

DOI: 10.18721/JPM.10113

УДК: 539.3

Н.П. Кузнецов¹, Б.Е. Мельников², А.С. Семенов²

¹ Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,
г. Великий Новгород, Российская Федерация;

² Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская федерация

ВЕРИФИКАЦИЯ И АДАПТАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ПОЛНЫМИ И ЧАСТИЧНЫМИ РАЗГРУЗКАМИ

В целях более точного описания процессов сложного пассивного нагружения выполнены экспериментальные исследования упругопластического деформирования стальных трубчатых образцов при пропорциональном и непропорциональном (монотонном и циклическом) нагружениях, включающих частичные и промежуточные разгрузки. Проведено сравнение результатов экспериментов с прогнозами структурной (реологической) упругопластической модели и многоповерхностной теорией пластичности с одной активной поверхностью. Предложены модификации двух указанных выше моделей в целях повышения точности прогнозов.

ПЛАСТИЧНОСТЬ, ПАССИВНОЕ НАГРУЖЕНИЕ, ЭКСПЕРИМЕНТ, МОДЕЛИРОВАНИЕ.

Введение

В теории пластического течения, получившей в настоящее время наиболее широкое распространение, предполагается, что разгрузка материала происходит без изменения пластических деформаций. Однако результаты ряда исследований [1 – 19] показывают, что при пассивном нагружении (разгрузка, нагружение внутри поверхности нагружения и по касательной к ней) происходит накопление пластических деформаций. Эндохронная теория пластичности [4, 5] и обобщенная модель Прандтля (модель Мазинга) [6] обеспечивают описание пластического деформирования при пассивном нагружении. Формулировки определяющих уравнений указанных теорий ориентированы, прежде всего, на уточненное описание активного деформирования, а параметры материала определяются без учета специфики процессов при пассивном нагружении.

Экспериментальное изучение свойств поля пластических податливостей [20] послужило основой для разработки многопо-

верхностной теории пластичности с одной активной поверхностью [14 – 19]. Понятие пластических податливостей прямо или косвенно используется многоповерхностными теориями пластичности [21, 22]. Вместе с тем, накопленный экспериментальный материал по свойствам пластических податливостей материалов нельзя считать достаточным. Прежде всего, это касается деформирования при пассивных путях нагружения. Накопление остаточных деформаций при таких нагружениях необходимо учитывать не только при расчете деформирования [14 – 19], но и при расчетах накопления повреждений [13, 23, 24], при исследовании процессов сверхпластичности [25], при оценке работоспособности и точности машинных агрегатов [26].

Настоящее исследование проведено для дальнейшего развития и обоснования концепции пластических податливостей и разработки методики выполнения расчетов, связанных со сложным переменным нагружением, включающим промежуточные полные и частичные разгрузки.

**Определяющие уравнения
для описания пассивного нагружения**

Векторная форма представления напряжений и деформаций. При двухпараметрическом нагружении с неизменными и совпадающими направлениями главных напряжений и деформаций пятимерные пространства девиаторов редуцируются до двумерных. Возможны различные равноправные подходы [7] для того, чтобы вводить координаты двумерного пространства, удовлетворяющие условию равенства длины вектора и интенсивности тензора. Одним из возможных вариантов задания координат Σ_1 и Σ_2 для точки, характеризующей напряженное состояние, является следующий:

$$\Sigma_1 = \sigma_i \cos \psi = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{3}{2} S_1, \quad (1)$$

$$\Sigma_2 = \sigma_i \sin \psi = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}(S_1 + 2S_2),$$

где σ_i – интенсивность напряжений по Мизесу; ψ – угол между вектором напряжений Σ и осью Σ_1 ; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения; S_1, S_2, S_3 – главные значения девиатора напряжений.

Аналогичные выражения вводятся и для пластических деформаций. Они связывают

координаты E_1^p, E_2^p соответствующей точки в двумерном пространстве пластических деформаций с главными значениями девиатора пластических деформаций $\varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p$ следующими соотношениями:

$$E_1^p = \varepsilon_i^p \cos \varphi = \varepsilon_1^p, \quad (2)$$

$$E_2^p = \varepsilon_i^p \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p),$$

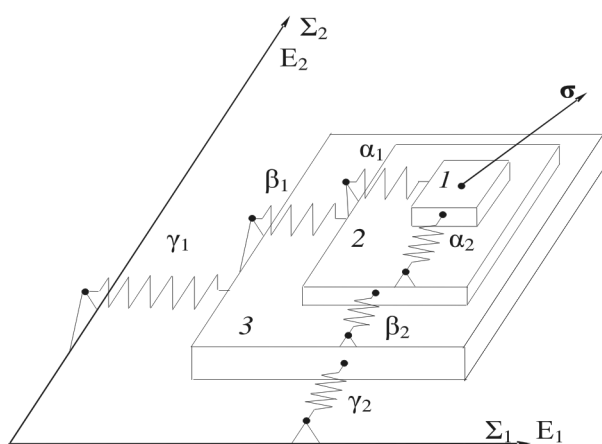
где ε_i^p – интенсивность пластических деформаций, φ – угол между вектором пластических деформаций E^p и осью E_1^p .

В пространстве напряжений совокупностям напряженных состояний, объединенных общим признаком (развитие пластических деформаций заданной величины, разрушение и т. п.), соответствуют некоторые границы (гиперповерхности, в частном случае это гиперсферы в рассматриваемом векторном пространстве, линии – при двухосном нагружении). Одна из таких границ показана на рис. 1, *b* окружностью радиуса C_α с центром в точке a .

Структурная (реологическая) модель.

Рассмотрим структурную модель пластического деформирования материала [13, 15, 28] (рис. 1, *a*). Она предполагает, что в процессе нагружения граница текучести сохраняет свои форму и размер C_α (рис. 1, *b*).

a)



b)

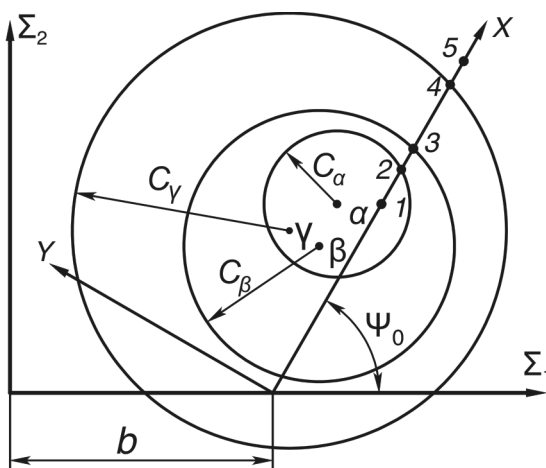


Рис. 1. Структурная модель пластического деформирования материала (*a*) и схематическое представление движения поверхностей нагружения (*b*);

Σ_1, Σ_2 – координаты пространства напряжений, E_1, E_2 – координаты пространства деформаций; X, Y – координаты локальной системы координат, связанной с нагружением на последнем этапе; $1 - 3$ – номера структурных элементов; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – жесткости упругих элементов (координаты центров поверхностей), $C_\alpha, C_\beta, C_\gamma$ – пределы текучести пластических элементов (радиусы поверхностей); σ – вектор напряжений в двумерном пространстве напряжений

Ее положение определяется предысторией нагружения. Перемещение этой границы начинается при ее пересечении изнутри вектором напряжений.

Вектор приращения пластических деформаций $\Delta \mathbf{E}^p$ пропорционален проекции вектора приращения напряжений $\Delta \Sigma$ на внешнюю нормаль к границе поверхности нагружения и направлен по этой нормали. Длины приращений рассматриваемых векторов $|\Delta \mathbf{E}^p| = \Delta \varepsilon_i^p$ и $|\Delta \Sigma| = \Delta \sigma_i$ связаны соотношением

$$|\Delta \mathbf{E}^p| = H_a |\Delta \Sigma| \cos(\Delta \Sigma \wedge \Delta \mathbf{E}^p), \quad (3)$$

где H_a — величина модуля податливости, постоянная для всех точек границы.

При изменении напряженного состояния в пределах внутренней α -окружности все элементы сухого трения неподвижны (рис. 1, б). При достижении границы элемент 1 начинает движение относительно элемента 2. В упругой связи между ними появляются усилия. Их можно представить натяжением упругих элементов α_1 и α_2 . Усилия α_1 и α_2 являются координатами центра окружности радиуса C_α в плоскости Σ_1, Σ_2 (рис. 1, б). Аналогично усилия в элементах β_1 и β_2, γ_1 и γ_2 являются координатами центров окружностей радиусов C_β и C_γ . Параметрам α_1 и α_2, β_1 и β_2, γ_1 и γ_2 соответствуют векторы α, β и γ .

При нагружении по пути $1 \rightarrow 2$ (рис. 1, б) пластические деформации не развиваются, поскольку расстояние от текущей точки до центра окружности δ_α меньше ее радиуса C_α :

$$\delta_\alpha \doteq \sqrt{(\Sigma_1 - \alpha_1)^2 + (\Sigma_2 - \alpha_2)^2} \leq C_\alpha. \quad (4)$$

При дальнейшем движении вдоль прямой $1 - 2$ при переходе через точку 2 ($\delta_\alpha > C_\alpha$) начинается движение элемента α по радиусу к α -окружности, т. е. под углом ω :

$$\omega = \arctg \frac{\Sigma_1 - \alpha_1}{\Sigma_2 - \alpha_2}, \quad (5)$$

который в общем случае не совпадает с заданным наклоном прямой, характеризующей изменение напряженного состояния ψ_0 (см. рис. 1, б). Элементы β и γ остаются неподвижными пока выполняются условия

$\delta_\alpha > C_\alpha, \delta_\beta < C_\beta$ и $\delta_\gamma < C_\gamma$. В этом случае пластические деформации определяются соотношением

$$\Delta \mathbf{E}^p = H_a (\Sigma - \alpha) \left(1 - \frac{C_\alpha}{\delta_\alpha} \right). \quad (6)$$

При движении вдоль прямой $1 - 2$ при переходе через точку 3 элемент β начинает движение ($\delta_\alpha > C_\alpha, \delta_\beta > C_\beta, \delta_\gamma < C_\gamma$), и пластические деформации определяются выражением

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E}^p = H_a (\Sigma - \alpha) \left(1 - \frac{C_\alpha}{\delta_\alpha} \right) + \\ + H_\beta (\Sigma - \beta) \left(1 - \frac{C_\beta}{\delta_\beta} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

В общем случае, при движении всех трех окружностей $\delta_\alpha > C_\alpha, \delta_\beta > C_\beta, \delta_\gamma > C_\gamma$ приращение пластических деформаций определяется равенством

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E}^p = H_a (\Sigma - \alpha) \left(1 - \frac{C_\alpha}{\delta_\alpha} \right) + \\ + H_\beta (\Sigma - \beta) \left(1 - \frac{C_\beta}{\delta_\beta} \right) + H_\gamma (\Sigma - \gamma) \left(1 - \frac{C_\gamma}{\delta_\gamma} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

которое, в отличие от предложенного в работе [13], вводится на основе дифференциальных зависимостей теории пластического течения.

Деформации на всем пути нагружения определяются суммированием приращений деформаций на каждом шаге. При разбиении пути нагружения на шаги целесообразно в качестве граничных точек выбирать те напряженные состояния, при которых в движение включается (или из него выключается) очередной элемент сухого трения структурной модели. Так, для пути, представленного на рис. 1, б, таковыми являются точки 2, 3 и 4.

Многоповерхностная теория с одной активной поверхностью. Математическая модель, основанная на предположении о невозможности чисто упругого деформирования как при нагрузке (увеличение σ_i), так и при разгрузке (уменьшение σ_i) была предложена в работе [20]. Авторами было принято, что соотношение (3) применимо в любой точке пути вторичного нагружения.

Утверждалось в качестве постулата, что направление вектора $\Delta \mathbf{E}^p$ и модуль податливости H являются функциями напряженного и деформированного состояний в конце первого шага нагружения (нулевого цикла) и текущей точки пути. В экспериментах с никелевыми и стальными тонкостенными трубками было установлено, что вектор $\Delta \mathbf{E}^p$ ориентирован по нормали к окружности, проведенной через текущую точку и точку окончания первого нагружения, а величина H во всех точках такой окружности примерно постоянна [14 – 20].

Пусть после нагружения по пути $0 \rightarrow 1$ (рис. 2) в точке 1 достигнуто напряженное состояние с интенсивностью напряжений σ_{i1} . Затем, после излома траектории нагружения в точке 1, следует движение по пути $1 \rightarrow 3$. Направление приращения пластических деформаций $\Delta \mathbf{E}^p$ совпадает с радиусом окружности, проведенной через точки 1 и 2 из центра, лежащего на луче $0 - 1$. Модуль вектора $|\Delta \mathbf{E}^p| = \Delta \varepsilon_i^p$ определяется соотношением

$$|\Delta \mathbf{E}^p| = H |\Delta \Sigma| \cos(\Delta \Sigma \wedge \mathbf{R}), \quad (9)$$

аналогичным по структуре равенству (3), где

$$H = f\left(H_1, \frac{R}{R_1}\right), \quad R_1 = \sigma_{i1}, \quad H_1 = \frac{d\varepsilon_i^p}{d\sigma_i}$$

Подобный способ построения окружностей применяется и для последующих точек пути нагружения, для которых выполняется условие $R_k > R_{k-1}$, где k – номер точки на пути нагружения ($k = 1, 2, \dots, N$). Точку, после которой это условие нарушается (например, точка 3 на рис. 2), назовем точкой реверса. Строгая математическая формулировка условия появления точки реверса в пространстве девиаторов напряжений дана в работе [16]. После прохождения такой точки возникает новая поверхность, которая становится активной (подвижной), в то время как все остальные поверхности фиксируются. Центр активной окружности располагается на радиусе $3'3$ (точка $4'$ на рис. 2). Направление приращения пластических деформаций $\Delta \mathbf{E}^p$ совпадает с радиусом $4'4$. При вычислении приращения пластической деформации можно исполь-

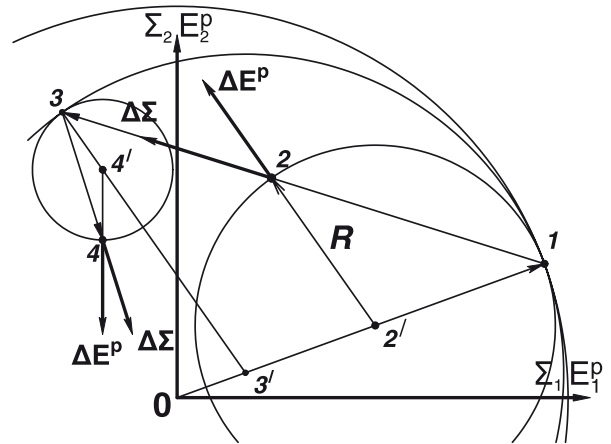


Рис. 2. Схематическое представление движения поверхностей нагружения (окружность и дуги) согласно многоповерхностной теории с одной активной поверхностью (ее центр расположен в точке $4'$).

Путь нагружения $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ в пространстве напряжений указан тонкими стрелками; в точках 2 и 4 жирными стрелками показаны направления приращений пластических деформаций; 1 и 3 – точки реверса

зовать соотношение (9) с заменой величин R_1, H_1 на R_3, H_3 , соответствующих точке реверса 3.

Методика проведения опытов и образцы

При проведении экспериментов в условиях объемного напряженного состояния использовалась модернизированная установка [27], состоящая из камеры высокого давления для испытания образцов в условиях объемного напряженного состояния, из источников давления, гидравлических систем высокого и низкого давления, контрольно-измерительных приборов и различных приспособлений для обслуживания.

Для приготовления образцов использовались отрезки цельнотянутых труб длиной 4 м, из одной партии стали 1X18H10T-ВД (ЭП502ВД). Размеры образцов:

- длина 170 мм;
- номинальный наружный диаметр – 26,4 мм;
- толщина стенки – 0,3 мм;
- отношение толщины стенки образца к его среднему диаметру – 0,011.

Указанное отношение соответствует рекомендуемым значениям и обеспечивает хорошую равномерность распределения кольцевых и радиальных напряжений по толщине стенки. Это позволяет вычислять напряжения для среднего слоя по формулам для безмоментных оболочек. Химический состав материала труб (сталь) представлен работе [18].

Методика проведения опытов основана на том, что процесс нагружения рассматривается в пространстве напряжений Σ_1 и Σ_2 , а процесс деформирования – в пространстве пластических деформаций E_1^p и E_2^p :

$$\Sigma_1 = \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_r), \Sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r), \quad (10)$$

$$E_1^p = \varepsilon_z^p, E_2^p = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_\theta^p + \varepsilon_r^p),$$

где $\sigma_z, \sigma_\theta, \sigma_r$ – ненулевые компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат, совпадающие с главными напряжениями; $\varepsilon_z^p, \varepsilon_\theta^p, \varepsilon_r^p$ – главные пластические деформации.

Для вычисления длины пути пластического деформирования (параметра Одквиста ε_i^p) нами использовалось соотношение

$$\varepsilon_i^p = \int \sqrt{(dE_1^p)^2 + (dE_2^p)^2}. \quad (11)$$

Гидростатическое давление (среднее напряжение) определялось на основе зависимости

$$\sigma_{mean} = \frac{\Sigma_1}{3} + \frac{\Sigma_2}{\sqrt{3}} + \sigma_r. \quad (12)$$

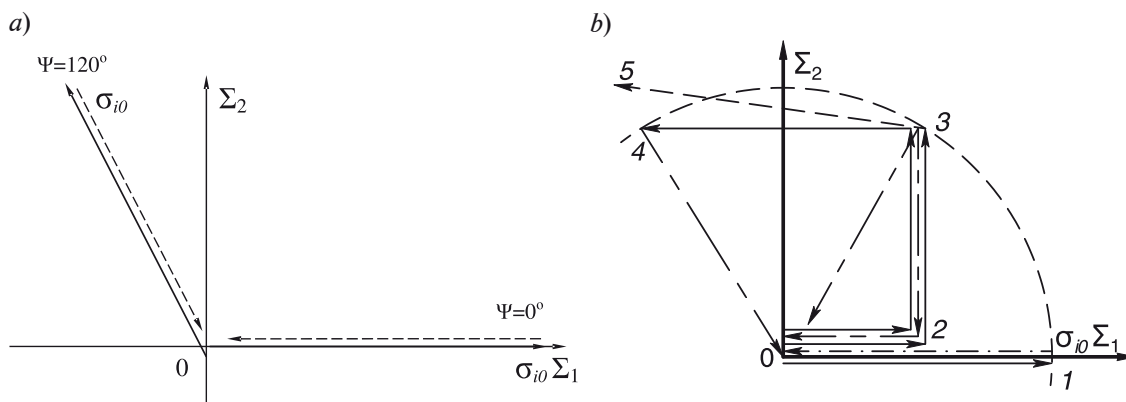


Рис. 3. Пути нагружения образцов (указаны стрелками) для идентификации параметров моделей (a) и сравнение прогнозов рассматриваемых моделей (b); σ_{i0} – интенсивность напряжений, соответствующая первоначальному нагружению

В основе методики нагружения лежало ступенчатое приложение нагрузок, позволявшее вести нагружение вдоль любого направления в пространстве Σ_1, Σ_2 , которое характеризуется параметром вида девиатора ψ :

$$\psi = \arctg(\Sigma_2 / \Sigma_1). \quad (13)$$

Нагружение может быть реализовано в трубчатом образце (т. е. при $\psi = 0, 1, \dots, 120^\circ$). Напряженное состояние образца определяется параметром вида девиатора (13), интенсивностью напряжений σ_i и отношением инвариантов σ_{mean} / σ_i .

Эксперименты проводились в камере высокого давления и включали нагрузки и разгрузки образцов по прямым лучевым путям в пространстве напряжений, с варьированием параметра ψ . В качестве первого шага выполнялось осевое растяжение при $\psi = 0^\circ$ до некоторой выбранной интенсивности напряжений σ_{i0} , затем следовала полная разгрузка, кольцевое растяжение при значениях $\psi = 115 - 120^\circ$ до приблизительно такой же интенсивности напряжений, и после этого – опять полная разгрузка до $\sigma_i = 0$ (см. лучи 0 – 1, 1 – 0, 0 – 4, 4 – 0 на рис. 3, b).

Переход при нагружении с луча $\psi = 0^\circ$ на луч $\psi = 115 - 120^\circ$ использовался потому, что давал возможность получать наибольшие пластические деформации, по сравнению с другими возможными реализациями лучевых путей повторного нагружения. На каждом прямолинейном участке нагруже-

ния до различных значений σ_0 проводились промежуточные разгрузки для измерения осевой (ε_z) и окружной (ε_θ) деформаций. Количество образцов составило 15. Уровни начальных интенсивностей напряжений σ_0 изменялись от 680 до 900 МПа.

Диаграмма деформирования. Для определения ряда параметров структурной модели и многоповерхностной модели используется диаграмма деформирования (кривая зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций) при монотонном одноосном нагружении. Оценка возможности ее использования для описания сложного напряженного состояния (гипотеза единой кривой) требует проверки, которая также проводилась в рамках настоящего исследования.

Для аппроксимации диаграммы деформирования в данной работе использовалась степенная зависимость:

$$\sigma_i = A(\varepsilon_i^p)^m + B, \quad (14)$$

содержащая три параметра материала: A , B и m . Текущие размеры образца определяются с учетом зависимости (14).

Для получения диаграммы деформирования проводились испытания на растяжение тонкостенных трубчатых образцов на прессе Гагарина и в камере высокого давления.

В той же камере были проведены опыты по растяжению трубчатых образцов при повышенных значениях среднего напряжения σ_{mean} для оценки влияния отношения σ_{mean}/σ_i на характер зависимости $\sigma_i(\varepsilon_i^p)$. Отношение среднего напряжения к интенсивности напряжений менялось в пределах 0,330 – 0,466.

Путь нагружения в координатах Σ_1, Σ_2 представляет собой прямую линию: луч, исходящий из начала координат. Для получения зависимостей $\sigma_i(\varepsilon_i^p)$ и значений σ_i, ε_i в момент разрушения, в процессе нагружения проводились промежуточные разгрузки для измерения деформаций. Значения параметра вида девиатора ψ (см. выше) меняли от 0 до 120° с шагом в 15°, отношение σ_{mean}/σ_i менялось в пределах от 0,321 до 0,616. По каждому лучу было испытано 5 – 8 образцов.

Определение параметров структурной модели. Для нахождения параметров структурной модели использовалась методика, предложенная в работе [13]. В соответствии с данной методикой, их определяли по аппроксимирующей ломаной линии, вписанной в экспериментальную диаграмму циклического деформирования при одноосном растяжении-сжатии.

Чтобы изучить поведение параметров модели при дальнейшем нагружении (после первичного растяжения), были проведены опыты как на повторно-лучевое, так и на повторно-циклическое виды нагружения. При этом принималось во внимание изменение значений C_β, C_γ .

Определение параметров многоповерхностной теории пластичности. Для нахождения параметров указанной теории пластичности с одной активной поверхностью нагружения нами рассматривалась степенная аппроксимация модуля пластической податливости H в следующем виде:

$$H = CH_0 \left(\frac{R}{\sigma_{i0}} \right)^n, \quad (15)$$

где σ_0 – максимальная интенсивность напряжений, достигнутая на предыдущих этапах сложного пути нагружения; H_0 – модуль податливости максимально достигнутого уровня σ_0 ($H_0 = d\varepsilon_i^p / d\sigma_i$); R – радиус окружности равных податливостей, соответствующий текущему значению σ_i ; C, n – параметры модели.

Податливость H_0 определялась по уравнению единой кривой (14):

$$H_0 = \frac{1}{mA} \left(\frac{\sigma_{i0} - B}{A} \right)^{1/m-1}. \quad (16)$$

Значения H и R рассчитывались по результатам опытов, например, после экспериментов на чередующиеся осевые и кольцевые растяжения трубчатого образца.

Результаты экспериментального определения параметров моделей

В результате проведенных опытов на растяжение тонкостенных трубчатых образцов на прессе Гагарина и в камере высокого давления на десяти образцах была

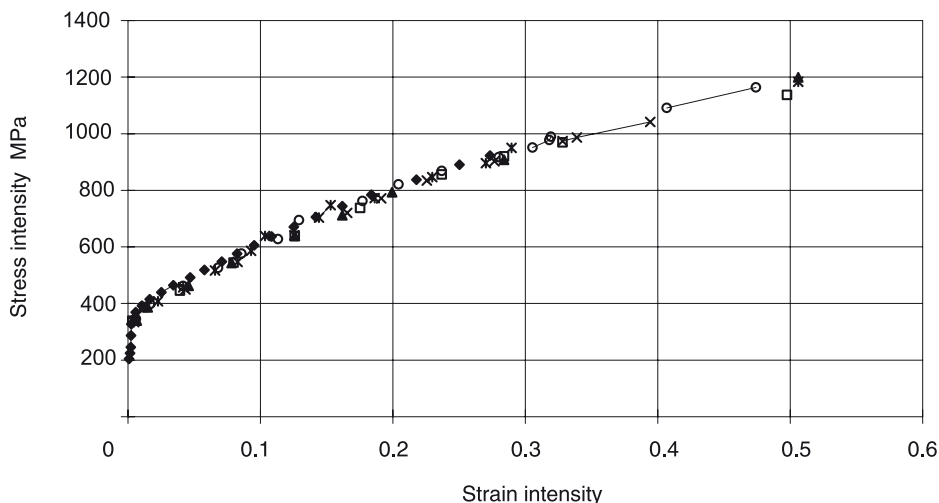


Рис. 4. Диаграмма деформирования стали 1X18N10T-ВД (данные от разных образцов представлены различными символами)

установлена следующая аппроксимация диаграммы деформирования (рис. 4):

$$\sigma_i = 1470\varepsilon_i^{0,678} + 325 \text{ (МПа)}. \quad (17)$$

Получены следующие значения предела прочности (в истинных напряжениях): $\sigma_U \approx 1200 - 1240$ МПа и истинная деформация при разрыве $\varepsilon_U \approx 0,5$.

В опытах по растяжению трубчатых образцов при повышенных значениях среднего напряжения σ_{mean} было установлено, что в диапазоне исследованных σ_{mean}/σ_i (0,330 – 0,466) существенных отклонений как по характеру зависимости $\sigma_i(\varepsilon_i)$, так и по значениям σ_U , ε_U отмечено не было.

В результате проведенных опытов на 5 – 8 образцах были получены зависимости $\sigma_i(\varepsilon_i^p)$ и значения σ_p , ε_i в момент разрушения (как отмечалось выше, в процессе нагружения проводились промежуточные разгрузки для измерения деформаций).

На основании полученных экспериментальных данных был сделан вывод о возможности использования концепции единой кривой. Отклонения от среднего значения по напряжениям для различных путей нагружения не превышали ± 4 %. Установлено, что параметр ψ влияет как на значения σ_p , ε_i в момент разрушения, так и на характер разрушения.

Параметры структурной модели. В результате проведенных экспериментальных

исследований при сложном непропорциональном нагружении были найдены параметры структурной модели при различных значениях σ_{i0} (табл. 1).

В работе [13] значения параметров модели для материала принимались постое

Таблица 1

Значения параметров структурной модели при различных значениях σ_{i0}

Параметр	Значение, МПа	
	$\sigma_{i0} = 772$ МПа	$\sigma_{i0} = 871$ МПа
C_α	325	325
C_β	711	765
C_γ	770	820
$E_{\alpha z}$	94 100	163 000
$E_{\alpha\theta}$	126 800	178 800
E_α	110 400	170 900
$E_{\beta z}$	2 960	8 560
$E_{\beta\theta}$	3 610	9 230
E_β	3 280	8 890
$E_{\gamma z}$	1 500	2 110
$E_{\gamma\theta}$	2 370	1 860
E_γ	1 930	1 980

Значения параметра ε_{i0} составили 21,04 и 21,49 % при $\sigma_{i0} = 772$ и 871 МПа соответственно.

янными, не зависящими от истории его нагружения. Анализ экспериментальных результатов, полученных нами при повторно-лучевых нагружениях, показал, что численное значение этих параметров зависит от уровня интенсивности напряжений σ_0 , достигаемого в базовом опыте. Поэтому опыты проводились при различных значениях σ_0 ($\sigma_0 = 700 - 900$ МПа). В табл. 1 даны в качестве примера соответствующие значения для двух значений σ_0 .

Расчеты параметров C_β , C_γ для опытов с различными значениями σ_0 позволили заключить о приблизительно линейной зависимости указанных параметров от величины σ_0 :

$$\frac{\sigma_{i0(5)}}{\sigma_{i0(33)}} = 0,886 \approx 0,9; \quad \frac{C_{\beta(5)}}{C_{\beta(33)}} = 0,929 \approx 0,9;$$

$$\frac{C_{\gamma(5)}}{C_{\gamma(33)}} = 0,939 \approx 0,9.$$

В результате анализа поведения параметров модели при дальнейшем нагружении (после первичного растяжения), при котором, как уже отмечалось, были проведены опыты как на повторно-лучевое, так и на повторно-циклическое виды нагружения, была установлена закономерность изменения параметров, позволяющая более точно прогнозировать результаты эксперимента [29]. При этом принималось во внимание изменение значений C_β , C_γ .

Параметры многоповерхностной теории пластичности. Податливость H_0 определялась на основе уравнения (16):

$$H_0 = \frac{1,475}{1470} \left(\frac{\sigma_{i0} - 325}{1470} \right)^{0,475} \quad (\text{МПа}). \quad (18)$$

Значения параметров H и R были рассчитаны по результатам опытов на чередующиеся осевые и кольцевые растяжения трубчатого образца.

Необходимо отметить, что в базовом опыте характер зависимости $\sigma_i(\epsilon_i)$ заметно меняется при переходе от первого кольцевого растяжения после первого осевого нагружения к последующим чередующимся осевым и кольцевым растяжениям. Поэтому, как и в работе [13], сделано предположение об изменении свойств материала

после первых циклов сложного нагружения и принято, что первому нагружению при максимальном отклике по углу ψ отвечают значения параметров $C = 1,6$; $n = 25,3$, а последующим нагружениям, независимо от пути нагружения, отвечают значения $C = 0,2$; $n = 5,9$.

Учитывая характер аппроксимации зависимостей, мы пришли к выводу, что величина интенсивности напряжений σ_0 при первичном растяжении в базовом опыте не влияет на значения коэффициентов A и n .

Кроме вышеизложенных, были опробованы и другие аппроксимирующие зависимости для пластических податливостей, в частности

$$H = H_0 10^{(0,01892 - \lg(R/\sigma_{i0}))^{-0,4} - 4},$$

$$H = H_0 10^{[(-e^{(R/\sigma_{i0}) - 0,03})/0,085 - 0,61]/0,2}.$$

Результаты расчетов с применением этих соотношений в целом дали худшее соответствие данным опытов, по сравнению с результатами расчетов, использующих соотношения (15).

Результаты испытаний и сопоставительный анализ моделей

Повторно-пропорциональные пути нагружения. Многоповерхностная теория пластичности с одной активной поверхностью достаточно хорошо описывает процесс нагружения по пропорциональным путям с разгрузками и переходами на другое направление пропорционального нагружения. Структурная модель элемента материала с постоянными параметрами дает более заметные расхождения результатов с данными опытов.

Параметры структурной модели, определяемые в базовом опыте, зависят от величины интенсивности напряжений σ_{i0} при первичном нагружении образца, а уровень значений σ_i при последующих циклах возрастал от цикла к циклу. Поэтому вычисления проведены с использованием эмпирической зависимости, установленной в опытах [29]:

$$C_j'' = C_j' \left(1 + 0,35 \frac{\sigma_{i \max} - R}{R} \right), \quad (19)$$

где C_j'' – значение параметра C_j , отвечающее текущему значению наибольшей интенсивности напряжений $\sigma_{i \max}$, индекс $j = \beta, \gamma$ (см. рис. 1, *b*); C_j' – значение параметра C_j , соответствующее значению предыдущей наибольшей интенсивности напряжений; R – значение предыдущей наибольшей интенсивности напряжений (радиус гиперповерхности, соответствующей $\sigma_{i \max}$ на предыдущих этапах нагружения (см. рис. 3, *b*).

В табл. 2 приведены в качестве примера типичные данные, полученные нами в опытах по деформированию образцов в указанных условиях.

Структурная модель элемента материала с постоянными коэффициентами обеспечивает качественное соответствие экспериментальным данным, но количественное сопоставление приводит к выводу о большом отклонении от них. Применение коррекции параметров приводит к существенному улучшению прогноза, использующего соотношения структурной модели, и приближает по эффективности скорректированную модель к многоповерхностной теории.

Таким образом, результаты расчета деформаций по соотношениям многоповерхностной теории с одной активной поверхностью и расчета по структурной модели, использующей коррекцию параметров, дают хорошее соответствие с данными экспериментов.

Сложные пути нагружения. На рис. 5 показаны экспериментальные результаты, найденные при сложных путях нагружения для одного из таких характерных процессов (см. рис. 3, *b*); приведенные данные сопоставлены с расчетными, полученными для различных моделей материала. Параметр Одквиста на момент разрушения (на второй стадии) достиг следующих уровней:

опытное значение – 0,340;

прогнозируемое при использовании структурной модели с коррекцией параметров – 0,251;

прогнозируемое согласно многоповерхностной теории – 0,345.

Таким образом, прогностические расчеты по обеим моделям дали удовлетворительное совпадение с данными эксперимента.

При малых деформациях несколько лучшее соответствие достигалось с использованием структурной модели материала, при развитых деформациях – модели, основанной на концепции поля пластических податливостей. Это объясняется тем, что первая из этих сопоставляемых моделей более точно аппроксимирует начальный участок диаграммы деформирования, но хуже отражает участок развитых деформаций. Этот недостаток можно устранить, если корректировать параметры модели с учетом повышения уровня достигаемых интенсивностей напряжений. Такая коррекция существенно приближает ее прогноз к данным эксперимента (см. рис. 5).

Результаты расчетов по теории пластического течения с кинематическим упрочнением (вторая из двух рассматриваемых моделей) указывают на неадекватный (неудовлетворительный) прогностический характер ее описания, относящегося к процессу сложного циклического деформирования.

Структурная модель элемента материала в целом несколько лучше описывает процесс сложного повторно-пропорционального циклического нагружения, чем многоповерхностная теория пластичности с одной активной поверхностью. Это можно объяснить тем, что модельное описание пути этих нагружений повторяет путь нагружения в базовом опыте.

Однако следует отметить, что для повышения адекватности структурной модели потребовалась коррекция ее параметров. Такая мера указывает на ее большую чувствительность к условиям (по напряжениям) проведения базового эксперимента и к уровню интенсивностей напряжений, достигаемых в ходе опытов.

Многоповерхностная теория пластичности с одной активной поверхностью лучше описывает исследованные сложные циклические пути нагружения, которые могут существенно отличаться от пути нагружения в базовом опыте. Это говорит о ее универсальном характере в отношении расчетов деформирования образцов материала и элементов конструкций, подверженных сложным циклическим нагружениям.

Таблица 2

Значения параметров пластического деформирования при повторно-лучевых путях нагружения после первичного осевого растяжения

Напряжение в конце участка, МПа	Наклон пути нагружения $\psi, ^\circ$	$\Delta \varepsilon_1^p, \%$			$\Delta \varepsilon_2^p, \%$			$\Delta \varepsilon_i^p, \%$			$\varepsilon_i^p, \%$					
		Опыт	Расчет		Опыт	Расчет		Опыт	Расчет		Опыт	Расчет				
Σ_1	Σ_2	МТ	С	СК	МТ	С	СК	МТ	С	СК	МТ	С	СК			
-332 890	0	-0,9 2,0	-0,6 2,1	-1,0 2,0	1,6 -0,3	8,4 -1,2	-0,1 -0,0	1,1 -0,2	1,8 2,0	0,4 8,1	1,2 2,2	0,4 8,1	2,1 2,5	1,8 3,8	10,4 18,5	2,1 4,6
-330 921	0	-1,1 3,6	-1,0 2,3	-0,5 2,2	1,0 -0,1	3,8 -1,3	0,6 -1,4	1,3 -0,1	1,4 3,6	5,3 6,8	1,6 2,4	5,3 6,8	1,0 2,8	5,3 8,9	23,8 30,6	5,5 8,3
-328 957	0	-0,6 3,2	-0,9 2,6	-0,4 2,3	0,8 0,0	3,0 -1,5	0,2 -0,8	1,1 -0,1	0,8 3,2	3,0 6,9	1,4 2,7	4,5 6,9	0,7 3,0	9,8 13,0	35,1 42,0	9,0 12,0
-332 991	0	-0,4 3,9	-0,9 2,5	-0,4 2,3	0,5 0,2	3,5 -1,9	0,1 -1,7	1,0 -0,0	0,7 3,9	5,4 7,7	1,3 2,6	5,4 7,7	0,7 2,9	13,7 17,6	47,3 55,0	16,7 15,6
-338 1006	0	-0,6 2,1	-0,8 1,3	-0,4 1,3	0,4 -0,0	4,3 -2,1	0,1 -0,8	0,9 -0,0	0,7 2,1	6,8 7,7	1,2 1,3	6,8 7,7	0,9 2,0	18,3 30,3	61,9 69,6	16,5 18,5
-343 1020	0	-0,5 1,9	-0,9 1,2	-0,6 1,4	0,4 0,1	4,3 -2,5	-0,1 -0,6	0,9 -0,0	0,6 2,0	7,3 8,3	1,2 1,3	7,3 8,3	1,1 2,1	21,0 22,9	76,8 85,1	19,5 21,6
-344 1070	0	-0,4 5,2	-0,8 3,8	-0,4 3,3	0,3 0,7	3,9 -3,4	0,0 -2,0	0,8 -0,0	0,5 5,2	7,0 1,0	1,2 3,9	7,0 1,0	0,7 4,1	23,4 28,6	92,1 103	22,4 26,4
-354 1110	0	-0,6 4,2	-0,8 3,1	-0,8 3,1	0,2 1,6	5,9 -4,6	-0,2 -1,1	0,7 -0,0	0,6 4,5	1,0 4,1	1,1 3,2	1,0 4,1	1,4 3,9	29,3 33,8	114 128	27,8 31,7

Примечание. Первичное осевое растяжение проведено до $\sigma_{\theta 0} = 872$ МПа и $\varepsilon_{\theta 0}^p = 0,245$.

Принятые сокращения: МТ – многоповерхностная теория пластичности с одной активной поверхностью, С, СК – соответственно структурная модель с постоянными коэффициентами и с коррекцией параметров материала по формуле (19).

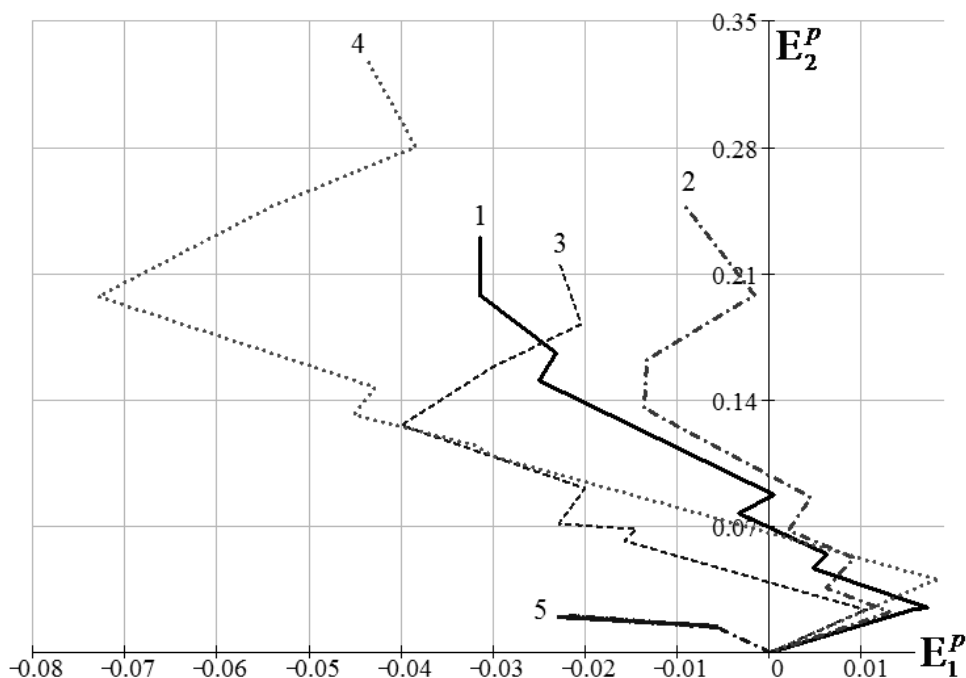


Рис. 5. Сравнение экспериментальных (1) и расчетных (2 – 5) результатов путей деформирования с использованием различных моделей для пути нагружения (см. рис. 3, б): многоповерхностной теории с одной активной поверхностью (2); структурных моделей с коррекцией (3) и без коррекции (4) параметров; теории пластического течения с кинематическим упрочнением (5)

Для многоповерхностной теории не выявлено существенной зависимости ее параметров от уровня нагружения как в базовом опыте, так и при произвольных путях нагружения. Она адекватно описывает сложное циклическое нагружение с интенсивностями напряжений как выше, так и ниже интенсивности напряжений, при которой определялись параметры модели. Дополнительной коррекции параметров при этом не требуется.

Заключение

Проведено сравнение прогнозов многоповерхностной теории с одной активной поверхностью и структурной модели с результатами экспериментальных исследований на стали 1Х18Н10Т-ВД при сложном непропорциональном пассивном нагружении.

Многоповерхностная теория пластичности с одной активной поверхностью нагружения обеспечивает хорошую точность прогнозов для сложных путей нагружения, с участками полной и частичной разгрузки.

Для всех исследованных путей нагружения результаты расчетов с использованием структурной модели при неизменных значениях параметров модели и числе элементов дает худшее соответствие данным опытов, чем результат расчетов по многоповерхностной модели. Прогнозы с применением теории пластического течения с кинематическим упрочнением значительно уступают по точности двум вышеназванным моделям.

Вариант структурной модели с переменными параметрами позволяет значительно уменьшить погрешности прогноза. Погрешности расчетов с использованием такой модели и многоповерхностной теории близки для всех исследуемых путей нагружения.

В рамках многомодельного метода [30] исследования пластического деформирования установлены области достоверного применения многоповерхностной теории с одной активной поверхностью нагружения и структурной модели материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-08-00845-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Зубчанинов В.Г.** Об активных и пассивных процессах сложного нагружения-разгружения // Современные проблемы термовязкопластичности. Труды II школы-семинара, М.: МАМИ, 2007. С. 3–18.
- [2] **Зубчанинов В.Г., Гультяев В.И., Зубчанинов Д.В.** Экспериментальное исследование процессов сложного нагружения материалов на многозвенных траекториях // Современные проблемы термовязкопластичности. Труды II школы-семинара. М.: МАМИ, 2007. С. 19–24.
- [3] **Зубчанинов В.Г., Гультяев В.И., Зубчанинов Д.В.** Экспериментальное исследование стали 45 по траекториям типа «Плоский винт» // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости. Тверь: ТГТУ, 2007. С. 104–109.
- [4] **Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б.** Эндокронные теории пластичности: основные положения, перспективы развития // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1989. № 1. С. 161–168.
- [5] **Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б.** О соотношениях эндокронной теории пластичности с «новой» мерой внутреннего времени // Технология легких сплавов. 1990. № 3. С. 32–36.
- [6] **Пальмов В.А.** Колебания упругопластических тел. М.: Наука. 1976. 328 с.
- [7] **Ильюшин А.А.** Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
- [8] **Lissenden C.J., Colaiuta J.F., Lerch B.A.** Hardening behavior of three metallic alloys under combined stresses at elevated temperature // Acta Mechanica. 2004. Vol. 169. No. 1. Pp. 53–77.
- [9] **Kuwabara T., Kuroda M., Tvergaard V., Nomura K.** Use of abrupt strain path change for determining subsequent yield surface: experimental study with metal sheets // Acta Mater. 2000. Vol. 48. No. 9. Pp. 2071–2079.
- [10] **Khan A.S., Parikh Y.** Large deformation in polycrystalline copper under combined tension-torsion, loading, unloading and reloading or reverse loading: a study of two incremental theories of plasticity // International Journal of Plasticity. 1986. Vol. 2. No. 4. Pp. 379–392.
- [11] **Rees D.W.A.** Research note on a reexamination of neutral loading experiments // International Journal of Plasticity. 1988. Vol. 4. No. 1. Pp. 91–102.
- [12] **Rees D.W.A.** Applications of classical plasticity theory to non-radial loading paths // Proc. R. Soc. Lond. A. 1987. Vol. 410. No. 1839. Pp. 443–475.
- [13] **Павлов П.А.** Основы инженерных расчетов элементов машин на усталость и длительную прочность. Ленинград: Машиностроение, 1988, 251 с.
- [14] **Мельников Б.Е., Изотов И.Н., Кузнецов Н.П.** Пространственный упругопластический элемент для описания нестационарного деформирования // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 1986. Т. 197. № 1. С. 75–79.
- [15] **Мельников Б.Е., Изотов И.Н., Кузнецов Н.П.** Расчет и экспериментальное исследование сложных путей упругопластического деформирования // Проблемы прочности. 1990. № 8. С. 14–17.
- [16] **Мельников Б.Е., Семенов А.С.** Многоповерхностная теория пластичности с одной активной поверхностью пластических податливостей // Труды ЛГТУ. 1991. № 144. С. 26–31.
- [17] **Мельников Б.Е., Семенов А.С.** Описание эволюции поверхностей равной податливости в многоповерхностной теории пластичности // Труды СПбГТУ. 1996. № 456. С. 52–61.
- [18] **Изотов И.Н., Кузнецов Н.П., Мельников Б.Е., Митюков А.Г.** Упруго-пластическое поведение стальных трубчатых образцов при сложном трехосном нагружении // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2003. № 3 (33). С. 114–125.
- [19] **Изотов И.Н., Мельников Б.Е., Семенов А.С., Семенов С.Г.** Определение свойств пластических податливостей на никелевых образцах // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. № 2. С. 165–174.
- [20] **Изотов И.Н., Ягн Ю.И.** Изучение пластического деформирования металла с деформационной анизотропией, созданной в процессе предварительного нагружения // ДАН СССР. 1961. Т. 139. № 3. С. 576–579.
- [21] **Mroz Z.** On the description of anisotropic workhardening // J. Mech. Phys. Solids. 1967. Vol. 15. No. 3. Pp. 163–175.
- [22] **Mroz Z., Norries V.A., Zienkiewicz O.C.** An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading // Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 1978. Vol. 2. No. 3. Pp. 203–221.
- [23] **Мельников Б.Е., Кузнецов Н.П., Митюков А.Г., Семенов А.С., Семенов С.Г.** Применение модели энергетической оценки прочности при нескольких циклах нагружения в случае сложного неоднородного напряженного состояния // Современные проблемы ресурса материалов и конструкций. Труды III школы-семинара 2009 г. М.: МГТУ (МАМИ), 2009. С. 140–147.

[24] Мельников Б.Е., Семенов А.С. Энергетическая модель накопления повреждений при малоцикловой усталости // XXI Петербургские чтения по проблемам прочности. К 100-летию со дня рождения Л.М. Качанова и Ю.Н. Работнова. Сб. материалов. СПб.: Соло, 2014. С. 59–61.

[25] Kitaeva D.A., Rudaev Y.I. About kinetic equations of dynamic superplasticity model // Proceedings of the 31th Summer School “Advanced Problems in Mechanics”. June 22–July 2, 2003. St. Petersburg: Polytechnical Publishing House, 2003. Pp. 172–176.

[26] Артюх В.Г. Точность предохранителей для металлургических машин. Мариуполь: Изд-во ПГТУ, 2000. 177 с.

[27] Павлов П.А., Изотов И.Н., Кузнецов Н.П., Митюков А.Г., Симанёнок А.Н. Установка

для испытания материалов при объемном напряженном состоянии // Проблемы прочности. 1986. № 12. С. 104–107.

[28] Иванченко С.Н., Кадашевич Ю.И., Поныткин С.П. Квазистатическая теория пластичности, учитывающая уплотнение материала // Известия РАН. Механика твердого тела. 2000. № 5. С. 21–26.

[29] Izotov I.N., Kuznetsov N.P., Melnikov B.E., Mityukov A.G., Musienko A.Yu. New variants of the multisurface theory of plasticity. Comparison with the experimental data // Proc. of SPIE. 2000. Vol. 4046. Pp. 362–367.

[30] Melnikov B.E., Semenov A.S. Creation and application of hierarchical sequence of material models for numerical analysis of elasto-plastic structures // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 1996. Vol. 76. Suppl. 2. Pp. 615–616.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КУЗНЕЦОВ Николай Петрович — кандидат технических наук, доцент кафедры технологии машиностроения Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород, Российская Федерация.

173003, Российская Федерация, г. Великий Новгород, Большая Санкт-Петербургская ул., 41.
knryan@yandex.ru

МЕЛЬНИКОВ Борис Евгеньевич — доктор технических наук, заведующий кафедрой сопротивления материалов Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
kafedra@ksm.spbstu.ru

СЕМЕНОВ Артем Семенович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
Semenov.Artem@googlemail.com

Kuznetsov N.P., Melnikov B.E., Semenov A.S. VERIFICATION AND ADAPTATION OF THE PLASTICITY MODELS UNDER COMPLEX VARIABLE LOADING WITH INTERMEDIATE COMPLETE AND PARTIAL UNLOADINGS.

The experimental studies of elasto-plastic deformation of tubular steel samples under proportional and non-proportional (monotonic and cyclic) loadings, including partial and intermediate loadings, have been conducted with the aim of improving the accuracy of the description of the complex passive loading processes. The plastic strain accumulation was observed in the course of tests carried out under passive loading. However, this effect turned out not to be described by the plastic flow theory. This result required the development of an alternative material model. The comparisons of experimental results with the predictions of the structural (rheological) elasto-plastic model and the multisurface theory of plasticity with one active surface were made. Modifications of the constitutive equations were proposed in order to improve the accuracy of the material response prediction.

PLASTICITY, PASSIVE LOADING, EXPERIMENT, MODELING.

REFERENCES

- [1] **V.G. Zubchaninov**, Ob aktivnykh i passivnykh protsessakh slozhnogo nagruzheniya-razgruzheniya [On the active and passive processes of complex loading-unloading], Moscow, Sovremennyye problemy termovyazkoplastichnosti, Trudy II shkoly-seminara. (2007) 3–18.
- [2] **V.G. Zubchaninov, V.I. Gulyayev, D.V. Zubchaninov**, Eksperimentalnoye issledovaniye protsessov slozhnogo nagruzheniya materialov na mnogozvennykh trayektoriyakh [An experimental investigation of processes of complex loading of materials in the multilink paths], Moscow, Sovremennyye problemy termovyazkoplastichnosti, Trudy II shkoly-seminara. (2007) 19–24.
- [3] **V.G. Zubchaninov, V.I. Gulyayev, D.V. Zubchaninov**, Eksperimentalnoye issledovaniye stali 45 po trayektoriyam tipa “Ploskiy vint” [An experimental investigation of steel 45 in the “flat screw” paths] Tver, Sovremennyye problemy prochnosti, plastichnosti i ustoychivosti. (2007) 104–109.
- [4] **Yu.I. Kadashevich, A.B. Mosolov**, Endokhronnye teorii plastichnosti: osnovnyye polozheniya, perspektivy razvitiya [Endochronic plasticity theories: the main statements, future development], Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela. (1) (1989). 161–168.
- [5] **Yu.I. Kadashevich, A.B. Mosolov**, O sootnosheniyakh endokhronnoy teorii plastichnosti s “novoy” meroy vnutrennego vremeni [On the relationships of endochronic plasticity theory with a “new” measure of internal time], Tekhnologiya legkikh splavov. (3) (1990) 32–36.
- [6] **V.A. Palmov**, Kolebaniya uprugoplasticheskikh tel [Vibrations of elastic-plastic bodies], Moscow, Nauka, 1976.
- [7] **A.A. Ilyushin**, Plastichnost. Osnovy obshchey matematicheskoy teorii [Plasticity. Background of the general mathematical theory], Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1963.
- [8] **C.J. Lissenden, J.F. Colaiuta, B.A. Lerch**, Hardening behavior of three metallic alloys under combined stresses at elevated temperature, Acta Mechanica 169 (1) (2004) 53–77.
- [9] **T. Kuwabara, M. Kuroda, V. Tvergaard, K. Nomura**, Use of abrupt strain path change for determining subsequent yield surface: experimental study with metal sheets, Acta Mater. 48 (9) (2000) 2071–2079.
- [10] **A.S. Khan, Y. Parikh**, Large deformation in polycrystalline copper under combined tension-torsion, loading, unloading and reloading or reverse loading: a study of two incremental theories of plasticity, International Journal of Plasticity. 2 (4) (1986) 379–392.
- [11] **D.W.A. Rees**, Research note on a reexamination of neutral loading experiments, International Journal of Plasticity. 4 (1) (1988) 91–102.
- [12] **D.W.A. Rees**, Applications of classical plasticity theory to non-radial loading paths, Proc. R. Soc. Lond. A. 410 (1839) (1987) 443–475.
- [13] **P.A. Pavlov**, Osnovy inzhenernykh raschetov elementov mashin na ustalost i dlitelnyuyu prochnost [Background of fatigue and long-time strength engineering calculations of machine elements], Leningrad, Izd-vo “Mashinostroyeniye”, 1988.
- [14] **B.E. Melnikov, I.N. Izotov, N.P. Kuznetsov**, Prostranstvennyy uprugoplasticheskiy element dlya opisaniya nestatsionarnogo deformirovaniya [A spatial elastic-plastic element for description of unsteady deformation], Leningrad, Izvestiya VNIIG im. B.E. Vedeneyeva. 197 (1986) 75–79.
- [15] **B.E. Melnikov, I.N. Izotov, N.P. Kuznetsov**, Raschet i eksperimentalnoye issledovaniye slozhnykh putey uprugoplasticheskogo deformirovaniya [Calculations and experimental investigation of complex paths of elastic-plastic deformation], Problemy prochnosti. (8) (1990) 14–17.
- [16] **B.E. Melnikov, A.S. Semenov**, Mnogopoverkhnostnaya teoriya plastichnosti s odnoy aktivnoy poverkhnostyu plasticheskikh podatlivostey [The multisurface theory of plasticity with one active surface of plastic compliances], Trudy SPbGTU. (144) (1991) 26–31.
- [17] **B.E. Melnikov, A.S. Semenov**, Opisaniye evolyutsii poverkhnostey ravnoy podatlivosti v mnogopoverkhnostnoy teorii plastichnosti [Description of evolution of equal-compliance surfaces in the multisurface theory of plasticity], Trudy SPbGTU. (456) (1996) 52–61.
- [18] **I.N. Izotov, N.P. Kuznetsov, B.E. Melnikov, A.G. Mityukov**, Uprugoplasticheskoye povedeniye stalnykh trubchatykh obraztsov pri slozhnom trekhosnom nagruzhenii [Elastic-plastic behavior of steel tubular samples under the complex triaxial loading], St. Petersburg State Polytechnical University Journal, (3) (2003) 114–125.
- [19] **I.N. Izotov, B.E. Melnikov, A.S. Semenov, et al.**, Opredeleniye svoystv plasticheskikh podatlivostey na nikelevykh obraztsakh [Determination of plastic compliance properties of nickel samples], St. Petersburg State Polytechnical University Journal, (2) (2009) 165–174.
- [20] **I.N. Izotov, Yu.I. Yagn**, Izucheniye plasticheskogo deformirovaniya metalla s deformatsionnoy anizotropiyey, sozdannoy v protsesse predvaritelnogo nagruzheniya [Study of

plastic deformation of metal with strain anisotropy induced during preliminary loading], DAN SSSR. 139 (3) (1961) 576–579.

[21] **Z. Mroz**, On the description of anisotropic workhardening, *J. Mech. Phys. Solids*. 15 (3) (1967) 163–175.

[22] **Z. Mroz, V.A. Norries, O.C. Zienkiewicz**, An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading, *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2 (3) (1978) 203–221.

[23] **B.E. Melnikov, N.P. Kuznetsov, A.G. Mityukov, et al.**, Primeneniye modeli energeticheskoy otsenki prochnosti pri neskol'kikh tsiklakh nagruzheniya v sluchaye slozhnogo neodnorodnogo napryazhennogo sostoyaniya [An application of the model for an energetic estimation of low-cycle fatigue in the case of complex inhomogeneous stress state], *Sovremennyye problemy resursa materialov i konstruksiy. Trudy III shkoly-seminara 2009 g. M. MG TU (MAMI) (2009) 140–147.*

[24] **B.E. Melnikov, A.S. Semenov**, Energeticheskaya model nakopleniya povrezhdeniy pri malotsiklovoy ustalosti [Energetic model of damage accumulation in the low-cycle fatigue], XXI Peterburgskiy chteniye po problemam prochnosti, K 100-letiyu so dnya rozhdeniya L.M. Kachanova i Yu.N. Rabotnova Sb. Mater. (2014) 59–61.

[25] **D.A. Kitaeva, Y.I. Rudaev**, About kinetic

equations of dynamic superplasticity model, Proceedings of the 31th Summer School “Advanced Problems in Mechanics”, June 22–July 2, 2003. St. Petersburg, Polytechnical Publishing House, (2003) 172–176.

[26] **V.G. Artyukh**, Tochnost predokhraniteley dlya metallurgicheskikh mashin [Safety-device accuracy for metallurgical machines], Mariupol, Izd-vo PG TU, 2000.

[27] **P.A. Pavlov, I.N. Izotov, N.P. Kuznetsov**, Ustanovka dlya ispytaniya materialov pri obyemnom napryazhennom sostoyanii [The testing machine in the volumetric stress], *Problemy prochnosti*, (12) (1986) 104–107.

[28] **S.N. Ivanchenko, Yu.I. Kadashevich, S.P. Pomytkin**, Kvazistaticheskaya teoriya plastichnosti, uchityvayushchaya uplotneniye materiala [Quasi-static plasticity theory considering the material consolidation], *Izvestiya Rossiyskoy Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. (5) (2000) 2–26.

[29] **I.N. Izotov, N.P. Kuznetsov, B.E. Melnikov, et al.**, New variants of the multisurface theory of plasticity, Comparison with the experimental data, *Proc. of SPIE*. 4046 (2000) 362–367.

[30] **B.E. Melnikov, A.S. Semenov**, Creation and application of hierarchical sequence of material models for numerical analysis of elasto-plastic structures, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. 76 (Supl. 2) (1996) 615–616.

THE AUTHORS

KUZNETSOV Nikolay P.

Yaroslav-the-Wise Novgorod State University

41 Bolshaya Sankt-Peterburgskaya St., 173003, Veliky Novgorod, Russian Federation

knpyan@yandex.ru

MELNIKOV Boris E.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politekhnikeskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

kafedra@ksm.spbstu.ru

SEMENOV Artem S.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politekhnikeskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

Semenov.Artem@gmail.com