



DOI: 10.18721/JPM.10108

УДК 537.534.7

*Н.К. Краснова<sup>1</sup>, А.С. Бердников<sup>2</sup>,  
К.В. Соловьёв<sup>1</sup>, И.А. Аверин<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
г. Санкт-Петербург, Российская Федерация;

<sup>2</sup>Институт аналитического приборостроения РАН,  
г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

## О КВАЗИПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Спектрографические электронно- и ионно-оптические структуры в значительной мере расширяют возможности современного энерго- и масс-анализа. Электрические и магнитные поля, потенциалы которых выражаются однородными по Эйлеру функциями, являются эффективным инструментом для разработки новых спектроаналитических систем с заранее заданными функциональными характеристиками. В работе формулируются и обсуждаются методы построения трехмерных гармонических структур, однородных по Эйлеру, которые могут быть представлены в виде полинома конечной степени по одной из переменных. Используемые строго математические подходы значительно расширяют класс квазиполиномиальных потенциалов, обогащая практику современного приборостроения новыми спектроаналитическими конфигурациями.

ОДНОРОДНЫЕ ПО ЭЙЛЕРУ ФУНКЦИИ, ПРИНЦИП ПОДОБИЯ ТРАЕКТОРИЙ, ФОРМУЛА ТОМСОНА, УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ.

### Введение

Данная статья продолжает исследование спектрографических корпускулярно-оптических структур, на базе которых можно создавать эффективные приборы как с электрическим, так и с магнитным полями. Потенциальные структуры этих полей должны обладать одним важным свойством: быть однородными по Эйлеру [1, 2]. По нашему мнению, это свойство является основным условием для конструирования электрических и магнитных спектрографов с рекордными рабочими характеристиками: разрешением, чувствительностью, пропусканием, светосилой, дисперсией и другими, при компактности и малогабаритности ползающих электродных конфигураций.

Свойство однородности выражается в следующей аналитической форме. Однородность по Эйлеру  $n$ -ой кратности для непрерывной функции с тремя аргументами, которой является потенциал  $U(x, y, z)$ , определяется функциональным тождеством

$$U(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k U(x, y, z), \quad (1)$$

где  $k$  – произвольное вещественное число.

Если функция  $U(x, y, z)$  дифференцируема, то ее можно охарактеризовать дифференциальным уравнением первого порядка вида

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} = kU(x, y, z). \quad (2)$$

Наличие подобных траекторий заряженных частиц в полях с такой потенциальной структурой, как следствие указанного свойства, позволяет конструировать анализаторы с многоканальным способом регистрации частиц по параметру – энергии (электрические спектрографы) или массе (магнитные спектрографы). За последние десять лет в рамках единой идеологии создания спектрографических приборов предложен целый ряд аналитических методов [3 – 8], на основе которых построены различные классы полей, изучены свойства отдельных представителей этих классов

и предложены конкретные схемы спектрографов для различных приложений энерго- и масс-анализа [9 – 14].

Впервые в нашей работе [15] предложена аналитическая теория трехмерных гармонических потенциалов, однородных по Эйлеру, которые представляются в виде полиномов конечной степени относительно одной из декартовых координат. Эти потенциалы названы нами квазиполиномиальными. В настоящей работе нашли отражение методы и подходы, которые позволяют обогатить новыми структурами класс квазиполиномиальных потенциалов с идеальными электронно-оптическими характеристиками.

### Натуральные порядки однородности (специальный случай)

В упомянутой выше работе [15] предложен новый алгоритм для синтеза трехмерных потенциальных структур с целью создания эффективных электрических и магнитных спектрографов на их основе. Эту методику можно применять для синтеза потенциальных структур с однородными по Эйлеру функциями с произвольным порядком однородности  $k$ . Однако получить структуры с однородными по Эйлеру функциями с целочисленным порядком однородности  $k$  по этому алгоритму не удастся. На одном из этапов данного алгоритма синтеза следует изменить утверждение о выбираемом частном решении. Поэтому ниже приведем поэтапное выполнение процедуры нахождения искомого трехмерных потенциальных структур.

**Первый этап.** Строим трехмерный потенциал в виде полинома конечной степени  $2n$  или  $2n - 1$  по координате  $y$  с коэффициентами, которые являются однородными функциями соответствующего порядка от двух других координат:  $x$  и  $z$ . Здесь возможно построение потенциала как в четной, так и в нечетной форме. Они распадаются на два непересекающихся семейства:

$$U(x, y, z) = U_{0,k}(x, z) - \frac{1}{2!} y^2 U_{2,k-2}(x, z) + \dots \quad (3)$$

$$\dots \pm \frac{1}{(2n)!} y^{2n} U_{2n,k-2n}(x, z),$$

$$U(x, y, z) = y U_{1,m-1}(x, z) - \frac{1}{3!} y^3 U_{3,m-3}(x, z) + \dots \quad (4)$$

$$\dots \pm \frac{1}{(2n+1)!} y^{2n+1} U_{2n+1,m-2n-1}(x, z).$$

**Второй этап.** Подстановка желаемого разложения (3) или (4) в трехмерное уравнение Лапласа

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0 \quad (5)$$

и группировка членов при одинаковых степенях  $y$  приводит к тому, что уравнение распадается на цепочку равенств, по форме представляющих собой уравнения Пуассона для соответствующих функций-коэффициентов. Исключением является равенство, отвечающее коэффициенту при старшей степени полинома. В результате получаем набор равенств для разложения (3):

$$\frac{\partial^2 U_{0,k}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{0,k}}{\partial z^2} = U_{2,k-2},$$

$$\frac{\partial^2 U_{2,k-2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{2,k-2}}{\partial z^2} = U_{4,k-4},$$

....., (6)

$$\frac{\partial^2 U_{2n-2,k-2n+2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{2n-2,k-2n+2}}{\partial z^2} = U_{2n,k-2n},$$

$$\frac{\partial^2 U_{2n,k-2n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{2n,k-2n}}{\partial z^2} = 0,$$

а также другого разложения, дающего нечетный полином (4):

$$\frac{\partial^2 U_{1,m-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{1,m-1}}{\partial z^2} = U_{3,m-3},$$

$$\frac{\partial^2 U_{3,m-3}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{3,m-3}}{\partial z^2} = U_{5,m-5},$$

....., (7)

$$\frac{\partial^2 U_{2n-3,m-2n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{2n-3,m-2n+1}}{\partial z^2} = U_{2n-1,m-2n-1},$$

$$\frac{\partial^2 U_{2n-1,m-2n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{2n-1,m-2n-1}}{\partial z^2} = 0.$$

**Третий этап.** Решаем уравнение Лапласа, последнее в данной цепочке, и в качестве

генерирующей функции берем однородную по Эйлеру гармоническую функцию со степенью однородности  $p = k - 2n$  (в случае построения четного полинома) или  $s = m - 2n - 1$  (для нечетного полинома):

$$U_{2n,p}(x, z) = c_0(\gamma) r^p$$

или

$$U_{2n+1,s}(x, z) = c_0(\gamma) r^s,$$

где  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ ,  $\gamma = \arctg(z/x)$ ;  $c_0(\gamma)$  – неизвестная функция, четная или нечетная по аргументу  $\gamma$  (вместо  $c_0 r^p \cos p\gamma$  либо  $c_0 r^s \sin s\gamma$ , т. е. вместо тех функций, которые мы использовали в работе [15]).

**Четвертый и последующие этапы.** Далее находим все оставшиеся множители

$$U_{2n-j,p+j}(x, z) (U_{2n-j+1,s+j}(x, z))$$

при меньших степенях  $y$ , решая последовательно соответствующие уравнения Пуассона с правой частью, найденной на предыдущем этапе и отвечающей условию быть симметричной или антисимметричной по координате  $z$ .

Заметим, что неопределенные функции-коэффициенты мы будем искать как частное решение, представленное в следующей форме:

$$c_j(\gamma) r^{p-j}.$$

Эта форма имеет самый общий вид для функции двух переменных, однородных по Эйлеру с соответствующим порядком однородности.

Описанная процедура продолжается, пока цепочка рекуррентных вычислений не замкнется на первом члене разложения (3) или (4).

Кроме того, возможны варианты, когда множитель при старшей степени  $y$  оказывается гармонической функцией с нулевым порядком однородности и, следовательно, будет задаваться формулами

$$U(x, z) = U_0 = \text{const}$$

или

$$U(x, z) = U_0 \arctg\left(\frac{z}{x}\right) = U_0 \gamma$$

вместо формул

$$\begin{aligned} U(x, z) &= U_0 (\sqrt{x^2 + z^2})^k \cos\left(k \arctg\left(\frac{z}{x}\right)\right) = \\ &= U_0 r^k \cos k\gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(x, z) &= U_0 (\sqrt{x^2 + z^2})^k \sin\left(k \arctg\left(\frac{z}{x}\right)\right) = \\ &= U_0 r^k \sin k\gamma, \end{aligned}$$

как это было в случае с произвольным значением порядка однородности  $k$  или  $m$  [15].

Окончательный результат представлен далее (записаны только те случаи, которые принципиально отличаются от общих формул, приведенных в статье [15]).

*Потенциалы, симметричные по  $z$  и с четными степенями  $y$*

$$k = 0 : U_0^+(x, y, z) = 1;$$

$$k = 1 : U_2^+(x, y, z) = \frac{(y^2 - r^2) \cos \gamma}{r} - r \gamma \sin \gamma;$$

$$k = 2 : U_2^+(x, y, z) = y^2 - \frac{1}{2} r^2;$$

$$\begin{aligned} k = 2 : U_4^+(x, y, z) &= \\ &= \cos 2\gamma \left( \frac{y^4}{r^2} + 3y^2 - \frac{3}{4} r^2 \right) - \frac{3}{2} r^2 \gamma \sin 2\gamma; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3 : U_4^+(x, y, z) &= \cos \gamma \left( \frac{y^4}{r} - 6y^2 r + \frac{9}{8} r^3 \right) + \\ &+ \left( \frac{3}{2} r^3 - 6y^2 r \right) \gamma \sin \gamma + r^3 \cos 3\gamma; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3 : U_6^+(x, y, z) &= \cos 3\gamma \left( \frac{y^6}{r^3} + \frac{15y^4}{4r} + \right. \\ &\left. + \frac{45y^2 r}{8} - \frac{5}{8} r^3 \right) - \frac{15}{8} r^3 \gamma \sin 3\gamma; \end{aligned}$$

$$k = 4 : U_4^+(x, y, z) = y^4 - 3y^2 r^2 + \frac{3}{8} r^4; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} k = 4 : U_6^+(x, y, z) &= \\ &= \cos 2\gamma \left( \frac{y^6}{r^2} + \frac{15}{2} y^4 - \frac{45}{4} y^2 r^2 + \frac{5}{8} r^4 \right) + \\ &+ \left( \frac{15}{4} r^4 - \frac{45}{2} y^2 r^2 \right) \gamma \sin 2\gamma + \frac{45}{32} r^4 \cos 4\gamma; \end{aligned}$$

$$k = 4 : U_8^+(x, y, z) = \cos 4\gamma \left( \frac{y^8}{r^4} + \frac{14}{3} \frac{y^6}{r^2} + \frac{35}{4} y^4 + \frac{35}{4} y^2 r^2 - \frac{35}{64} r^4 \right) - \frac{35}{16} r^4 \gamma \sin 4\gamma.$$

*Потенциалы, симметричные по z и с нечетными степенями y*

$$\begin{aligned} k = 1 : U_1^+(x, y, z) &= y; \\ k = 2 : U_3^+(x, y, z) &= \\ &= \frac{y^3 - 3yr^2}{r} \cos \gamma - 3yr \gamma \sin \gamma; \\ k = 3 : U_5^+(x, y, z) &= y^3 - \frac{3}{2} yr^2; \\ k = 3 : U_5^+(x, y, z) &= \\ &= \left( \frac{y^5}{r^2} + 5y^3 - \frac{15}{4} yr^2 \right) \cos 2\gamma - \frac{15}{2} yr^2 \gamma \sin 2\gamma; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} k = 4 : U_5^+(x, y, z) &= \\ &= \left( \frac{y^5}{r} - 10y^3 r + \frac{45}{8} yr^3 \right) \cos \gamma + \\ &+ \left( \frac{15}{2} yr^3 - 10y^3 r \right) \gamma \sin \gamma + 5yr^3 \cos 3\gamma; \\ k = 4 : U_7^+(x, y, z) &= \left( \frac{y^7}{r^3} + \frac{21}{4} \frac{y^5}{r} + \right. \\ &+ \left. \frac{105}{8} y^3 r - \frac{35}{8} yr^3 \right) \cos 3\gamma - \frac{105}{8} yr^3 \gamma \sin 3\gamma. \end{aligned}$$

*Потенциалы, антисимметричные по z и с четными степенями y*

$$\begin{aligned} k = 0 : U_0^-(x, y, z) &= \gamma; \\ k = 1 : U_2^-(x, y, z) &= \frac{y^2 \sin \gamma}{r} + r \gamma \cos \gamma; \\ k = 2 : U_2^-(x, y, z) &= \left( y^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) \gamma; \\ k = 2 : U_4^-(x, y, z) &= \\ &= \sin 2\gamma \left( \frac{y^4}{r^2} + 3y^2 \right) + \frac{3r^2}{2} \gamma \cos 2\gamma; \\ k = 3 : U_4^-(x, y, z) &= \sin \gamma \left( \frac{y^4}{r} - \frac{3}{8} r^3 \right) + \\ &+ \left( 6y^2 r - \frac{3}{2} r^3 \right) \gamma \cos \gamma; \end{aligned} \quad (10)$$

$$k = 3 : U_6^-(x, y, z) = \sin 3\gamma \left( \frac{y^6}{r^3} + \frac{15y^4}{4r} + \frac{45y^2 r}{8} \right) + \frac{15}{8} r^3 \gamma \cos 3\gamma;$$

$$k = 4 : U_4^-(x, y, z) = \left( y^4 - 3y^2 r^2 + \frac{3}{8} r^4 \right) \gamma;$$

$$\begin{aligned} k = 4 : U_6^-(x, y, z) &= \\ &= \sin 2\gamma \left( \frac{y^6}{r^2} + \frac{15}{2} y^4 - \frac{45}{4} y^2 r^2 - \frac{5}{8} r^4 \right) + \\ &+ \left( \frac{45}{2} y^2 r^2 - \frac{15}{4} r^4 \right) \gamma \cos 2\gamma + \frac{45}{32} r^4 \sin 4\gamma; \end{aligned}$$

$$k = 4 : U_8^-(x, y, z) = \sin 4\gamma \left( \frac{y^8}{r^4} + \frac{14}{3} \frac{y^6}{r^2} + \frac{35}{4} y^4 + \frac{35}{4} y^2 r^2 \right) + \frac{35}{16} r^4 \gamma \cos 4\gamma.$$

*Потенциалы, антисимметричные по z и с нечетными степенями y*

$$\begin{aligned} k = 1 : U_1^-(x, y, z) &= y \gamma; \\ k = 2 : U_3^-(x, y, z) &= \frac{y^3}{r} \sin \gamma + 3yr \gamma \cos \gamma; \\ k = 3 : U_3^-(x, y, z) &= \left( y^3 - \frac{3}{2} yr^2 \right) \gamma; \\ k = 3 : U_5^-(x, y, z) &= \\ &= \left( \frac{y^5}{r^2} + 5y^3 \right) \sin 2\gamma + \frac{15}{2} yr^2 \gamma \cos 2\gamma; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} k = 4 : U_5^-(x, y, z) &= \left( \frac{y^5}{r} - \frac{15}{8} yr^3 \right) \sin \gamma + \\ &+ \left( 10y^3 r - \frac{15}{2} yr^3 \right) \gamma \cos \gamma; \\ k = 4 : U_7^-(x, y, z) &= \\ &= \left( \frac{y^7}{r^3} + \frac{21}{4} \frac{y^5}{r} + \frac{105}{8} y^3 r \right) \sin 3\gamma + \\ &+ \frac{105}{8} yr^3 \gamma \cos 3\gamma. \end{aligned}$$

Полученный набор потенциалов, однородных по Эйлеру с целочисленными значениями порядка однородности  $k$ , является дополнением к семейству квазиполиномиальных трехмерных потенциалов, однородных с любыми другими порядками однород-

ности [15]. Но класс квазиполиномиальных трехмерных структур, представленных в аналитической форме, можно расширить за счет применения преобразований, которые сохраняют, прежде всего, гармоничность функций и однородность по Эйлеру; при этом порядок однородности может отличаться от данного изначально.

#### Вращение, масштабирование и параллельный перенос системы координат

Как известно, уравнение Лапласа сохраняет свою форму при масштабировании, повороте и смещении системы декартовых координат. Кроме того, масштабирование и вращение сохраняют свойство однородности функции. Поэтому, делая замену переменных типа трехмерного вращения общего вида [16], можно из имеющихся аналитических выражений для однородных гармонических потенциалов получить, вообще говоря, новые аналитические выражения для однородных гармонических потенциалов. Впрочем, вращение в плоскости  $xz$ , как легко понять, приведет лишь к линейной комбинации уже имеющихся симметричных и несимметричных квазиполиномов.

Когда порядок однородности будет целым числом, а квазиполином — обычным гармоническим полиномом, принципиально новых аналитических выражений для трехмерных потенциалов этим способом получить не удастся, так как все получаемые выражения (за исключением перестановок координатных осей) будут линейными комбинациями с постоянными коэффициентами от уже имеющихся полиномиальных выражений. Однако в случае, когда порядки однородности не являются целыми числами или когда квазиполином не является гармоническим полиномом, с помощью этого способа можно получить достаточно интересные новые аналитические выражения для трехмерных потенциалов электрических и магнитных полей.

Также перспективной в этом плане выглядит возможность использовать линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из однородных гармонических функций, которые генерируются

с помощью независимых вращений системы координат. Здесь следует отметить, что для чистых квазиполиномов подобная линейная комбинация снова окажется уже известным нам квазиполиномом.

#### Формула Томсона (лорда Кельвина)

В трактате [17] показано, что если  $U(x, y, z)$  — произвольная гармоническая функция, то функция

$$U^*(x, y, z) = \frac{1}{\rho} U\left(\frac{x}{\rho^2}, \frac{y}{\rho^2}, \frac{z}{\rho^2}\right), \quad (12)$$

где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , тоже будет гармонической.

Замена переменных

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, & y &\rightarrow \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ z &\rightarrow \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \quad (13)$$

представляет собой инверсию в шаре и сохраняет однородность и гармоничность функции. Указанное преобразование может использоваться при синтезе электронно- и ионнооптических систем, что продемонстрировано в работах [3, 4].

Факт сохранения гармоничности трехмерной функции  $U^*(x, y, z)$  можно проверить прямой подстановкой формулы (12) в трехмерное уравнение Лапласа (5). Кроме того, стоит отметить, что формула (12) не является единственной формулой такого типа. Так, добавив к инверсии преобразование трехмерного поворота относительно начала координат, в общем виде допускающее параметризацию с помощью трех независимых параметров [16], получим формулу вида (12), в которой числители у аргументов функции  $U$  будут линейными комбинациями переменных  $x, y, z$  с постоянными коэффициентами.

Отличительным свойством формулы Томсона является такое, что если  $U(x, y, z)$  — однородная по Эйлеру функция с порядком однородности  $k$ , то факт однородности функции сохраняется, и при этом функция  $U^*(x, y, z)$  будет однородной по Эйлеру функцией с порядком однородности  $(-k - 1)$  [3]. Повторно примененное

преобразование (12) осуществляет обратный переход от функции  $U^*(x, y, z)$  к функции  $U(x, y, z)$ , возвращая порядок однородности к прежнему значению:

$$k \rightarrow (-k - 1) \rightarrow -(-k - 1) - 1 = k.$$

Продемонстрируем последнее утверждение.

Преобразование (12) порождает новую гармоническую, однородную по Эйлеру функцию  $U^*(x, y, z)$ .

Поскольку функция  $U(x, y, z)$  – однородная по Эйлеру  $k$ -ой кратности, то ввиду выполнения тождества (1), эту функцию представим в виде

$$U\left(\frac{x}{\rho^2}, \frac{y}{\rho^2}, \frac{z}{\rho^2}\right) = \frac{1}{\rho^{2k}} U(x, y, z).$$

Тогда новая функция  $U^*(x, y, z)$  запишется как

$$U^*(x, y, z) = \frac{1}{\rho^{2k-1}} U(x, y, z),$$

что гарантирует однородность такой функции с порядком однородности  $(-k - 1)$ . Здесь учитывается тот факт, что сама функция  $U(x, y, z)$  есть однородная по Эйлеру  $k$ -ой кратности (подробности можно найти в первом томе монографии [17] в Приложении к главе 1, посвященном сферическим гармоникам).

Легко проверить, что преобразование (12) сохраняет свойство четности или нечетности потенциальной функции как по переменной  $z$ , так и по переменной  $y$ . Тем самым, если взять за основу квазиполиномиальные потенциалы (8) – (11) и (9) – (12) из работы [15], с показателем однородности, равным  $k^* = -k - 1$ , то с помощью формулы Томсона (12) можно сконструировать в аналитической форме новые потенциалы с нужным типом симметрии, выраженные однородными по Эйлеру функциями с нужным показателем однородности  $k$ .

На рис. 1 – 3 даны эквипотенциальные поверхности полей с потенциалами, представленные в аналитической форме формулами (9) – (16), и полей с измененными потенциалами; к ним применялось преобразование по формуле Томсона (12).

Если мы возьмем потенциальную, одно-

родную по Эйлеру структуру с порядком однородности  $k = 3$   $U_5^+(x, y, z)$  (9), то, применив преобразование (12), получим конфигурацию следующего вида:

$$V_5^+(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^7}} \times \left[ \left( \frac{y^5}{r^2} + 5y^3 - \frac{15}{4} yr^2 \right) \cos 2\gamma - \frac{15}{2} yr^2 \gamma \sin 2\gamma \right], \quad (14)$$

порядок однородности которой  $k = -4$ .

Применение преобразования Томсона (12), к антисимметричному по  $z$  потенциалу  $U_2^-(x, y, z)$ , выраженному однородной по Эйлеру функцией (10) кратности  $k = 2$ , породит структуру, также антисимметричную  $V_2^-(x, y, z)$ , порядок однородности которой  $k = -3$ :

$$V_2^-(x, y, z) = \frac{y^2 - r^2 / 2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}} \gamma. \quad (15)$$

Потенциал, выражаемый однородной по Эйлеру функцией ( $k = -2$ ) вида

$$V_1^-(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \gamma, \quad (16)$$

есть результат, полученный из потенциальной структуры  $U_1^-(x, y, z)$ , который представляет собой квазиполином с нечетными степенями  $y$  и антисимметричной по  $z$  функцией (11), преобразованием (12).

#### Управление устойчивостью движения в электростатических квазиполиномиальных полях

Квазиполиномы заданной степени, представленные в списках (8) – (11) и (9) – (12) из работы [15], не являются уникальными. Легко понять, что прибавив к квазиполиному степени  $n$  и порядка однородности  $k$  произвольную линейную комбинацию с постоянными коэффициентами, составленную из полиномов меньшей степени, мы снова получим квазиполиномиальный потенциал того же самого типа. Имеющуюся степень свободы можно использовать для того, чтобы оптимизировать свойства корпускулярно-оптической систе-

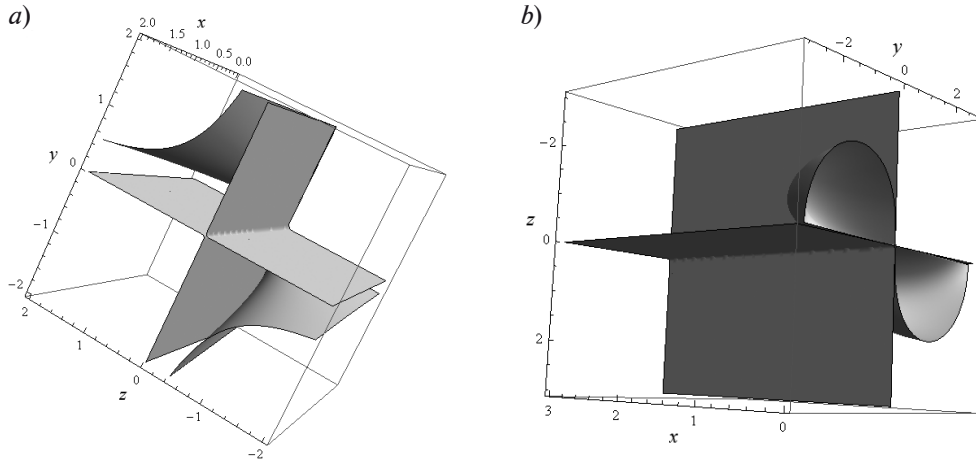


Рис. 1. 3D-изображения эквипотенциальных поверхностей полей с потенциалами  $U_5^+(x, y, z)$  (a) и  $V_5^+(x, y, z)$  (b) (см. формулы (9) и (14) соответственно)

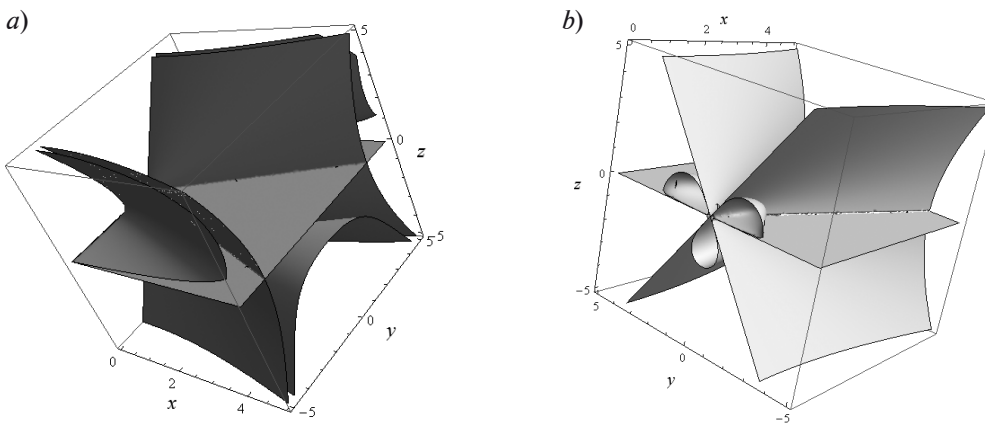


Рис. 2. 3D-изображения эквипотенциальных поверхностей полей с потенциалами  $U_2^-(x, y, z)$  (a) и  $V_2^-(x, y, z)$  (b) (см. формулы (10) и (15) соответственно)

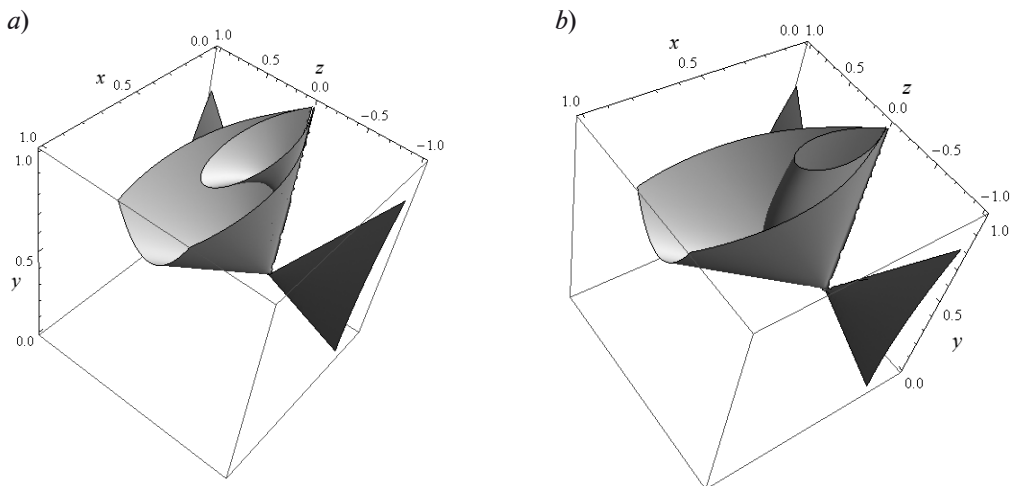


Рис. 3. 3D-изображения эквипотенциальных поверхностей полей с потенциалами  $U_1^-(x, y, z)$  (a) и  $V_1^-(x, y, z)$  (b) (см. формулы (11) и (16) соответственно)

мы. Одним из важных критериев оптимизации является устойчивость траекторий заряженных частиц по отношению к малым отклонениям от средней плоскости [18]. Если использовать достаточный критерий устойчивости, полученный в работе [18], то можно быстро определить, с какими весовыми коэффициентами нужно добавить квазиполиномы меньшей степени (либо дополнительные однородные функции иного вида), чтобы исправить локальную неустойчивость траекторий. Рассмотрим несколько примеров.

Сам критерий формулируется следующим образом. Если движение заряженных частиц рассматривается в поле с плоскостью симметрии  $z = 0$ , то их движение вблизи этой плоскости будет устойчивым, когда выполняется следующее условие:

$$U_{.xx} + U_{.yy} \Big|_{z=0} < 0. \quad (17)$$

**Пример 1.** Построим поле  $U(x, y, z)$  как комбинацию двух других полей, потенциалы которых являются однородными одного порядка  $k = 2$ : один  $U_2^+(x, y, z)$  и другой  $U_4^+(x, y, z)$  (см. формулу (8)). Итак,

$$U(x, y, z) = U_2^+(x, y, z) + hU_4^+(x, y, z) = y^2 - \frac{1}{2}r^2 + h \left[ \cos 2\gamma \left( \frac{y^4}{r^2} + 3y^2 - \frac{3}{4}r^2 \right) - \frac{3}{2}r^2 \gamma \sin 2\gamma \right], \quad (18)$$

где  $h$  – коэффициент перемешивания.

Для того чтобы удовлетворить критерию устойчивости (17), следует взять  $h < 0$ . Это будет справедливо во всем пространстве. На рис. 4 представлены эквипотенциальные поверхности этого поля. Поверхности имеют довольно сложную конусовидную форму, однако ось  $y$  является местом смыкания эквипотенциальных поверхностей, что порождает возникновение сил, действующих на частицы вблизи плоскости  $z = 0$ , заставляя их возвращаться к исходной плоскости.

**Пример 2.** Возьмем комбинацию потенциалов  $U_2^+(x, y, z)$  и  $U_4^+(x, y, z)$  (см. формулу (8)) с различными порядками однородности:

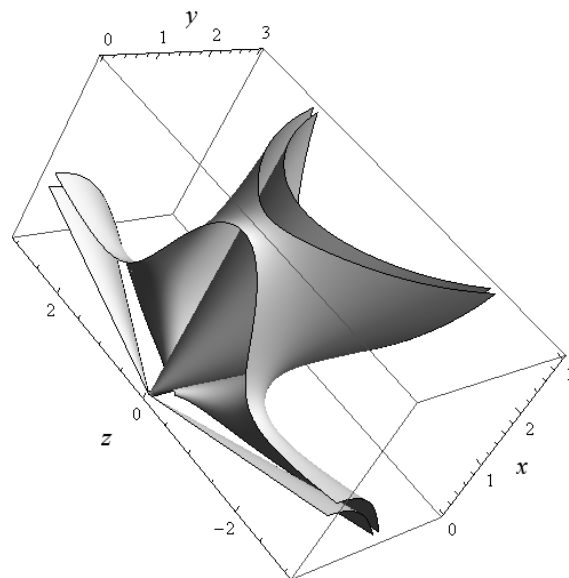


Рис. 4. 3D-изображение эквипотенциальных поверхностей поля с потенциалом  $U(x, y, z)$ , задаваемым формулой (18)

$$U(x, y, z) = U_2^+(x, y, z) + hU_4^+(x, y, z) = y^2 - \frac{1}{2}r^2 + h \left[ y^4 - 3y^2r^2 + \frac{3}{8}r^4 \right]. \quad (19)$$

Картина эквипотенциалей дана на рис. 5. При  $h < 0$  критерий устойчивости выполняется, но не во всем пространстве, а только ограниченно, при  $y > x/2$  или  $y < -x/2$ .

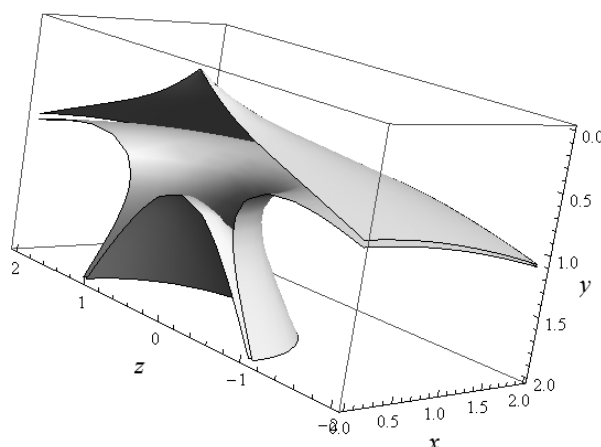


Рис. 5. 3D-изображение эквипотенциальных поверхностей поля с потенциалом  $U(x, y, z)$ , задаваемым формулой (19)



**Пример 3.** Построим поле  $U(x, y, z)$  как комбинацию двух других полей с однородными потенциалами разной кратности –  $U_3^+(x, y, z)$  ( $k = 3$ ) и  $U_2^+(x, y, z)$  ( $k = 2$ ), согласно формуле (9):

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= U_3^+(x, y, z) + hU_2^+(x, y, z) = \\
 &= y^3 - \frac{3}{2}yr^2 + \\
 &+ h \left[ \frac{y^3 - 3yr^2}{r} \cos \gamma - 3yr \gamma \sin \gamma \right].
 \end{aligned}
 \quad (20)$$

Картина эквипотенциалей дана на рис. 6. Устойчивость траекторий заряженных частиц также выполняется, но в ограниченном пространстве.

### Заключение

Мы рассмотрели квазиполиномиальные трехмерные потенциальные структуры для электрических и магнитных полей, которые могут быть выражены в аналитическом виде. Потенциалы строятся на основе однородных по Эйлеру функций и представляют собой полиномы конечной степени. Алгоритм синтеза таких потенциалов распространен на случай однородных по Эйлеру функций с целыми значениями порядка однородности; в этом варианте процесс рекуррентного вычисления коэффициентов квазиполинома имеет дополнительную специфику, отсутствующую у однородных квазиполиномов общего вида, что было предметом рассмотрения предыдущей работы [15].

Кроме того, класс квазиполиномиальных трехмерных потенциалов может быть

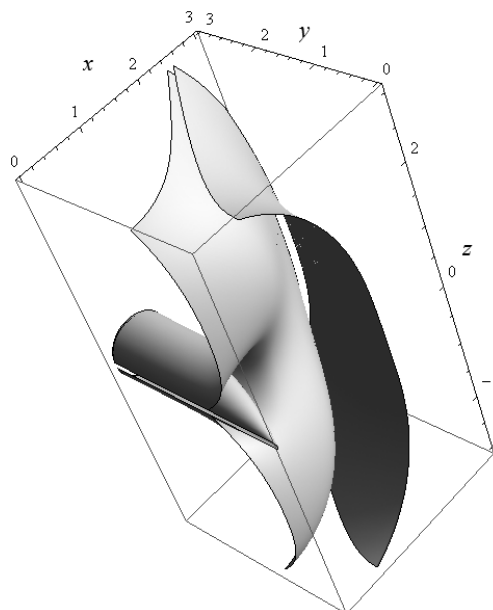


Рис. 6. 3D-изображение эквипотенциальных поверхностей поля с потенциалом  $U(x, y, z)$ , задаваемым формулой (20)

расширен за счет новых структур, полученных преобразованиями системы координат – масштабированием, вращением и параллельным переносом, сохраняющими гармоничность функций и их однородность по Эйлеру. Все использованные методы и подходы порождают однородные потенциалы с порядком однородности  $k > 0$ . Применение преобразования на основе формулы Томсона дополняет рассматриваемый класс потенциальными структурами, являющимися однородными по Эйлеру с порядками однородности  $k < 0$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 тт. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.
- [2] Смирнов В.И. Курс высшей математики: в 5 тт. Т. 1. М.: Наука, 1974. 480 с.
- [3] Краснова Н.К. Теория и синтез диспергирующих и фокусирующих электронно-оптических сред. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. 01.04.04; защищена 22 мая 2014 г.: утв. 08.12.2014. СПб., 2013. 259 с.
- [4] Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектроскопии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 2. С. 9–15.
- [5] Краснова Н.К. Двумерные степенные электронные спектрографы с плоскостью симметрии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 6. С. 97–103.
- [6] Краснова Н.К., Абраменок О.А. Семейство полевых структур с плоскостью симметрии для электронной спектроскопии // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2011. № 2 (122). С. 85–92.
- [7] Краснова Н.К. Идеальная фокусировка в теории электростатических спектрографов // Журнал технической физики. 2012. Т. 82. № 8. С. 105–109.

[8] **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2010. 409 с.

[9] **Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.** Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. I. // Масс-спектрометрия. 2015. Т. 12. № 4. С. 272–281.

[10] **Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.** Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. II. // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13. № 1. С. 11–20.

[11] **Аверин И.А.** Электростатические и магнитостатические электронные спектрографы с однородными по Эйлеру потенциалами, характеризующимися нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2015. Т. 25. № 3. С. 35–44.

[12] **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Аналитические структуры электрических обобщенно-однородных спектрографических сред // Научное приборостроение 2014. Т. 24. № 1. С. 50–58.

[13] **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение форму-

лы Донкина в теории энергоанализаторов. II // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 3. С. 44–47.

[14] **Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Абраменок О.А.** Электрические спектрографы потоков заряженных частиц с потенциалами Эйлера типа // Прикладная физика. 2011. № 5. С. 69–73.

[15] **Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.** Квазиполиномиальные трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 1. С. 71–80.

[16] **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. 832 с.

[17] **Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.** Трактат по натуральной философии. В 2 ч. Ч. II. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский ин-т компьютерных исследований, 2011. 560 с.

[18] **Бердников А.С., Краснова Н.К.** Достаточный критерий устойчивости и компактности плоских ионных пучков в трехмерных электрических и магнитных полях с плоскостью симметрии // Научное приборостроение. 2015. Т. 25. № 2. С. 69–90.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**КРАСНОВА Надежда Константиновна** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
n.k.krasnova@mail.ru

**БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич** – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр. 26  
asberd@yandex.ru

**СОЛОВЬЁВ Константин Вячеславович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
k-solovyev@mail.ru

**АВЕРИН Игорь Андреевич** – аспирант кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
agreer@bk.ru



## *Krasnova N.K., Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Averin I.A. ON THE QUASI-POLYNOMIAL 3D POTENTIALS OF ELECTRIC AND MAGNETIC FIELDS.*

Spectrographic electron and ion optical structures markedly raise the possibilities of modern energy and mass analysis. Electric and magnetic fields which potentials are expressed by functions homogeneous in Euler's sense are the effective instrumentation that is used for creating new spectrographic analytical devices with the determined working characteristics. This paper puts forward and discusses some methods for building 3D harmonic and homogeneous in Euler's sense structures representable as the polynomials of finite degree with respect to one of variables. These strictly mathematical approaches provide a possibility of expanding significantly a class of quasi-polynomial potentials and of enriching modern analytical instrumentation by new spectrographic electrical and magnetic configurations.

FUNCTIONS HOMOGENEOUS IN EULER'S SENSE, SIMILARITY PRINCIPLE, THOMSON FORMULA, STABILITY OF MOTION.

### REFERENCES

- [1] **G.M. Fikhtengolts**, Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [Course of differential and integral calculus]: Vol. 1, Moscow, Fizmatlit, 2001.
- [2] **V.I. Smirnov**, Kurs vysshey matematiki [Course of higher mathematics], Vol. 1, Moscow, Nauka, 1974.
- [3] **N.K. Krasnova**, Teoriya i sintez dispergiruyushchikh i fokusiruyushchikh elektronno-opticheskikh sred [Theory and synthesis of dispersion and focusing electron optics sphere], Dis. ...dokt. fiz.-mat. nauk, St. Petersburg, 2013.
- [4] **Yu.K. Golikov, N.K. Krasnova**, Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography, Technical Physics. 57 (2) (2011) 164–170.
- [5] **N.K. Krasnova**, Two-dimensional power-type electronic spectrographs with a symmetry plane, Technical Physics. 57 (6) (2011) 843–849.
- [6] **N.K. Krasnova, O.A. Abrameonok**, A set of field structures with a symmetry plane for electron spectrography, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (2) (2011) 85–92.
- [7] **N.K. Krasnova**, Ideal focusing in the theory of electrostatic spectrographs, Technical Physics. 58 (8) (2012) 1143–1147.
- [8] **Yu.K. Golikov, N.K. Krasnova**, Teoriya sinteza elektrosticheskikh energoanalizatorov [Theory of synthesis of electrostatic energy analyzers], St. Petersburg, Izdatelstvo Politekhnicheskogo Universiteta, 2010.
- [9] **A.S. Berdnikov, I.A. Averin, Yu.K. Golikov**, Sticheskiye mass-spektrografy novogo tipa, ispolzuyushchiye elektricheskiye i magnitnyye polya, odnorodnyye po Eyleru. I. [Static mass spectrographs of new type used electric and magnetic fields homogeneous in Euler's sense. I.], Mass-spektrometriya. 12 (4) (2015) 272–281.
- [10] **A.S. Berdnikov, I.A. Averin, Yu.K. Golikov**, Sticheskiye mass-spektrografy novogo tipa, ispolzuyushchiye elektricheskiye i magnitnyye polya, odnorodnyye po Eyleru. II. [Static mass spectrographs of new type used electric and magnetic fields homogeneous in Euler's sense. II.], Mass-spektrometriya. 13 (1) (2016) 11–20.
- [11] **I.A. Averin**, Electrostatic and magnetostatic electron spectrographs based on Euler's homogeneous potentials with non-integer orders, Nauchnoye priborostroyeniye. 25 (3) (2015) 35–44.
- [12] **Yu.K. Golikov, N.K. Krasnova**, Analiticheskiye struktury elektricheskikh obobshchenno-odnorodnykh spektrograficheskikh sred [Analytical structures of electrical generalized homogeneous spectrographic sphere], Nauchnoye priborostroyeniye. 24 (1) (2014) 50–58.
- [13] **P.G. Gabdullin, Yu.K. Golikov, N.K. Krasnova, S.N. Davydov**, Application of Donkin's formula in the theory of energy analyzers: Part II, Technical Physics. 45 (3) (2000) 330–333.
- [14] **Yu.K. Golikov, N.K. Krasnova, O.A. Abramyonok**, Electric spectrographs of charged particle flows with potentials of Euler's type, Prikladnaya fizika. (5) (2011) 69–73.
- [15] **A.S. Berdnikov, I.A. Averin, N.K. Krasnova, K.V. Solovyev**, Quasi-polynomial 3D electric and magnetic potentials homogeneous in Euler's sense, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 10 (1) (2017) 71–80.
- [16] **G. Korn, T. Korn**, Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov [A handbook of mathematics for research workers and engineers]. Moscow, Nauka, 1973.
- [17] **W. Thomson, P.G. Tet**, Treatise on natural philosophy, Part II, URL: <http://name.umdl.umich.edu/ABR1665.0001.001>.
- [18] **A.S. Berdnikov, N.K. Krasnova**, Dostatochnyy kriteriy ustoychivosti i kompaktnosti ploskikh ionnykh

puchkov v trekhmernykh elektricheskikh i magnitnykh polyakh s ploskostyu simmetrii [A sufficient criterion of stability and compactness of the plane ionic beams

in the 3D electrical and magnetic fields with plane symmetry], Nauchnoye priborostroyeniye. 25(2) (2015) 69–90.

#### THE AUTHORS

**KRASNOVA Nadezhda K.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation  
n.k.krasnova@mail.ru

**BERDNIKOV Alexander S.**

*Institute for Analytical Instrumentation RAS*  
26 Rizskiy Ave., 190103, St. Petersburg, Russian Federation  
asberd@yandex.ru

**SOLOVYEV Konstantin V.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation  
k-solovyev@mail.ru

**AVERIN Igor A.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation  
agreer@bk.ru