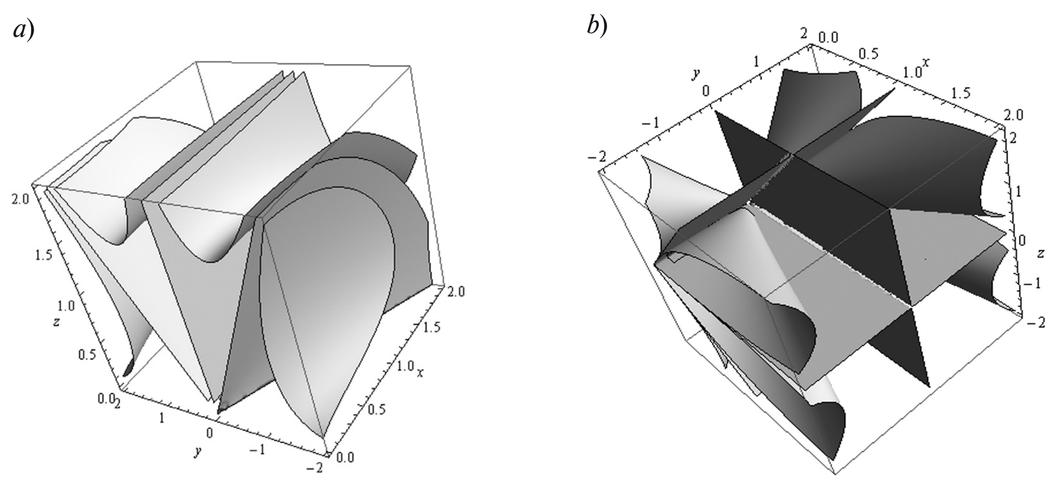

Рис. 4. Графическое представление эквипотенциальных поверхностей полей для потенциала $U_3^-(x,y,z)$ при $k = 11/3$ (a) и $k = 1/6$ (b) (см. формулу (12))

литическом виде как полиномы конечной степени по одной из декартовых координат, в то время как коэффициенты полинома представляют собой функции двух оставшихся координат и не обязательно имеют полиномиальный вид, поэтому полученные аналитические представления потенциалов названы квазиполиномами.

Коэффициенты квазиполинома были найдены в соответствии со следующими требованиями:

во-первых, потенциал есть гармоническая функция, т. е. аналитическое выражение удовлетворяло трехмерному уравнению Лапласа;

во-вторых, потенциал есть однородная по Эйлеру функция с заданным порядком однородности.

В работе показано, что вычисление коэффициентов квазиполинома сводится к цепочке двумерных уравнений Пуассона, где неизвестной функцией является текущий коэффициент, а в правой части находится коэффициент квазиполинома предыдущей степени. Полученная цепочка рекуррентных уравнений оказывается разрешимой в однородных функциях и при этом корректно замыкается на самом младшем коэффициенте квазиполинома.

Следует отметить, что процедура генерации квазиполинома в некотором смысле является обратной к процедуре разложения гармонической функции в ряд Тейлора в окрестности плоскости симметрии или антисимметрии по заданному ее поведению вдоль плоскости симметрии или антисимметрии [1, 2]. Так, здесь для коэффициентов разложения в ряд Тейлора мы начинаем с самого младшего полиномиального коэффициента и постепенно продвигаемся рекуррентным образом к полиномиальным коэффициентам все более старшего порядка. При этом процедура, вообще говоря, оказывается бесконечной, если только поведение функции вдоль плоскости симметрии (антисимметрии) сама по себе не оказывается полиномом от двух переменных. В отличие от этого процесса, конструирование квазиполиномов начинается с самого старшего коэффициента и постепенно продвигается рекуррентным образом к полиномиальным коэффициентам все более низшего порядка, обрываясь на самом младшем члене через конечное число шагов. Отличается указанная процедура и от метода использования производящей функции применительно к ортогональным полиномам общего вида, например формула Родрига для полиномов Эрмита, Лагерра, Лежандра, Чебышева, Якоби, Гегенбауэра, Сонина и др. (см. монографию [16]).

Квазиполиномиальные гармонические функции могут конструироваться по такой же в точности схеме и без привязки к условию однородности по Эйлеру у результирующего выражения. Получаемые при этом аналитические выражения, естественно, будут более общего вида, чем приводимые здесь формулы. Этот случай здесь не рассматривается, хотя, по всей видимости, он также приводит к любопытным новым классам потенциалов электрических и магнитных полей, допускающих представление в виде аналитических формул.

Посвящение

Авторы посвящают эту статью памяти нашего общего учителя и наставника Юрия Константиновича Голикова, создателя и бессменного руководителя лаборатории корпускулярной оптики кафедры физической электроники Ленинградского политехнического института (ныне Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого). Его вклад в идеологию синтеза спектрографических и отклоняющих электронно- и ионнооптических систем с помощью полей, однородных по Эйлеру, является определяющим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 тт. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.

[2] **Смирнов В.И.** Курс высшей математики: в 5 тт. Т. 1. М.: Наука, 1974. 480 с.

[3] **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической

физики. 2011. Т. 81. № 2. С. 9–15.

[4] **Краснова Н.К.** Двумерные степенные электронные спектрографы с плоскостью симметрии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 6. С. 97–103.

[5] **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 2. С. 91–94.

[6] **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 3. С. 44–47.

[7] **Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.** Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. I. // Масс-спектрометрия. 2015. Т. 12. № 4. С. 272–281.

[8] **Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.** Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. II. // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13. № 1. С. 11–20.

[9] **Аверин И.А.** Электростатические и магнитостатические электронные спектрографы с однородными по Эйлеру потенциалами, характеризуемыми нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2015. Т. 25. № 3. С. 35–44.

[10] **Бердников А.С., Аверин И.А.** Новый подход к разработке ионно-оптических схем статических масс-спектрографов на основе неоднородных магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 1. С. 89–95.

[11] **Аверин И.А., Бердников А.С.** Краевые поля бессеточных электронных спектрографов с однородными по Эйлеру электростатическими полями // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 1. С. 5–8.

[12] **Краснова Н.К.** Идеальная фокусировка в теории электростатических спектрографов // Журнал технической физики. 2012. Т. 82. № 8. С. 105–109.

[13] **Лаврентьев М.А.. Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958. 688 с.

[14] **Краснова Н.К.** Теория и синтез диспергирующих и фокусирующих электронно-оптических сред. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. 01.04.04; защищена 22 мая 2014 г.: утв. 08.12.2014. С.-Петербург, 2013. 259 с.

[15] **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2010. 409 с.

[16] **Сегё Г.** Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр. 26
asberd@yandex.ru

АВЕРИН Игорь Андреевич – *аспирант кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
agreer@bk.ru

КРАСНОВА Надежда Константиновна – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
n.k.krasnova@mail.ru

СОЛОВЬЁВ Константин Вячеславович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru

Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. QUASI-POLYNOMIAL 3D ELECTRIC AND MAGNETIC POTENTIALS HOMOGENEOUS IN EULER'S SENSE.

Electric and magnetic fields homogeneous in Euler's sense are a useful instrument for designing the systems of charge particle optics. The similarity principle for the charged particle trajectories in these fields was applied by Yu.K. Golikov for the first time to create spectrographic charge particle optical systems in a more systematic and intelligence way when using the fields being homogeneous in Euler's sense. This paper studies the Laplace potentials homogeneous in Euler's sense. The coefficients of the polynomials are functions of the two rest coordinates; they are presented not by the polynomial but ought to be the functions harmonic and homogeneous in Euler's sense. We have solved a finite chain of Poisson equations starting from the highest coefficients. By means of the proposed procedure we obtained new classes of potentials which provided a base for electric and magnetic spectrograph systems.

FUNCTION HOMOGENEOUS IN EULER'S SENSE, SIMILARITY PRINCIPLE, CHARGED PARTICLE TRAJECTORY.

REFERENCES

[1] **G.M. Fikhtengolts,** Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [Course of differential and integral calculus]: Vol. 1, Moscow, Fizmatlit, 2001.

[2] **V.I. Smirnov,** Kurs vysshey matematiki [Course of higher mathematics], Vol. 1, Moscow, Nauka, 1974.

[3] **Yu.K. Golikov, N.K. Krasnova,** Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography, Technical Physics. 57 (2) (2011) 164– 170.

[4] **N.K. Krasnova,** Two-dimensional power-type electronic spectrographs with a symmetry plane, Technical Physics. 57 (6) (2011) 843–849.

[5] **P.G. Gabdullin, Yu. K. Golikov, N.K. Krasnova, S.N. Davydov,** The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers. I , Technical Physics. 45 (2) (2000) 232–235.

[6] **P.G. Gabdullin, Yu.K. Golikov, N.K. Krasnova, S.N. Davydov,** Application of Donkin's formula in the theory of energy analyzers: Part II, Technical Physics 45 (3) (2000) 330–333.

[7] **A.S. Berdnikov, I.A. Averin, Yu.K. Golikov,** Staticheskiye mass-spektrografy novogo tipa, ispolzuyushchiye elektricheskiye i magnitnyye polya, odnorodnyye po Eyleru. I. [Static mass spectrographs of new type using electric and magnetic fields homogeneous in Euler's sense. I.], Mass-spektrometriya. 12 (4) (2015) 272–281.

[8] **A.S. Berdnikov, I.A. Averin, Yu.K. Golikov,** Staticheskiye mass-spektrografy novogo tipa, ispolzuyushchiye elektricheskiye i magnitnyye polya, odnorodnyye po Eyleru. II. [Static mass spectrographs of new type using electric and magnetic fields homogeneous in Euler's sense. II.], Mass-spektrometriya. 13 (1) (2016) 11–20.

[9] **I.A. Averin,** Electrostatic and magnetostatic electron spectrographs based on Euler' homogeneous potentials with non-integer orders, Nauchnoye priborostroyeniye. 25 (3) (2015) 35–44.

[10] **A.S. Berdnikov, I.A. Averin,** Novyy podkhod k razrabotke ionno-opticheskikh skhem staticheskikh mass-spektrografov na osnove neodnorodnykh magnitnykh poley, odnorodnykh po Eyleru [New approach to design ion optical schemes for mass spectrographs based on nonuniform magnetic fields homogeneous in Euler's sense], Uspekhi prikladnoy fiziki. 4 (1) (2016) 89–95.

[11] **I.A. Averin, A.S. Berdnikov,** Krayevyye polya bessetochnykh elektronnykh spektrografov s odnorodnymi po Eyleru elektrostaticheskimi polyami [Boundary fields of non-grid electron spectrographs with homogeneous in Euler's sense electrostatic fields], Uspekhi prikladnoy fiziki. 4 (1) (2016) 5–8.

[12] **N.K. Krasnova,** Ideal focusing in the theory of electrostatic spectrographs, Technical Physics. 58 (8) (2012) 1143–1147.

[13] **M.A. Lavrentyev, B.V. Shabat,** Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo [Methods of theory of functions of complex variable], Moscow, Fizmatgiz, 1958.

[14] **N.K. Krasnova,** Teoriya i sintez dispergiruyushchikh i fokusiruyushchikh elektronno-opticheskikh sred [Theory and synthesis of dispersion and focusing electron optics sphere], dis. ...dokt. fiz.-mat. nauk: St. Petersburg, 2013.

[15] **Yu. K. Golikov, N.K. Krasnova,** Teoriya sinteza elektrostaticheskikh energoanalizatorov [Theory of synthesis of electrostatic energy analyzers], St. Petersburg, Izdatelstvo Politekhnicheskogo Universiteta, 2010.

[16] **G. Sege,** Ortogonalnyye mnogochleny [Orthogonal polynomials], Moscow, GIFML, 1962.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.
Institute for Analytical Instrumentation RAS
26 Rizskiy Ave., 190103, St. Petersburg, Russian Federation
asberd@yandex.ru

AVERIN Igor A.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
agreer@bk.ru

KRASNOVA Nadezhda K.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
n.k.krasnova@mail.ru

SOLOVYEV Konstantin V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
k-solovyev@mail.ru